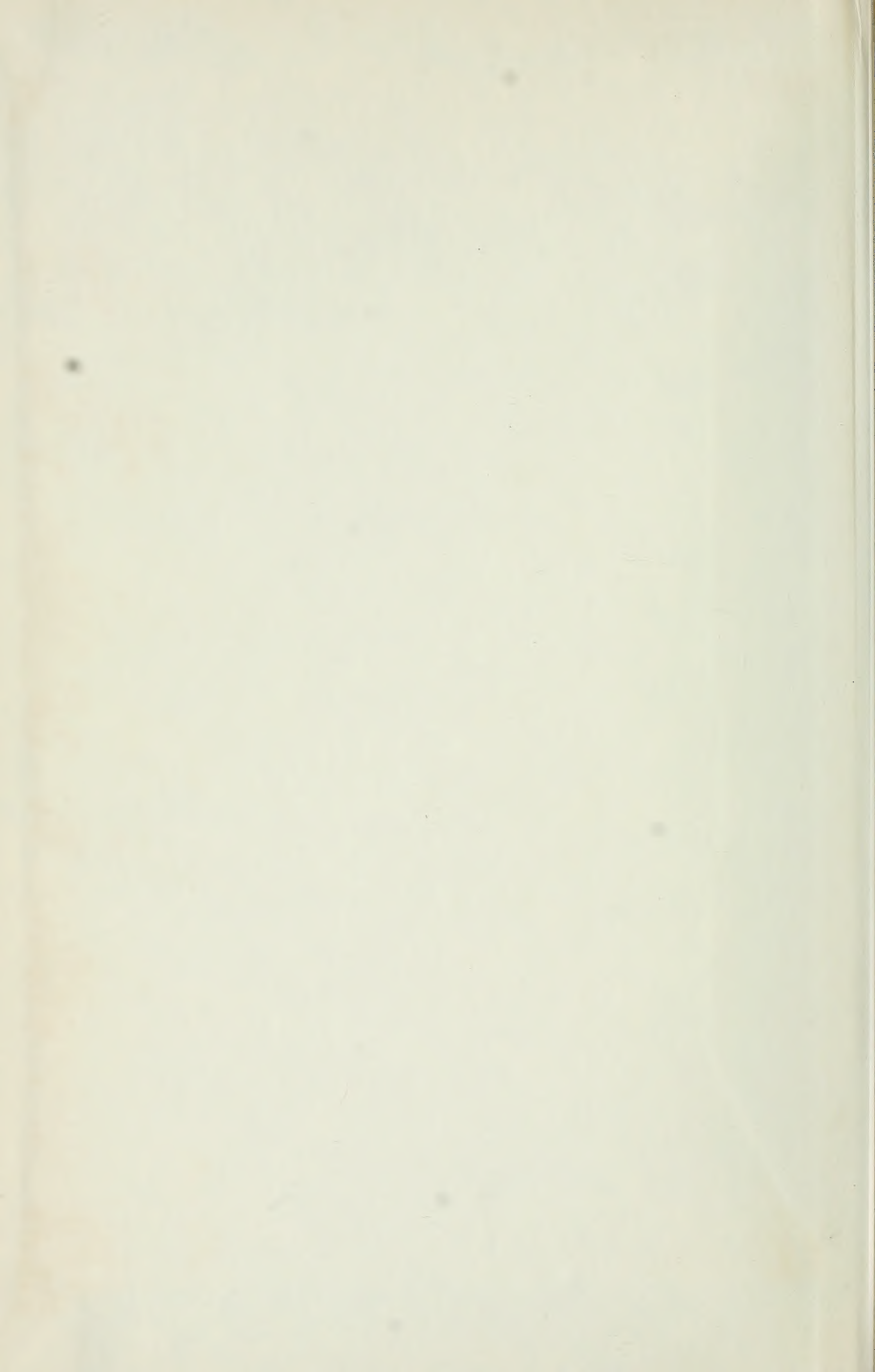
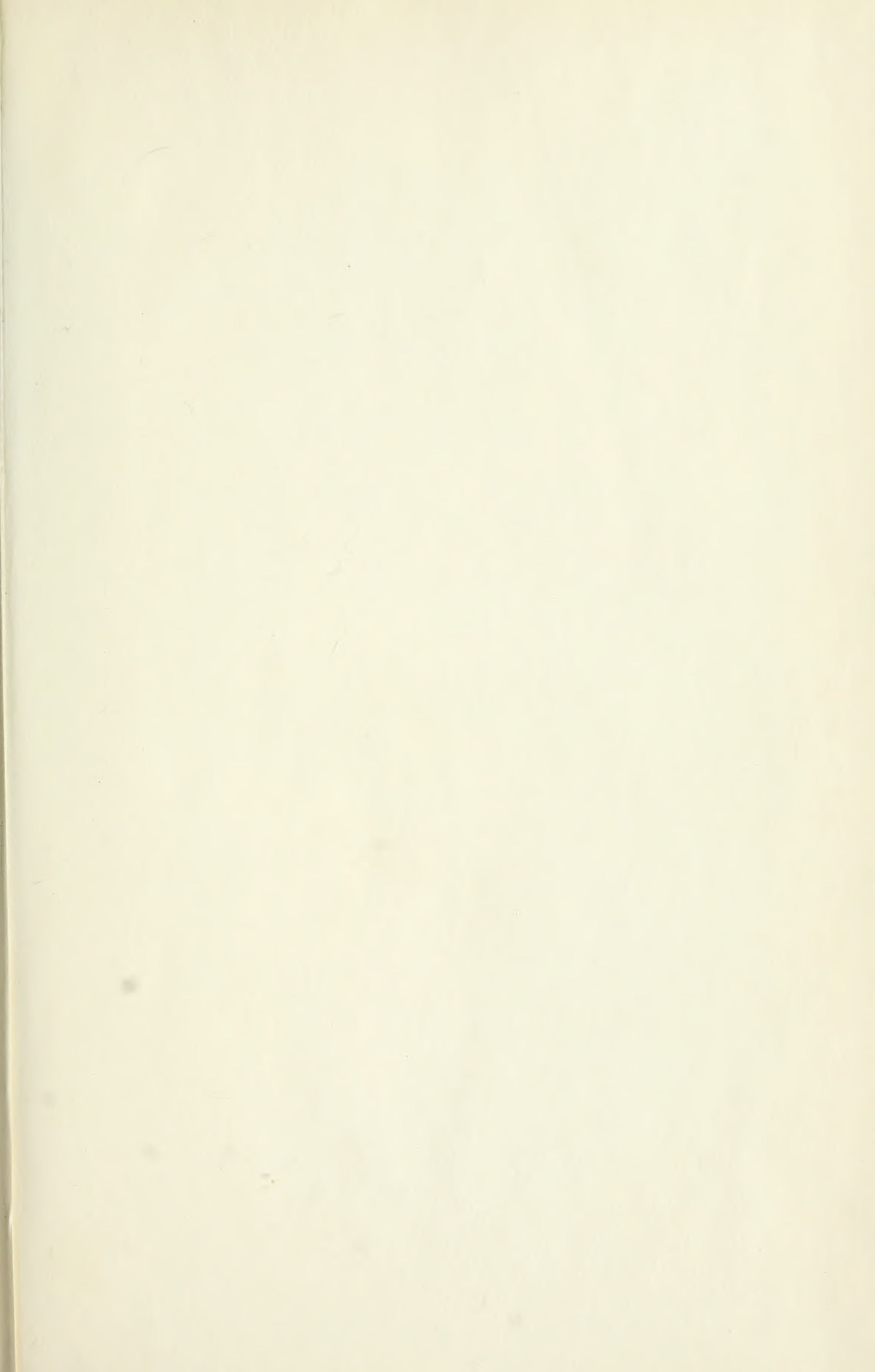
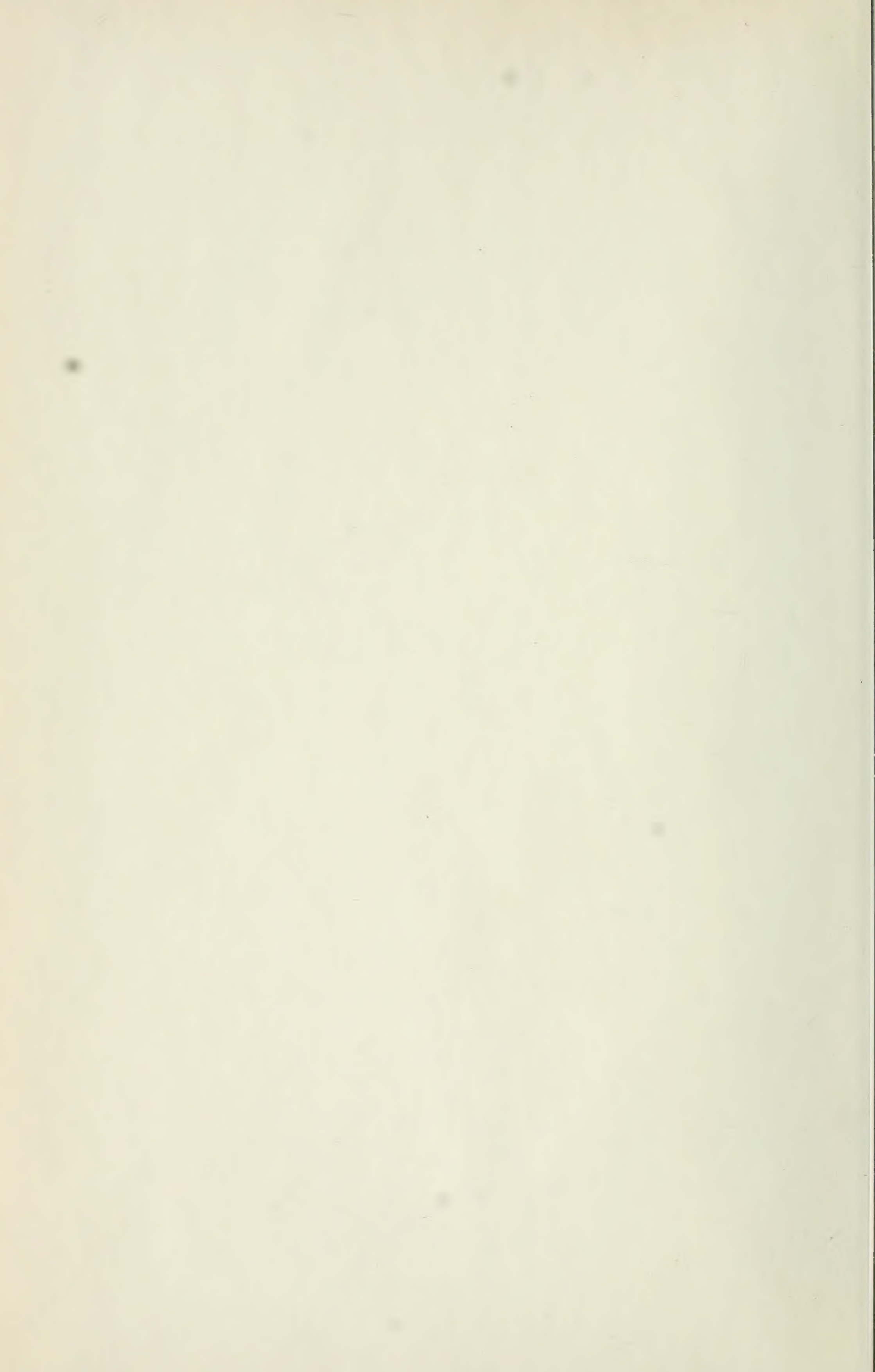
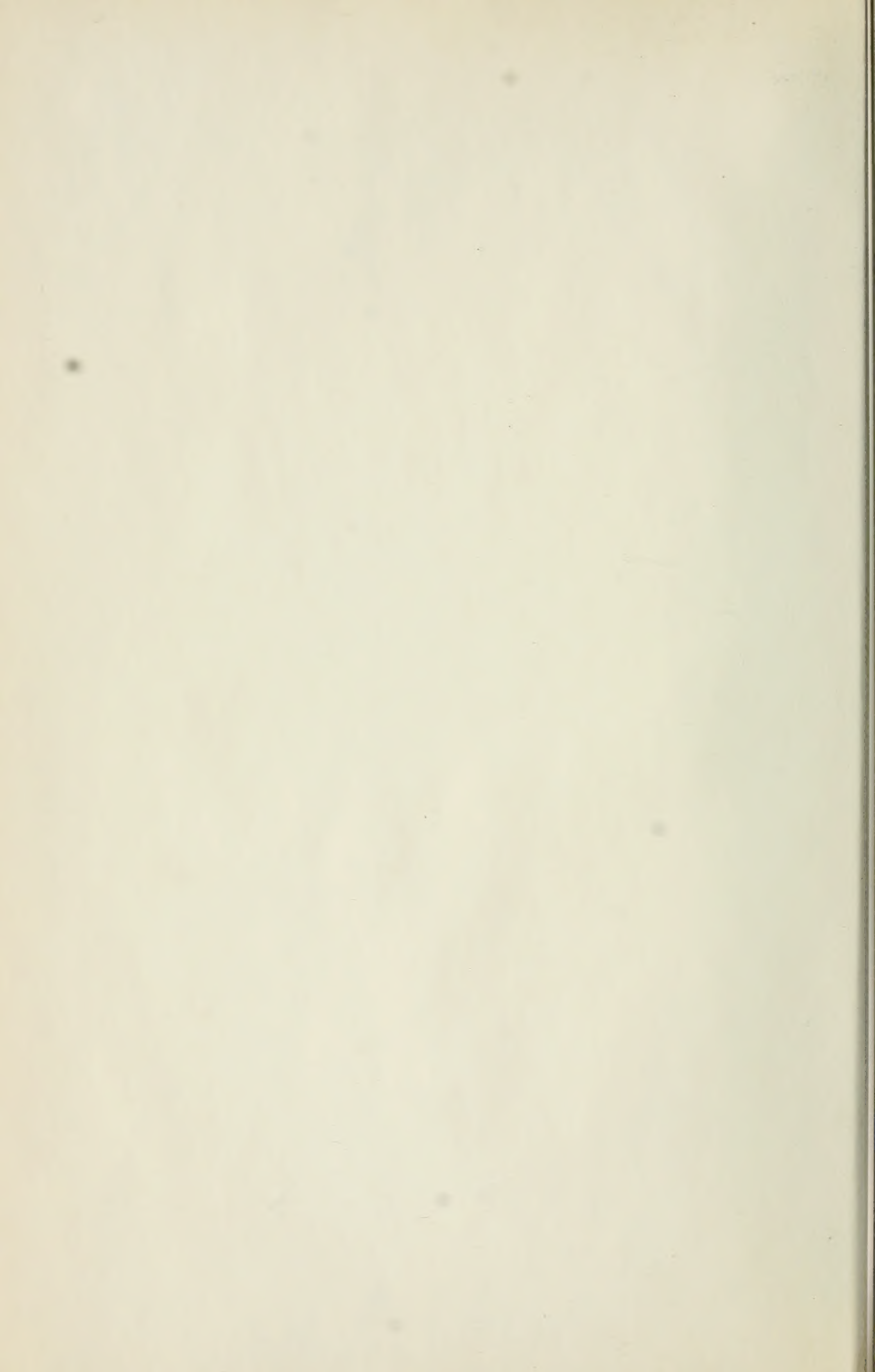


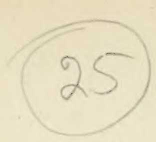












THEORIE
DER ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN EINER VARIABELN

UND IHRE ANWENDUNG AUF ALGEBRAISCHE KURVEN UND ABELSCHE INTEGRALE

VON

Dr. KURT HENSEL
A. O. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT BERLIN

UND

Dr. GEORG LANDSBERG
A. O. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG

LEIPZIG
VERLAG VON B. G. TEUBNER
1902



Vorrede.

Die Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln kann von den allerverschiedensten Gesichtspunkten aus behandelt werden, weil sie aufs engste mit der Arithmetik, der Algebra, der Funktionentheorie und der Geometrie zusammenhängt; auf dieser nahen Beziehung zu den schönsten und tiefsten Fragen der ganzen Mathematik beruht wohl zum Teil der eigentümliche Reiz, der dieser Disciplin innewohnt, und ihre immer wachsende Bedeutung für die Entwickelung der Gesamtwissenschaft.

Im Laufe der letzten vierzig Jahre hat sich aber den Forschern, zuerst durch die Arbeiten von Weierstrafs, Kronecker, Dedekind und Weber, mehr und mehr die Überzeugung aufgedrängt, dafs der leichteste und sicherste Eingang in diese Theorie durch eine wesentlich arithmetische Betrachtung der rationalen und der algebraischen Funktionen gewonnen werden kann, selbstverständlich unter organischer Einführung der hierher gehörigen Resultate aus der Funktionentheorie, welche ja in der von Weierstrafs gegebenen Darstellung selbst arithmetischen Charakter besitzt.

Bei dieser Problemstellung erscheint diese Disciplin nahe verwandt mit der allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen und mit derjenigen der algebraischen Flächen; aber es zeigt sich, dafs sie die einfachste und einheitlichste unter ihnen ist, und dafs ihre Methoden vielleicht noch weiter führen und tiefer in das behandelte Gebiet eindringen, als dies in der höheren Arithmetik und in der Lehre von den algebraischen Flächen der Fall ist. Beim Vergleich mit der zweiten Disciplin findet man den Grund dieser Erscheinung einfach darin, dafs die Theorie der analytischen Funktionen zweier Variabeln in wesentlichen Punkten noch der genaueren Durchbildung bedarf; aber auch für die zuerst genannte, viel weiter entwickelte Theorie kann die Richtigkeit unserer Behauptung aus einer Gegenüberstellung ihrer Methoden und ihrer Ziele erschlossen werden.

In der höheren Arithmetik werden die algebraischen Zahlen einmal in Bezug auf ihre Teilbarkeit untersucht mit Hilfe der Idealtheorie, zweitens aber werden sie in Bezug auf ihre Gröſse betrachtet, und diese Fragen führen auf die Theorie der Einheiten und im weiteren Umfange auf die Betrachtungen, welche man nach Minkowski als die Geometrie der Zahlen bezeichnet. Während die Resultate dieser beiden arithmetischen Untersuchungen sehr ähnlich sind, erscheinen ihre Methoden völlig verschieden. Ferner sind diese Untersuchungen auf das Gebiet der algebraischen Zahlen beschränkt, während sich für das der transcendenten Zahlen bisher noch keine allgemeinen Methoden ergeben haben.

Dagegen bedürfen wir in der Theorie der algebraischen Funktionen zu ihrer vollständigen Charakterisierung innerhalb des allgemeinen Funktionengebietes nur des Satzes, daſs sie endlich vieldeutig sind und in der Umgebung einer jeden endlichen oder der unendlich fernen Stelle algebraischen Charakter besitzen. Mit Hilfe des Fortsetzungsprinzips für die analytischen Funktionen erhält man so eine wunderbar einfache und vollständige Einsicht in die Natur einer beliebig gegebenen algebraischen Funktion, eine völlig strenge Darstellung der zugehörigen Riemannschen Kugelfläche, und eine rein arithmetische Charakterisierung ihrer Punkte und der diesen zugeordneten Divisoren; genau dieselbe Einsicht ergiebt sich aber auch für alle algebraischen Funktionen, welche rational durch die gegebene und die unabhängige Variable ausdrückbar sind, d. h. für alle Elemente des zugehörigen „Körpers" oder, was ganz dasselbe ist, für alle Funktionen der zugehörigen Riemannschen Klasse. Durch eine einfache Ausdehnung des Begriffs der Teilbarkeit in der Zahlentheorie gelangt man endlich dazu, die Gesamtheit aller algebraischen Funktionen jenes Körpers vollständig zu beherrschen.

Während aber die höhere Zahlentheorie ihre Aufgabe mit der Kenntnis der algebraischen Zahlkörper als gelöst ansieht, bildet das entsprechende Resultat für unsere Theorie nur die Grundlage für zwei sehr viel weiter und tiefer gehende Probleme, von denen das eine analytisch, das andere geometrisch ist. Es ergiebt sich nämlich einmal unmittelbar die Aufgabe, alle diejenigen analytischen Funktionen zu untersuchen, deren Ableitungen nach der unabhängigen Variabeln dem algebraischen Funktionenkörper angehören. Da wir aber die Ableitungen jener Funktionen beherrschen und auſserdem aus dem Charakter der Ableitung an einer Stelle unmittelbar auf den Charakter der Funktion schlieſsen können, so ergiebt sich aus den zuerst gefundenen Resultaten sofort eine genaue Erkenntnis jener Integralfunktionen, der sogenannten

Abelschen Integrale, und eine naturgemäſse Einteilung dieser dem algebraischen Körper zugeordneten einfachsten Transcendenten. Als die beiden wichtigsten Resultate dieser weiteren Theorie erhält man so rein arithmetische und allgemein giltige Begründungen des sogenannten Riemann-Rochschen Satzes und des Abelschen Theorems, durch welche auch der Weg zu den Abelschen Funktionen, den Umkehrungsfunktionen der Abelschen Integrale bereitet wird.

Zweitens kann aber die zwischen zwei Funktionen des Körpers bestehende algebraische Gleichung geometrisch als ebene Kurve gedeutet werden, und es bietet sich so die reizvolle Aufgabe dar, alle dem Körper zugehörigen Kurven zu untersuchen. Auch hier ergiebt sich unter Benutzung der Theorie der Teilbarkeit eine allgemein giltige und doch auf jede noch so spezielle Kurve anwendbare Theorie, in deren Mittelpunkte die Plückerschen Formeln in ihrer allgemeinsten Fassung und die Analyse der Kurvensingularitäten stehen.

In diesem Umfange ist diese Disciplin in dem vorliegenden Werke dargestellt; wir haben uns bemüht, die ganze Theorie und alle aus ihr abzuleitenden Folgerungen ohne jede sogenannte vereinfachende Voraussetzung zu begründen und nur solche Methoden und Definitionen zu benutzen, welche auf jeden vorgelegten, noch so speziellen Fall anwendbar bleiben, und zwar so, daſs die verlangten Rechnungen stets wirklich ausgeführt werden können.

In Bezug auf den Anteil, welchen die beiden Verfasser an diesem Werke haben, möchten wir nur erwähnen, daſs der Plan und die Anordnung des Gesamtinhaltes aus langen und eingehenden gemeinsamen Besprechungen hervorgingen, welche uns beiden stets eine schöne und wertvolle Erinnerung bleiben werden; die genaue Ausarbeitung der zwanzig ersten Vorlesungen ist dagegen durch den älteren, die der folgenden durch den jüngeren der beiden Herausgeber erfolgt.

Für die Vergleichung der hier gegebenen Darstellung dieser Theorie mit den früheren Methoden verweisen wir auf den am Ende des Buches gegebenen ausführlichen Rückblick.

Bei der Redaktion der ersten Hälfte dieses Buches hat uns Herr Dr. Oster, bei der zweiten und dem Sachregister Herr stud. Zymalkowski in dankenswertester Weise unterstützt; ganz besonderen Dank aber möchten wir Herrn Professor L. Schlesinger in Klausenburg dafür aussprechen, daſs er die Druckbogen des ganzen Werkes sorgfältig durchgesehen hat; sein wertvoller Rat ist uns an vielen Stellen von groſsem Nutzen gewesen. Endlich gilt unser Dank der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner, die unsere Aufgabe durch entgegenkommendes Eingehen auf unsere Wünsche, und die bei ihr

wohlbekannte Sorgfalt im Druck und in der Ausstattung wesentlich erleichtert hat.

Möchte es uns gelungen sein, unser Interesse und unsere Liebe für dieses schöne Gebiet mathematischer Forschung unseren Lesern mitzuteilen; wir würden darin einen reichen Lohn für mehrjährige Arbeit erblicken.

Berlin und Heidelberg,
den 10. Mai 1902.

K. Hensel. G. Landsberg.

Inhaltsverzeichnis.

Erste Vorlesung.

Der Körper $K(z)$ der rationalen Funktionen. — Untersuchung der Gröfsen des Körpers in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{p}_0$. — Die Einheitsfunktionen für eine Stelle. — Nullstellen und Pole. — Die Ordnungszahlen. — Ausbreitung der Funktionswerte auf der Horizontalebene und auf der Kugelfläche. — Der einem Punkte entsprechende Primdivisor $\mathfrak{p}_0$. — Kongruenzen für eine Potenz von $\mathfrak{p}_0$. — Entwickelung der rationalen Funktionen in Potenzreihen. — Eindeutigkeit dieser Entwickelung. — Der Hauptteil einer Funktion für eine Stelle. — Konvergenz der Potenzreihen in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}_0$. — Untere Grenze für die Konvergenzradien auf der Kugelfläche.

§ 1.

Bevor wir auf die Theorie der algebraischen Funktionen der Variabeln z eingehen, sollen die rationalen Funktionen von z untersucht werden, und zwar zunächst mit rein arithmetischen Hülfsmitteln. Dieser einfachste Fall bietet uns Gelegenheit, diejenigen arithmetischen Prinzipien auseinander zu setzen, welche in dem höheren Gebiete der algebraischen Funktionen ebenfalls zum Ziele führen werden.

Es sei z eine komplexe Variable, welche fähig ist, alle reellen und komplexen, endlichen und unendlichgrofsen Werte anzunehmen. Wir betrachten die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von z,

$$1) \qquad Z = F(z),$$

mit beliebigen konstanten reellen oder komplexen Koeffizienten. Sie alle bilden einen in sich abgeschlossenen Bereich, dessen Individuen sich durch die vier elementaren Rechenoperationen wiedererzeugen; denn offenbar ist die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient von zwei rationalen Funktionen wieder eine solche. Nach dem Vorgange von Herrn Dedekind nennen wir einen solchen in sich abgeschlossenen Bereich einen „Körper“ und bezeichnen ihn im vorliegenden Falle durch $K(z)$. Wir wollen im folgenden gleich die ganzen und gebrochenen Funktionen des Körpers $K(z)$ gemeinsam untersuchen, denn die ersteren unterscheiden sich von den letzten nur ganz unwesentlich durch die Eigenschaft, dafs sie allein für unendlich grofse Werte von z unendlich werden; wir werden auch den Begriff

der Teilbarkeit einer Funktion durch eine andere so fassen, dafs er gleich auf alle Gröfsen des Bereiches $K(z)$ und nicht blofs auf die ganzen Funktionen Anwendung findet. Eine gebrochene Funktion

$$Z = \frac{f(z)}{g(z)}$$

soll echt gebrochen heifsen, wenn der Nenner $g(z)$ von höherem Grade ist als der Zähler $f(z)$, unecht gebrochen, wenn der Nenner von gleichem oder niedrigerem Grade ist als der Zähler.

Wir betrachten zunächst die Werte aller Funktionen Z des Körpers $K(z)$ für einen beliebigen Wert α_0 der Variabeln z. Jeden Wert $(z = \alpha_0)$ der Variabeln z wollen wir eine Stelle im Bereiche von z nennen, und zwar eine endliche oder die unendlich ferne Stelle, je nachdem α_0 einen endlichen Wert besitzt oder unendlich grofs ist. Jede Gröfse des Körpers besitzt dann an einer solchen Stelle einen eindeutig bestimmten Wert, der Null, unendlich oder eine von Null verschiedene endliche Zahl sein kann. Man findet denselben am einfachsten, indem man, falls α_0 endlich ist, Zähler und Nenner von Z für sich nach Potenzen von $z - \alpha_0$, falls aber α_0 unendlich grofs ist, nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelt, indem man also für $z - \alpha_0$ bezw. $\frac{1}{z}$ die neue Variable z' einführt und darauf Zähler und Nenner für sich nach aufsteigenden Potenzen von z' ordnet. Hebt man sodann die höchste im Zähler und Nenner zugleich enthaltene Potenz von z' fort, so erhält man in den beiden unterschiedenen Fällen für Z die folgende Darstellung:

2a) $$Z = (z - \alpha_0)^\varrho \frac{a_0 + a_1(z - \alpha_0) + \cdots + a_\mu (z - \alpha_0)^\mu}{b_0 + b_1(z - \alpha_0) + \cdots + b_\nu(z - \alpha_0)^\nu},$$

oder, für $\alpha_0 = \infty$:

2b) $$Z = \left(\frac{1}{z}\right)^\varrho \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 \frac{1}{z} + \cdots + \bar{a}_\mu \left(\frac{1}{z}\right)^\mu}{\bar{b}_0 + \bar{b}_1 \frac{1}{z} + \cdots + \bar{b}_\nu \left(\frac{1}{z}\right)^\nu},$$

wo ϱ eine ganze positive oder negative Zahl oder Null bedeutet, und die Anfangsglieder a_0, b_0 bezw. $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$ von Null verschieden sind. Wir können diese Ausdrücke kürzer auch folgendermafsen schreiben:

2c) $$Z = (z - \alpha_0)^\varrho E(z \,|\, \alpha_0) \quad \text{bezw.} \quad Z = \left(\frac{1}{z}\right)^\varrho E(z \,|\, \infty),$$

indem wir mit $E(z \,|\, \alpha_0)$ bezw. $E(z \,|\, \infty)$ eine sog. „Einheitsfunktion für die betrachtete Stelle“, d. h. eine rationale Funktion von z bezeichnen, welche sich an jener Stelle auf die endliche, von Null verschiedene Zahl $\frac{a_0}{b_0}$ bezw. $\frac{\bar{a}_0}{\bar{b}_0}$ reduziert.

Jene beiden Ausdrücke wollen wir im folgenden in den einen

2d) $$Z = (z - \alpha_0)^\varrho E(z \mid \alpha_0)$$

zusammenfassen, indem wir übereinkommen, dafs, falls α_0 unendlich ist, der Linearfaktor $z - \alpha_0$ durch $\frac{1}{z}$ ersetzt werden soll. Jede rationale Funktion Z des Körpers $K(z)$ kann hiernach für eine beliebige Stelle $(z = \alpha_0)$ in der Form $(z - \alpha_0)^\varrho E(z \mid \alpha_0)$ dargestellt werden. Der Exponent ϱ ist, unabhängig von der hier benutzten Herleitung, als diejenige Potenz des zugehörigen Linearfaktors $z - \alpha_0$ bezw. $\frac{1}{z}$ charakterisiert, für welche der Quotient $\frac{Z}{(z - \alpha_0)^\varrho}$ eine Einheitsfunktion ist, d. h. sich für $z = \alpha_0$ auf eine von Null verschiedene endliche Konstante reduziert. Ist ϱ eine positive Zahl, so soll die Stelle $(z = \alpha_0)$ eine ϱ-fache Nullstelle, ist sie negativ, $= -\bar{\varrho}$, so soll sie eine $\bar{\varrho}$-fache Unendlichkeitsstelle oder ein Pol $\bar{\varrho}^{\text{ter}}$ Ordnung genannt werden. Ist $\varrho \geqq 0$, so hat Z für $z = \alpha_0$ einen endlichen Wert, verhält sich also an dieser Stelle regulär.

Für die weitere Untersuchung soll der zu $Z = (z - \alpha_0)^\varrho E(z \mid \alpha_0)$ gehörige Exponent ϱ als die Ordnungszahl von Z für die Stelle $(z = \alpha_0)$ bezeichnet werden. Die Ordnungszahl ist also positiv oder negativ, je nachdem diese Stelle eine Nullstelle oder eine Unendlichkeitsstelle von Z ist; sie ist für alle und nur die Funktionen gleich Null, welche hier den Charakter von Einheitsfunktionen haben. Da das Produkt oder der Quotient zweier oder mehrerer Einheitsfunktionen offenbar wieder eine solche ist, so ergiebt sich zunächst der Satz:

> Die Ordnungszahl eines Produktes ist gleich der Summe der Ordnungszahlen seiner Faktoren; die Ordnungszahl eines Quotienten ist gleich der Differenz der Ordnungszahlen von Zähler und Nenner.

Eine ganze Funktion des n^{ten} Grades,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

besitzt nur für die Stelle $(\alpha_0 = \infty)$ eine negative Ordnungszahl und zwar ist diese $= -n$, wie aus der Darstellung

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} \left[a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \left(\frac{1}{z}\right)^n\right] \\ &= \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} E(z \mid \infty) \end{aligned}$$

unmittelbar hervorgeht. Andererseits ist die Summe ihrer Ordnungszahlen für alle endlichen Stellen genau $= n$. Denkt man sich nämlich

$f(z)$ in seine gleichen oder verschiedenen Linearfaktoren zerlegt, so ergiebt sich aus der Darstellung

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)^{\nu_1}(z-\alpha_2)^{\nu_2}\cdots(z-\alpha_r)^{\nu_r} \qquad (\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_r=n)$$

für jede der r Nullstellen α_i eine Gleichung von der Form:

$$f(z) = (z-\alpha_i)^{\nu_i}E(z\,|\,\alpha_i), \qquad (i=1,2,\ldots r)$$

und aus dieser folgt, dafs $f(z)$ an der Stelle α_i die positive Ordnungszahl ν_i besitzt, dafs also in der That die Summe aller dieser Ordnungszahlen $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_r=n$ ist. Hieraus erhalten wir, zunächst für die ganzen Funktionen von z, den wichtigen Satz:

> Die Summe der Ordnungzahlen einer ganzen rationalen Funktion für alle endlichen Stellen und die unendlich ferne Stelle ist stets gleich Null.

Da nun jede gebrochene rationale Funktion als Quotient zweier ganzen Funktionen dargestellt werden kann und da die Ordnungszahl eines Quotienten für eine jede Stelle gleich der Differenz der Ordnungszahlen von Zähler und Nenner ist, so ist auch die Summe aller Ordnungszahlen einer beliebigen rationalen Funktion Z des Körpers $K(z)$ stets gleich Null.

§ 2.

Ordnet man jedem endlichen Werte $\alpha_0 = \xi + \eta i$ der Variabeln z den zugehörigen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ in der komplexen Zahlenebene $\mathfrak{E}$ zu, so erhält man genau ebenso viele und zwar alle im Endlichen liegenden Punkte dieser Ebene. Dagegen entspricht dem Werte $\alpha_0 = \infty$ bei dieser Zuordnung nicht ein einzelner Punkt, sondern alle unendlich fernen Punkte. Aus diesem Grunde hat man sich seit Riemann entschlossen, als Grundlage für die geometrische Repräsentation der Werte einer rationalen Funktion neben der unendlich ausgedehnten Horizontalebene $\mathfrak{E}$ die Oberfläche einer Kugel $\mathfrak{K}$ mit dem Durchmesser 1 zu wählen, auf welcher alle im Endlichen liegenden Punkte $\bar{\mathfrak{p}}_0$ jener Ebene durch eine einfache Konstruktion eindeutig abgebildet werden können, während allen unendlich fernen Punkten der Ebene nur ein einziger Punkt der Kugel entspricht. Zu diesem Zwecke ziehen wir einen beliebigen Durchmesser OO' der Kugel $\mathfrak{K}$ und bezeichnen den ersten Endpunkt O als den Nordpol, den zweiten O' als den Südpol derselben. Legt man nun diese Kugel mit O von der unteren Seite tangierend an den Koordinatenanfangspunkt der Horizontalebene $\mathfrak{E}$ und verbindet alsdann jeden Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ von $\mathfrak{E}$ mit dem Südpole O' durch eine gerade Linie, so schneidet jede dieser Verbindungslinien die Kugel in einem und nur einem

Punkte $\mathfrak{p}_0$, welche als das Bild von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ angesehen werden kann. Läfst man aber den Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ von $\mathfrak{E}$ auf irgend einem Wege ins Unendliche gehen, so wandert sein Bild $\mathfrak{p}_0$ auf der Kugel nach dem Südpole und fällt mit diesem zusammen, wenn $\bar{\mathfrak{p}}_0$ im Unendlichen liegt, denn wenn man irgend einen unendlich fernen Punkt der Ebene mit O' verbindet, so wird die Verbindungslinie eine Tangente in O', das Bild jenes Punktes fällt also mit O' zusammen. Es entspricht demnach jedem unendlich fernen Punkte der Horizontalebene der eine Punkt O', und dieser kann somit das Bild aller unendlich fernen Punkte der Horizontalebene genannt werden. Denkt man sich in O' eine Lichtquelle und die Kugel $\mathfrak{K}$ durchsichtig, so sind die Punkte $\bar{\mathfrak{p}}_0$ der Ebene $\mathfrak{E}$ einfach die Schatten ihrer Bilder $\mathfrak{p}_0$ auf der Kugel; das Bild einer geschlossenen Kurve auf der Horizontalebene ist dann eine geschlossene Kurve auf der Kugelfläche. Denkt man sich um einen beliebigen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ in $\mathfrak{E}$ eine kleine geschlossene Kurve beschrieben, so ist, falls jener Punkt im Endlichen liegt, das Bild der Kurve eine kleine geschlossene Kurve, welche das Bild von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ umgiebt; ist jene geschlossene Curve in $\mathfrak{E}$ speciell ein Kreis mit dem Mittelpunkte $\bar{\mathfrak{p}}_0$, so lehren die einfachsten geometrischen Betrachtungen, dafs ihr Bild auf der Kugel ebenfalls ein Kreis um $\mathfrak{p}_0$ ist. Denkt man sich endlich um den Anfangspunkt der Horizontalebene einen Kreis mit sehr grofsem Radius beschrieben, so ist sein Bild ein kleiner Kreis, welcher O', das Bild der unendlich fernen Punkte, umgiebt. Wir werden im folgenden immer direkt mit der Kugel $\mathfrak{K}$ und ihren Punkten $\mathfrak{p}_0$ operieren, nachdem wir diese ein für alle Male den Punkten $\bar{\mathfrak{p}}_0$ der Horizontalebene und damit den komplexen Zahlen $\alpha_0 = \xi + \eta i$ ein-

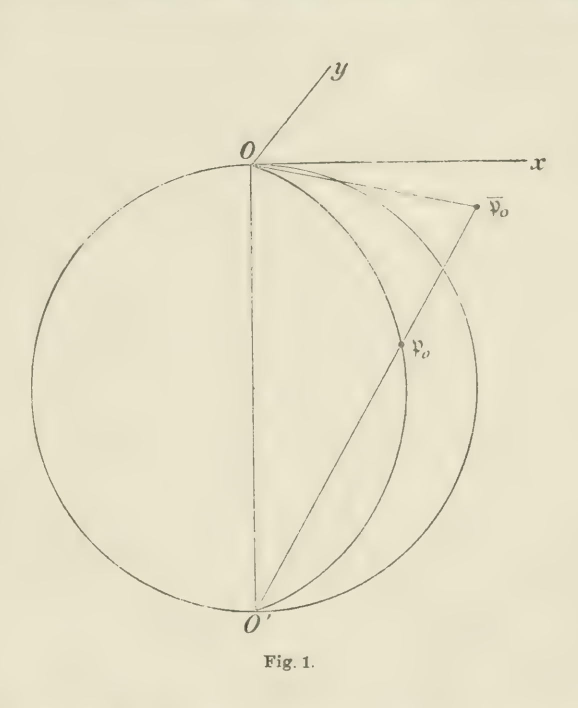


Fig. 1.

deutig zugeordnet haben. Eine beliebig gegebene Gröfse $Z = F(z)$ des Körpers $K(z)$ besitzt dann in jedem Punkte $\mathfrak{p}_0$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ eine ganz bestimmte Ordnungszahl ϱ, welche durch die Gleichung $Z = (z - \alpha_0)^\varrho E(z \mid \alpha_0)$ eindeutig fixiert ist.

Wir wollen nun jedem Punkte $\mathfrak{p}_0$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ einen „Divisor" zuordnen, welcher ebenfalls durch $\mathfrak{p}_0$ bezeichnet werden möge, und zwar soll die Teilbarkeit von Z im Bereiche von $\mathfrak{p}_0$ durch diesen Divisor durch den folgenden Satz charakterisiert werden:

Eine Funktion Z enthält im Bereiche von $\mathfrak{p}_0$ genau die ϱ^{te} Potenz des zugeordneten Divisors $\mathfrak{p}_0$ oder sie ist durch die Potenz $\mathfrak{p}_0^\varrho$ teilbar, wenn sie in dem zugehörigen Punkte $\mathfrak{p}_0$ die Ordnungszahl ϱ besitzt oder, was dasselbe ist, wenn Z in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{p}_0$ die Form hat

$$Z = (z - \alpha_0)^\varrho E(z \mid \alpha_0),$$

falls $z - \alpha_0$ den zu $\mathfrak{p}_0$ gehörigen Linearfaktor bedeutet.

Diese Definition gilt stets, mag ϱ positiv oder negativ oder Null sein, und mag der Punkt $\mathfrak{p}_0$ das Bild eines im Endlichen oder im Unendlichen liegenden Punktes der Horizontalebene sein; nur mufs im letzten Falle natürlich der Linearfaktor $z - \alpha_0$ durch den entsprechenden $\frac{1}{z}$ ersetzt werden. Ferner sieht man, dafs Z den Divisor $\mathfrak{p}_0$ dann und nur dann in einer positiven Potenz enthält, wenn Z in dem zugehörigen Punkte $\mathfrak{p}_0$ verschwindet, dagegen ist Z durch eine negative Potenz von $\mathfrak{p}_0$ teilbar, wenn jene Funktion in $\mathfrak{p}_0$ unendlich wird; endlich reduziert sich Z in $\mathfrak{p}_0$ auf eine endliche von Null verschiedene Konstante, wenn Z genau durch die nullte Potenz von $\mathfrak{p}_0$ divisibel ist. Man erkennt ferner, dafs es genau ebensoviele Divisoren $\mathfrak{p}_0$ giebt, wie Punkte $\mathfrak{p}_0$ auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ vorhanden sind. Die so definierten Divisoren $\mathfrak{p}_0$ besitzen nun hinsichtlich der Funktionen Z alle Eigenschaften der Primzahlen in der gewöhnlichen Zahlentheorie, und zwar beruht dies auf dem folgenden selbstverständlichen Satze:

Ein Produkt ZZ' ist nur dann durch einen Divisor $\mathfrak{p}_0$ teilbar, wenn mindestens einer seiner beiden Faktoren $\mathfrak{p}_0$ enthält.

Soll nämlich für $z = \alpha_0$ das Produkt ZZ' verschwinden, so mufs mindestens einer der beiden Faktoren gleich Null sein, oder was dasselbe ist, den Divisor $\mathfrak{p}_0$ enthalten. Aus diesem Grunde werden wir die Divisoren $\mathfrak{p}_0$ mitunter auch als Primfaktoren bezeichnen.

Zwei Funktionen Z, Z' sollen für den Divisor $\mathfrak{p}_0^\varrho$ kongruent heifsen, wenn ihre Differenz $Z - Z'$ mindestens durch $\mathfrak{p}_0^\varrho$ teilbar, wenn also $Z - Z'$ an der zugeordneten Stelle $\mathfrak{p}_0$ der Kugelfläche

mindestens von der ϱ^{ten} Ordnung ist. Es sei nun eine Funktion Z an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ genau von der ϱ^{ten} Ordnung; dann reduziert sich der Quotient $\frac{Z}{(z-\alpha_0)^\varrho}$ für $z=\alpha_0$ auf eine endliche, von Null verschiedene Konstante A_ϱ, welche durch Entwicklung von Zähler und Nenner jenes Quotienten nach Potenzen von $z-\alpha_0$ gefunden werden kann; diese Eigenschaft soll durch die Gleichung

$$\left(\frac{Z}{(z-\alpha_0)^\varrho}\right)_{\mathfrak{p}_0} = A_\varrho$$

ausgedrückt werden. Hieraus ergiebt sich sofort, dafs sich der Quotient

$$\frac{Z - A_\varrho (z-\alpha_0)^\varrho}{(z-\alpha_0)^\varrho}$$

für $z=\alpha_0$ auf $A_\varrho - A_\varrho = 0$ reduziert, dafs also die im Zähler stehende Differenz eine rationale Funktion ist, welche in $\mathfrak{p}_0$ mindestens von der $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Mit Hülfe der soeben gegebenen Definition kann diese Thatsache durch die Kongruenz

$$Z \equiv A_\varrho (z-\alpha_0)^\varrho \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}_0^{\varrho+1})$$

ausgedrückt werden. Behandelt man jetzt die rationale Funktion $Z - A_\varrho(z-\alpha_0)^\varrho$, welche den Divisor $\mathfrak{p}_0^{\varrho+1}$ enthält, genau ebenso wie vorher die durch $\mathfrak{p}_0^\varrho$ teilbare Funktion Z selbst, so ergiebt sich die weitere Kongruenz

$$Z \equiv A_\varrho(z-\alpha_0)^\varrho + A_{\varrho+1}(z-\alpha_0)^{\varrho+1} \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}_0^{\varrho+2}),$$

und durch analoges Fortschliefsen erhält man allgemein für jede noch so hohe Potenz $\mathfrak{p}_0^M$ die Kongruenz

$$Z \equiv A_\varrho(z-\alpha_0)^\varrho + A_{\varrho+1}(z-\alpha_0)^{\varrho+1} + \cdots + A_{M-1}(z-\alpha_0)^{M-1} \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}_0^M),$$

in welcher die konstanten Koeffizienten $A_\varrho, A_{\varrho+1}, \ldots, A_{M-1}$ auf die angegebene Weise direkt gefunden werden können. Jede rationale Funktion Z des Körpers $K(z)$ kann also für eine beliebig hohe Potenz $\mathfrak{p}_0^M$ als Modul in eine Potenzreihe entwickelt werden, welche nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors $z-\alpha_0$ $\left(\text{bezw. } \frac{1}{z}\right)$ fortschreitet und höchstens eine endliche Anzahl negativer Glieder besitzt.

Diese Entwickelung ist offenbar eindeutig. Bestände nämlich für Z eine zweite Kongruenz:

$$Z \equiv A'_\sigma(z-\alpha_0)^\sigma + A'_{\sigma+1}(z-\alpha_0)^{\sigma+1} + \cdots + A'_{M-1}(z-\alpha_0)^{M-1} \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}_0^M),$$

so würde unter der Voraussetzung $\sigma \leqq \varrho$ die Subtraktion der ersten von der zweiten die weitere Kongruenz

$$0 \equiv (A'_\sigma - A_\sigma)(z - \alpha_0)^\sigma + \cdots \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}_0^{\nu'})$$

ergeben, in welcher, falls $\sigma < \varrho$ ist, die Koeffizienten $A_\sigma, \ldots, A_{\varrho-1}$ der ersten Entwickelung durch 0 zu ersetzen sind, und diese Kongruenz kann offenbar nur dann erfüllt sein, wenn allgemein $A'_i = A_i$ ist, wenn also die beiden Entwickelungen identisch sind. Die hiermit als eindeutig erwiesene Entwickelung soll die Entwickelung von Z für die Stelle $\mathfrak{p}_0$ heifsen, und wir können nunmehr sagen: Z besitzt in $\mathfrak{p}_0$ die Ordnung ϱ, wenn die zu jener Stelle gehörige Entwickelung mit $(z - \alpha_0)^\varrho$ beginnt.

Ist für die betrachtete Stelle die Ordnungszahl negativ, so beginnt die Entwickelung von Z für diese Stelle mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen. Das Aggregat dieser Potenzen,

$$\frac{A_{-\varrho}}{(z-\alpha_0)^\varrho} + \frac{A_{-(\varrho-1)}}{(z-\alpha_0)^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z-\alpha_0},$$

bezw. für $\alpha_0 = \infty$:

$$A_{-\varrho} z^\varrho + A_{-(\varrho-1)} z^{\varrho-1} + \cdots + A_{-1} z,$$

soll der „Hauptteil“ der Funktion für die betrachtete Stelle genannt werden. Dieser ist für eine ganze Funktion offenbar gleich Null, falls α_0 endlich ist, für die Stelle $\alpha_0 = \infty$ dagegen fällt er mit der Funktion selbst nach Weglassung ihres konstanten Gliedes zusammen.

§ 3.

Die für die Funktion Z gegebene Entwickelung hat noch eine andere Bedeutung. Wird sie nämlich genügend weit fortgesetzt, so konvergiert sie innerhalb einer gewissen endlichen Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}_0$ auf der Kugelfläche und stellt den Wert der rationalen Funktion Z mit jeder vorgegebenen Genauigkeit für alle diejenigen Punkte $\mathfrak{p}$ der Kugelfläche dar, welche in jenem um $\mathfrak{p}_0$ abgegrenzten Konvergenzbereiche gelegen sind. Zum Beweise nehmen wir Z wieder in der Form

$$1)\qquad \begin{cases} Z = (z-\alpha_0)^\varrho \dfrac{a_0 + a_1(z-\alpha_0) + \cdots + a_\mu (z-\alpha_0)^\mu}{b_0 + b_1(z-\alpha_0) + \cdots + b_\nu (z-\alpha_0)^\nu} \\ \quad = (z-\alpha_0)^\varrho \dfrac{f(z)}{g(z)} \end{cases}$$

an, wo $f(z)$ und $g(z)$ in $\mathfrak{p}_0$ nicht verschwinden, so dafs

$$a_0 = f(\alpha_0) \quad \text{und} \quad b_0 = g(\alpha_0)$$

beide von Null verschieden sind. Diesen Bruch können wir aber in der Form schreiben:

$$\text{1a)} \qquad Z = \frac{(z-\alpha_0)^\varrho}{b_0} \frac{a_0 + a_1(z-\alpha_0) + \cdots + a_\mu(z-\alpha_0)^\mu}{1-Z_0},$$

indem wir

$$\text{1b)} \qquad Z_0 = -\frac{b_1(z-\alpha_0) + b_2(z-\alpha_0)^2 + \cdots + b_\nu(z-\alpha_0)^\nu}{b_0}$$

setzen. Aus dieser Darstellung (1a) folgt für alle Werte von z, für welche $|Z_0| < 1$ ist, dafs:

$$Z = \frac{(z-\alpha_0)^\varrho}{b_0}(a_0 + \cdots + a_\mu(z-\alpha_0)^\mu)(1 + Z_0 + Z_0^2 + \cdots)$$

ist, und die rechte Seite kann somit in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden, welche für diese Werte der Variabeln den Wert von Z darstellt. Ordnet man nun Z nach steigenden Potenzen von $z - \alpha_0$, was ja gestattet ist, so erhält man modulo $\mathfrak{p}_0^M$ eine nach Potenzen von $z - \alpha_0$ fortschreitende Potenzreihe, und diese mufs, da es nur eine solche giebt, mit der vorher gefundenen übereinstimmen.

Durch die Bedingung $|Z_0| < 1$ wird aber auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ stets ein endlicher Bereich um den betrachteten Punkt $\mathfrak{p}_0$ abgegrenzt. In der That folgt nämlich aus der Relation

$$|Z_0| \leqq \frac{|b_1| \cdot |z-\alpha_0| + |b_2| \cdot |z-\alpha_0|^2 + \cdots + |b_\nu| \cdot |z-\alpha_0|^\nu}{|b_0|},$$

wenn $|z - \alpha_0| = \varrho_0$, $|b_0| = \beta_0$ gesetzt und mit β eine Zahl bezeichnet wird, welche gröfser ist, als die gröfste der Zahlen $|b_0|, |b_1|, |b_2|, \ldots, |b_\nu|$,

$$|Z_0| < \frac{\beta(\varrho_0 + \varrho_0^2 + \cdots + \varrho_0^\nu)}{\beta_0},$$

und hieraus für $\varrho_0 < 1$:

$$|Z_0| < \frac{\beta}{\beta_0} \cdot \frac{\varrho_0}{1-\varrho_0};$$

die Bedingung $|Z_0| < 1$ ist daher erfüllt, wenn $\varrho_0 \leqq \frac{\beta_0}{\beta + \beta_0}$, also a fortiori, wenn:

$$\varrho_0 < \frac{\beta_0}{2\beta}$$

angenommen wird, und wegen $\beta > \beta_0$ ist dann von selbst $\varrho_0 < 1$. Für jede im Endlichen liegende Stelle α_0 wird nun durch die Bedingung

$$\text{2)} \qquad |z - \alpha_0| < \frac{\beta_0}{2\beta}$$

eine endliche Umgebung auf der Horizontalebene $\mathfrak{E}$, mithin auch auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ abgegrenzt, innerhalb deren also jene Entwickelung

von Z den Wert dieser Funktion für jeden Nachbarpunkt darstellt. Für $\alpha_0 = \infty$ dagegen bestimmt sich durch die Bedingung

$$\text{2a)} \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{\beta_0}{2\beta} \qquad R = |z| > \frac{2\beta}{\beta_0}$$

der Radius R eines um den Anfangspunkt der Horizontalebene beschriebenen grofsen Kreises, aufserhalb dessen die zugehörige Entwickelung, wie im vorigen Falle, gleichmäfsig konvergiert und den Wert der Funktion darstellt; da aber das Bild dieses grofsen Kreises ein den Südpol O' der Kugel $\mathfrak{K}$ umgebender kleiner Kreis, also ein Bereich des Punktes O' ist, so ist die Behauptung in vollem Umfange bewiesen.

Da eine konvergente Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzbereiches eine stetige und differenzierbare Funktion ihres Argumentes ist, so ergiebt sich der Satz:

> Jede rationale Funktion von z ist innerhalb einer endlichen Umgebung einer beliebigen Stelle $(z = \alpha)$ eine stetige und differenzierbare Funktion ihres Argumentes.

Umgiebt man auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ die Nullstellen und die Pole einer rationalen Funktion Z durch beliebig kleine Kreise, und bezeichnet man den nach Weglassung jener kleinen Kreisflächen übrigbleibenden Teil der Kugelfläche durch $\bar{\mathfrak{K}}$, so sind die beiden Funktionen Z und $\frac{1}{Z}$ in dem ganzen Gebiete $\bar{\mathfrak{K}}$ endlich und stetig; ihr absoluter Betrag bleibt also innerhalb $\bar{\mathfrak{K}}$ unter einer endlichen Grenze.

> Innerhalb dieses Gebietes $\bar{\mathfrak{K}}$ bleibt demnach der absolute Betrag der rationalen Funktion Z unterhalb einer oberen endlichen Grenze G und er liegt oberhalb einer positiven unteren Grenze g.

Der Radius ϱ_0 für den zu einer Stelle $\bar{\mathfrak{p}}_0$ $(z = \alpha_0)$ gehörigen Konvergenzkreis besitzt also stets eine bestimmte angebbare Gröfse, ändert sich aber, wenn sich der Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ auf der Horizontalebene, oder sein Bild $\mathfrak{p}_0$ auf der Kugelfläche fortbewegt, und es kann der Fall eintreten, dafs ϱ_0 unbegrenzt abnimmt, wenn sich $\bar{\mathfrak{p}}_0$ einer Grenzlage $\bar{\mathfrak{p}}$ mehr und mehr annähert. Wir werden zeigen, dafs dieser Ausnahmefall in der That, aber nur bei Annäherung an diejenigen Punkte $\bar{\mathfrak{p}}$ eintreten kann, welche den im Endlichen liegenden Polen der betrachteten Funktion Z und eventuell auch dem unendlich fernen Punkte entsprechen, dafs dagegen für jene Grenzpunkte $\bar{\mathfrak{p}}$ selbst der Konvergenzkreis wieder eine endliche Gröfse besitzt.

Wir beschreiben zu diesem Zwecke um den Anfangspunkt O der Horizontalebene $\mathfrak{E}$ einen Kreis $K(R)$ mit einem beliebig grofsen Radius R, der jedenfalls so grofs gewählt ist, dafs sich alle im Endlichen gelegenen Pole von Z innerhalb $K(R)$ befinden. Ferner beschreiben wir um jeden dieser Pole $\bar{\mathfrak{p}}$ von Z einen Kreis $K(\delta)$ mit beliebig kleinem Radius $\bar{\delta}$, und betrachten nun alle Punkte $\bar{\mathfrak{p}}_0$ desjenigen Teiles von $K(R)$, welcher nach Weglassung der kleinen Kreise $K(\bar{\delta})$ aber bei Hinzurechnung ihrer Mittelpunkte $\bar{\mathfrak{p}}$ übrig bleibt. Dieses Gebiet, bezeichnen wir mit $\bar{K}(R, \bar{\delta})$; man erkennt leicht, dafs es bei genügender Vergröfserung von R und Verkleinerung von δ jeden Punkt der Horizontalebene enthalten kann. Wir zeigen dann,

> dafs für jeden Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ dieses Gebietes $\bar{K}(R, \bar{\delta})$ die Entwickelung von Z innerhalb eines Kreises konvergiert, dessen Radius oberhalb einer für das ganze Gebiet gleichbleibenden unteren Grenze $\bar{\varrho}$ liegt.

Da der Konvergenzradius ϱ_0 für jede endliche Stelle $\bar{\mathfrak{p}}_0$ oberhalb der Grenze $\frac{\beta_0}{2\beta}$ liegt, brauchen wir zu diesem Zwecke nur nachzuweisen, dafs für alle Stellen jenes Gebietes $\bar{K}(R, \bar{\delta})$ der Nenner β unterhalb einer endlichen Grenze $\bar{\beta}$, der Zähler β_0 aber oberhalb einer endlichen Grenze $\bar{\beta}_0$ liegt, denn dann ist ja stets $\varrho_0 > \frac{\bar{\beta}_0}{2\bar{\beta}}$.

Nun liegen für einen beliebigen Punkt $(z = \alpha_0)$ im Innern des grofsen Kreises $K(R)$ die absoluten Beträge $|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_\nu|$ von den Entwickelungskoeffizienten der ganzen Funktion $g(z)$ in (1) nach Potenzen von $z - \alpha_0$ offenbar wirklich unterhalb einer und derselben endlichen oberen Grenze $\bar{\beta}$, denn dieselben haben ja endliche Werte, wo auch α_0 innerhalb $K(R)$ angenommen wird. Ist ferner für den betrachteten Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ $(z = \alpha_0)$ wieder:

$$Z = (z - \alpha_0)^\varrho \frac{f(z)}{g(z)},$$

wo weder $g(z)$ noch $f(z)$ in $\bar{\mathfrak{p}}_0$ verschwinden, und ist:

$$g(z) = (z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \cdots (z - \gamma_\nu)$$

die Zerlegung des Nenners in seine gleichen oder verschiedenen Linearfaktoren, so ist für das Anfangsglied der Entwickelung von $g(z)$ nach Potenzen von $z - \alpha_0$ offenbar:

$$\beta_0 = |b_0| = |g(\alpha_0)| = |b_\nu| \, |\alpha_0 - \gamma_1| \, |\alpha_0 - \gamma_2| \cdots |\alpha_0 - \gamma_\nu| \geq |b_\nu| \, |\alpha_0 - \gamma_1|^\nu,$$

wenn $z = \gamma_1$ derjenigen Nullstelle von $g(z)$, also demjenigen Pole von Z entspricht, welcher dem betrachteten Punkte $\bar{\mathfrak{p}}_0$ am nächsten liegt,

und wo der Koeffizient b_ν in (1) offenbar für jede endliche Stelle $(z = \alpha_0)$ denselben Wert hat.

Liegt aber $\bar{\mathfrak{p}}_0$ innerhalb des Gebietes $\bar{K}(R, \bar{\delta})$, so ist seine Entfernung von dem nächsten Pole sicher gröſser als $\bar{\delta}$, d. h. es ist für jeden Punkt jenes Gebietes

$$\beta_0 > \bar{\beta}_0,$$

wenn $\bar{\beta}_0$ eine Zahl bedeutet, welche kleiner als $|b_\nu|\bar{\delta}^\nu$ ist. Damit ist also unsere Behauptung vollständig erwiesen.

Bilden wir das Gebiet $K(R, \bar{\delta})$ nunmehr auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ ab, so entspricht dem Innern eines jeden Kreises $K(\bar{\delta})$ um einen Pol $\bar{\mathfrak{p}}$ das Innere eines Kreises $K(\delta)$ von beliebig kleiner Gröſse auf $\mathfrak{K}$, dessen Mittelpunkt das Bild jenes Pols ist; und dem Äuſseren des beliebig groſsen Kreises $K(R)$ in der Ebene entspricht das Innere eines beliebig kleinen Kreises, welcher den Südpol, oder den unendlich fernen Punkt O' von $\mathfrak{K}$ umgiebt. So ergiebt sich der folgende Fundamentalsatz:

> Der Konvergenzradius für die Entwickelung einer rationalen Funktion Z von z liegt für alle Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ oberhalb einer und derselben endlichen Grenze $\bar{\varrho}$, wenn man beliebig kleine Umgebungen der Pole von Z und des unendlich fernen Punktes ausschlieſst.

Hier wie stets im folgenden soll unter der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{p}$ der Kugelfläche die Gesamtheit aller Nachbarpunkte verstanden werden, deren auf der Kugel gemessene Entfernung von $\mathfrak{p}$ eine gegebene kleine Gröſse nicht überschreitet; in allen Fällen soll aber der Punkt $\mathfrak{p}$ selbst nicht seiner Umgebung zugerechnet werden.

Analog verstehen wir unter der Umgebung mehrerer Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$, oder des Punktsystemes $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h)$ die Gesamtheit aller Punkte, welche einem von diesen Punkten $\mathfrak{p}_i$ benachbart sind.

Zweite Vorlesung.

Untersuchung der rationalen Funktionen auf der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{K}$. — Die Divisoren. — Ihre Analogie mit den Divisoren der Zahlentheorie. — Die den Funktionen des Körpers zugehörigen Divisoren. — Die Zerlegung der rationalen Funktionen in Partialbrüche. — Fundamentalsätze aus der Theorie der analytischen Funktionen. — Funktionenelement. — Analytische Fortsetzung. — Eindeutige und mehrdeutige Funktionen. — Grenzstellen. — Ein Satz über die Koeffizienten der Potenzreihen. — Der wahre Konvergenzbereich für das Element einer analytischen Funktion. — Die charakteristische Eigenschaft der Funktionen des Körpers $K(z)$.

§ 1.

Nachdem wir in den beiden vorigen Abschnitten die rationalen Funktionen von z in der Umgebung eines einzelnen Punktes betrachtet haben, wollen wir nun ihr Verhalten auf der ganzen Kugelfläche untersuchen und möglichst einfach beschreiben. Zu diesem Zwecke führen wir die sog. Divisoren ein, welche besonders für die Theorie der algebraischen Funktionen von grundlegender Bedeutung sind.

Es seien:

1) $$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$$

irgend welche Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, und in gleicher Weise mögen die zugehörigen Primfaktoren bezeichnet werden. Ferner seien

1a) $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$$

beliebige ganzzahlige Exponenten, welche positiv, negativ oder auch Null sein können. Dann soll das Produkt:

2) $$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{p}_h^{\lambda_h}$$

der Primdivisorpotenzen $\mathfrak{p}_i^{\lambda_i}$ ein Divisor genannt werden, und die Summe der Exponenten von $\mathfrak{q}$

2a) $$l = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_h$$

soll die Ordnung dieses Divisors heißen.

Wir betrachten jetzt eine Funktion Z des Körpers in der Umgebung der Punkte $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h)$ und stellen für die Teilbarkeit derselben durch den Divisor $\mathfrak{q}$ die folgende Definition auf:

> Eine Funktion Z ist im Bereiche des Punktsystemes $(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h)$ durch den Divisor $\mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{p}_h^{\lambda_h}$ teilbar, wenn sie in dem Punkte $\mathfrak{p}_1$ mindestens die Ordnungszahl λ_1, im Punkte $\mathfrak{p}_2$ mindestens die Ordnungszahl λ_2 besitzt u. s. w., während ihr Verhalten in den übrigen Punkten der Kugelfläche ganz beliebig sein kann.

Diese Festsetzung stimmt wörtlich mit der allgemeinsten Definition der Teilbarkeit überein, welche in der elementaren Zahlentheorie gegeben wird. Hier beschäftigen wir uns mit der Gesamtheit oder dem „Körper“ aller rationalen Zahlen, und zwar kommt man auch hier erst dann zu wirklich einfachen und allgemeinen Resultaten, wenn man von vorn herein nicht bloſs, wie dies gewöhnlich geschieht, die ganzen, sondern gleich auch die gebrochenen Zahlen mit berücksichtigt. An die Stelle der Primfaktoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$, welche den Punkten der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ entsprechen, treten in der Arithmetik die Primzahlen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ der natürlichen Zahlenreihe. Auch hier existieren unendlich viele Primfaktoren, und man kann ein beliebiges Produkt

$$\mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{p}_h^{\lambda_h}$$

von beliebig vielen gleichen oder verschiedenen Primfaktoren zu einem Divisor $\mathfrak{q}$ zusammenfassen. Eine rationale Zahl R heiſst dann durch den Divisor $\mathfrak{q}$ teilbar, wenn sie allgemein den Primfaktor $\mathfrak{p}_i$ mindestens in der λ_i^{ten} Potenz enthält, oder wenn der Quotient $\frac{R}{\mathfrak{q}}$ keinen der h Primfaktoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$ in einer negativen Potenz enthält, während er sonst sehr wohl auch andere Primfaktoren in negativen Potenzen enthalten kann. Ist der Divisor $\mathfrak{q}$ speziell ganz, also keiner der Exponenten λ_i negativ, so fällt unsere Definition zusammen mit der folgenden:

> Ein rationaler Bruch R ist durch einen ganzzahligen Divisor $\mathfrak{q}$ teilbar, wenn der Zähler von R im gewöhnlichen Sinne durch $\mathfrak{q}$ divisibel ist.

In der Theorie der algebraischen Funktionen werden wir die Divisoren für sich neben den Funktionen Z betrachten; wir könnten dasselbe schon an dieser Stelle thun; wir wollen hier aber nur diejenigen Divisoren genau betrachten, welche den rationalen Funktionen Z von z entsprechen, und die diese bis auf eine multiplikative Konstante vollständig bestimmen.

Jede rationale Funktion Z des Körpers $K(z)$ enthält nämlich nur eine endliche Anzahl von Primfaktoren in einer von Null verschiedenen positiven oder negativen Potenz, nämlich alle und nur die, welche den Nullstellen und den Polen von Z entsprechen. Es seien

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$$

alle jene Stellen und

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$$

die zugehörigen positiven oder negativen Ordnungszahlen. Dann können wir Z den „zugehörigen Divisor"

$$\mathfrak{q}_Z = \mathfrak{p}_1^{\varrho_1} \mathfrak{p}_2^{\varrho_2} \ldots \mathfrak{p}_h^{\varrho_h}$$

zuordnen, denn durch Angabe des Divisors $\mathfrak{q}_Z$ ist die rationale Funktion Z bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt. In der That, gehörte zu den beiden voneinander verschiedenen rationalen Funktionen Z und $\bar{Z}$ derselbe Divisor $\mathfrak{q}$, so würde zu dem Quotienten $\frac{Z}{\bar{Z}}$ der Divisor $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}} = 1$ gehören, d. h. jener Quotient wäre eine rationale Funktion, welche auf der ganzen Kugelfläche keine Nullstelle und keinen Pol besäſse, und eine solche ist notwendigerweise eine von Null verschiedene Konstante C, wie aus der Darstellung der rationalen Funktion in Bruchform sofort hervorgeht.

Will man die Funktion Z durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{q}_Z$ vollständig bestimmen, so kann man dies folgendermaſsen erreichen: Unter allen zu $\mathfrak{q}_Z$ gehörigen Funktionen CZ, welche sich nur durch multiplikative Konstanten unterscheiden, greife man diejenige heraus, deren Entwickelung für einen beliebigen, aber ein für alle Male fest angenommenen Punkt, z. B. für den Nordpol O $(z=0)$, als Koeffizienten des Anfangsgliedes die Zahl 1 besitzt, und bezeichne diese durch $\mathfrak{q}_Z$. Alsdann kann man jede andere zu dem Divisor $\mathfrak{q}_Z$ gehörige Funktion durch $C\mathfrak{q}_Z$ bezeichnen, wenn C ihren Anfangskoeffizienten für die Stelle $(z=0)$ bedeutet.

Da die Anzahl der Nullstellen für jede Funktion Z gleich der ihrer Pole ist, so ist für jeden zugehörigen Divisor $\mathfrak{q}_Z$ die Ordnung

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_h = 0$$

und umgekehrt zeigt man leicht, daſs jedem Divisor $\mathfrak{q}$ von der nullten Ordnung eine Funktion Z des Körpers $K(z)$ zugehört. Entsprechen nämlich alle Primfaktoren endlichen Punkten und sind:

$$z - \alpha_1, \quad z - \alpha_2, \ldots, z - \alpha_h$$

die zu $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h$ gehörigen Linearfaktoren, so ist

$$Z = (z - \alpha_1)^{\varrho_1} (z - \alpha_2)^{\varrho_2} \cdots (z - \alpha_h)^{\varrho_h}$$

die zu $\mathfrak{q}$ gehörige Funktion, da sie wegen $\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_h = 0$ im unendlich fernen Punkte weder eine Nullstelle noch einen Pol besitzt. Ist dagegen etwa $\mathfrak{p}_h$ der unendlich ferne Punkt, so gehört zu $\mathfrak{q}$ die Funktion

$$Z = (z - \alpha_1)^{\varrho_1} (z - \alpha_2)^{\varrho_2} \cdots (z - \alpha_{h-1})^{\varrho_{h-1}},$$

denn diese ist für $z = \infty$ von der Ordnung

$$-(\varrho_1 + \cdots + \varrho_{h-1}) = + \varrho_h.$$

Für die algebraischen Funktionen ist dasselbe nicht mehr der Fall, und ebenso entspricht auch schon im Gebiete der rationalen Funktionen einem Divisor $\mathfrak{q}$ von positiver oder negativer Ordnungszahl keine Funktion des Körpers mehr. Wir werden auf diese allgemeineren Divisoren später genau eingehen.

Es ist leicht, für eine beliebig gegebene rationale Funktion den zugeordneten Divisor zu finden; so entspricht z. B. der Funktion:

$$Z = \frac{z^2(z-1)}{(z-2)^7} \quad \text{der Divisor} \quad \frac{1}{2^7} \cdot \mathfrak{p}_0^2 \, \mathfrak{p}_1 \, \mathfrak{p}_2^{-7} \, \mathfrak{p}_\infty^4,$$

wenn die Primteiler $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_\infty$ den Stellen $(z = 0, z = 1, z = 2, z = \infty)$ zugehören, denn in der Umgebung des Nordpoles $(z = 0)$ besitzt die Entwickelung des Quotienten:

$$Z = \frac{-z^2 + z^3}{-2^7 + \cdots} = \frac{1}{2^7} z^2 + \cdots$$

offenbar den Anfangskoeffizienten $\frac{1}{2^7}$. Ferner gehört z. B. zu der ganzen Funktion n^{ten} Grades

$$Z = f(z) = (z = \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$$

offenbar der Divisor

$$\mathfrak{p}_{\alpha_1} \mathfrak{p}_{\alpha_2} \cdots \mathfrak{p}_{\alpha_n} \mathfrak{p}_\infty^{-n},$$

wenn allgemein unter $\mathfrak{p}_{\alpha_i}$ derjenige Primfaktor verstanden wird, welcher der Stelle $(z = \alpha_i)$ entspricht.

Aufser dieser Bestimmung einer rationalen Funktion durch den zugehörigen Divisor oder, was dasselbe ist, durch ihre Nullstellen und Pole, mufs noch auf eine andere Art der Darstellung jener Funktionen, nämlich auf ihre Zerlegung in Partialbrüche hingewiesen werden, bei welcher ihre Pole sowie die zugehörigen Hauptteile allein als gegeben vorausgesetzt werden. Es seien

$$\mathfrak{p}_1^{\varrho_1}, \mathfrak{p}_2^{\varrho_2}, \ldots, \mathfrak{p}_k^{\varrho_k}$$

alle in dem Nenner von Z auftretenden Divisorenpotenzen, und es sei allgemein

$$H_i(z) = \frac{A^{(i)}_{-\varrho_i}}{(z - \alpha_i)^{\varrho_i}} + \cdots + \frac{A^{(i)}_{-1}}{z - \alpha_i}$$

der zu $\mathfrak{p}_i^{\varrho_i}$ gehörige Hauptteil. Alsdann ist z. B. $H_1(z)$ für sich betrachtet eine rationale Funktion, deren Nenner nur die Potenz $\mathfrak{p}_1^{\varrho_1}$ besitzt, und die Differenz

$$Z - H_1(z)$$

ist eine Funktion, welche in $\mathfrak{p}_1$ nicht mehr unendlich grofs wird, die aber, da sich $H_1(z)$ an allen übrigen Stellen regulär verhält, in den Punkten $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ dieselben Hauptteile besitzt wie Z selbst. Hieraus folgt, dafs die Differenz

$$Z - [H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_k(z)]$$

eine rationale Funktion von z ist, welche auf der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ keinen Pol besitzt, also eine Konstante A_0 sein mufs. Man erhält somit die folgende Darstellung einer beliebigen rationalen Funktion Z:

$$\begin{aligned} Z &= A_0 + H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_k(z) \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_{-1}^{(i)}}{z - \alpha_i} + \cdots + \frac{A_{-\varrho_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{\varrho_i}} \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Für den Fall, dafs eine jener Stellen, z. B. $\mathfrak{p}_k$, die unendlich ferne Stelle ist, wird der ihr zugehörige Hauptteil eine ganze Funktion $A_1 z + \cdots + A_\varrho z^\varrho$, und man erhält alsdann die gewöhnliche Formel für die Zerlegung einer rationalen Funktion Z in Partialbrüche:

$$Z = G(z) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{r_i=1}^{\varrho_i} \frac{A_{-r_i}^{(i)}}{(z - \alpha_i)^{r_i}}, \tag{3a}$$

wo $G(z)$ eine ganze Funktion bedeutet.

Aus der identischen Gleichung (3) folgt ein zweiter sehr einfacher Beweis des schon oben a. S. 8 flg. hergeleiteten Satzes, dafs jede rationale Funktion Z in der Umgebung einer beliebigen regulären oder irregulären Stelle $\mathfrak{p}_0$ $(z = \alpha_0)$ der Kugelfläche in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann, deren Konvergenzkreis durch den nächsten Pol von Z hindurchgeht.

Da nämlich nach (3) Z als Summe einer endlichen Anzahl von einfachen Summanden:

$$\frac{A}{(z - \alpha)^\varrho}$$

darstellbar ist, wenn die Stelle $\mathfrak{p}$ $(z = \alpha)$ je einem der Pole entspricht, so braucht der Beweis nur für eine solche einfache Funktion geführt zu werden. Nun besteht aber für diese Funktion, sobald $\mathfrak{p}_0$ eine endliche Stelle ist und

$$\left| \frac{z - \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \right| < 1 \qquad | z - \alpha_0 | < | \alpha - \alpha_0 | \tag{4}$$

ist, in der Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ die Entwickelung:

$$\frac{A}{(z-\alpha)^\varrho} = \frac{A}{(\alpha_0-\alpha)^\varrho} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{z-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}\right)^\varrho} = \frac{A}{(\alpha_0-\alpha)^\varrho}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}\right)^k\right]^\varrho,$$

und diese Reihe konvergiert wegen (4) innerhalb des um $\mathfrak{p}_0$ beschriebenen Kreises, dessen Peripherie durch $\mathfrak{p}$ hindurchgeht. Denkt man sich alle Glieder von (3) in gleicher Weise entwickelt und die bezüglichen Reihen vereinigt, so ergiebt sich die Reihe für Z, welche innerhalb des gemeinsamen Bereiches aller Partialreihen konvergiert, d. h. für den um $\mathfrak{p}_0$ beschriebenen Kreis, dessen Peripherie durch den nächsten Pol von Z hindurchgeht.

Ist der zu untersuchende Punkt $\mathfrak{p}_0$ speziell der Südpol O' $(z=\infty)$, so besteht genau derselbe Satz, denn für jeden Partialbruch ist

$$\frac{1}{(z-\alpha)^\varrho} = \frac{1}{z^\varrho}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)^\varrho} = \frac{1}{z^\varrho}\left(1+\frac{\alpha}{z}+\frac{\alpha^2}{z^2}+\cdots\right)^\varrho,$$

sobald $\left|\frac{\alpha}{z}\right| < 1$ also $|z| > |\alpha|$ ist. Die Entwickelung in der Umgebung des unendlich fernen Punktes oder des Südpoles gilt also innerhalb des um O' beschriebenen Kreises, dessen Peripherie durch den nächsten Pol von Z hindurchgeht.

§ 2.

Durch die Ergebnisse des vorigen Abschnittes haben wir die analytische Eigenschaft der rationalen Funktionen kennen gelernt, dafs sie auf der ganzen Kugelfläche nur eine endliche Anzahl polarer Unstetigkeiten besitzen und für jeden anderen Punkt derselben in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickelt werden können. Es soll jetzt nachgewiesen werden, dafs diese Eigenschaft für die Funktionen Z des Körpers $K(z)$ charakteristisch ist, dafs also jede Funktion, welcher diese Eigenschaft zukommt, auch stets eine rationale Funktion von z ist. Zu diesem Zwecke mufs aber zunächst an einige Sätze aus der Theorie der analytischen Funktionen erinnert werden, von welchen wir im folgenden häufig Gebrauch zu machen haben.

Ist eine Funktion $f(z)$ der komplexen Variabeln z, für eine gewisse endliche Stelle $(z=\alpha_0)$ in eine Potenzreihe

$$f(z \mid \alpha_0) = a_0 + a_1(z-\alpha_0) + a_2(z-\alpha_0)^2 + \cdots$$

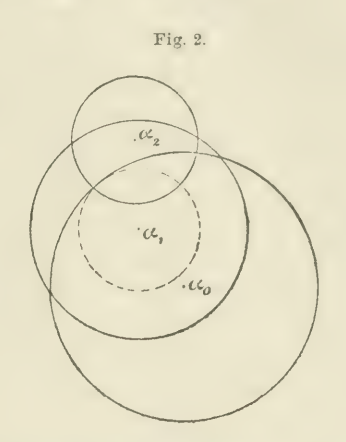
entwickelbar, die für eine endliche, wenn auch noch so kleine Umgebung $|z-\alpha_0| < \varrho_0$ jener Stelle konvergiert, so heifst $f(z \mid \alpha_0)$ ein Element der analytischen Funktion $f(z)$ für die Stelle $(z=\alpha_0)$. Ist nun α_1 irgend eine andere Stelle innerhalb des Kon-

vergenzbereiches jener Reihe, ersetzt man $z - \alpha_0$ durch $z - \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_0)$ und entwickelt man dann $f(z \mid \alpha_0)$ nach Potenzen von $z - \alpha_1$, so erhält man eine neue Potenzreihe

$$f(z \mid \alpha_1) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}(z - \alpha_1) + a_2^{(1)}(z - \alpha_1)^2 + \cdots,$$

deren Konvergenzkreis mindestens gleich demjenigen ist, welcher um α_1 als Mittelpunkt beschrieben ist und den vorigen von innen berührt. In sehr vielen Fällen aber ist derselbe gröſser. Für jeden Wert von z nun, welcher innerhalb des beiden Potenzreihen gemeinsamen Konvergenzbereiches liegt, besitzen beide Reihen denselben Wert, stellen also dieselbe Funktion von z dar. Aus diesem Grunde sagen wir mit Weierstraſs, daſs beide Reihen innerhalb ihres ganzen Konvergenzbereiches — auch für den nicht gemeinsamen Bereich — eine und dieselbe analytische Funktion $f(z)$ darstellen, und nennen daher jede dieser beiden Reihen ein Element der analytischen Funktion bezw. für die Stellen $(z = \alpha_0)$ und $(z = \alpha_1)$; ferner bezeichnen wir das zweite Element als die analytische Fortsetzung des ersten, aber auch umgekehrt das erste als die analytische Fortsetzung des zweiten.

Fig. 2.



Setzt man nun jenes zweite Element $f(z \mid \alpha_1)$ in genau derselben Weise für einen dritten Punkt α_2 fort, welcher in dem Konvergenzbereiche der zweiten Reihe sich befindet, und fährt so fort, so erhält man zuletzt ein System von unendlich vielen Funktionenelementen, für welche die Gesamtheit der zugehörigen Konvergenzkreise mit den Mittelpunkten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ einen bestimmten Teil der Ebene ausmacht. Dieser Teil der Ebene, innerhalb dessen zu jedem beliebig angenommenen Punkte α ein zugehöriges Funktionenelement:

$$f(z \mid \alpha) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 (z - \alpha) + \bar{a}_2 (z - \alpha)^2 + \cdots$$

existiert, heiſst der Bereich der analytischen Funktion $f(z)$. Derselbe kann ein begrenzter endlicher Teil der Ebene sein oder auch mit der unendlich ausgedehnten Ebene zusammenfallen. Es kann aber auch der Fall eintreten — und dieser tritt gerade in der Theorie der algebraischen Funktionen und der Abelschen Integrale immer ein —, daſs man je nach der Art des Überganges von einem Anfangspunkte α_0 zu einem und demselben Endpunkte α zu verschiedenen zugehörigen Funktionenelementen für die Stelle $(z = \alpha)$ gelangen kann. Im all-

gemeinen hängt es also von dem für die Fortsetzung eingeschlagenen Wege ab, zu welchem von den dem Endpunkte zugehörigen Funktionenelementen man bei der Fortsetzung gelangt. Gehört zu einem jeden Punkte $(z = \alpha_0)$ des Bereiches von $f(z)$ nur eine einzige Potenzreihe $f(z \mid \alpha_0)$, so heifst die analytische Funktion eindeutig; im anderen Falle heifst sie mehrdeutig.

Indem wir die Potenzreihen als ganze Funktionen im weiteren Sinne betrachten, sagen wir: Eine analytische Funktion besitzt in der Umgebung einer Stelle $(z = \alpha)$ den Charakter einer ganzen Funktion, wenn sie sich hier in der Form einer Potenzreihe darstellen läfst, welche keine Potenzen mit negativen Exponenten enthält. Diejenigen Stellen, an welchen eine derartige Entwickelung nicht möglich ist, nennt man Grenzstellen; dieselben können natürlich höchstens an der Grenze des Konvergenzbereiches eines Funktionenelementes, jedenfalls aber nicht innerhalb desselben auftreten. Es ist daher von Wichtigkeit, genauer zu untersuchen, in welcher Weise sich der Konvergenzbereich eines beliebig gegebenen Funktionenelementes $f(z \mid \alpha_0)$ feststellen läfst und in welcher Beziehung er zu den Grenzstellen jener Funktion steht. Zu diesem Zwecke erinnern wir an den folgenden wichtigen Satz, dessen Beweis wir, da er in der Folge häufig gebraucht wird, hier kurz angeben wollen:

Ist

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - \alpha) + a_2 (z - \alpha)^2 + \cdots$$

eine Reihe, welche in der Umgebung der endlichen oder unendlichen Stelle $(z = \alpha)$ innerhalb eines endlichen Bereiches konvergiert, legen wir der Variabeln z alle Werte bei, welche sie auf der Peripherie eines innerhalb jenes Bereiches liegenden konzentrischen Kreises mit dem Radius r annimmt, und ist g die obere Grenze der endlichen Werte, welche $|f(z)|$ auf jenem Kreise annimmt, so besteht für alle Koeffizienten a_i die Ungleichheit:

$$|a_i| \leqq \frac{g}{r^i}.$$

Wir brauchen diesen Satz nur für die Stelle $z = 0$ zu beweisen, da wir ja für $\alpha \gtrless 0$ $z - \alpha$ bezw. $\frac{1}{z}$ durch z' ersetzen können.

Zum Beweise betrachten wir zunächst eine aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehende, also rationale Funktion:

$$f(z) = A_0 + A_1 z^{m_1} + A_2 z^{m_2} + \cdots + A_\varrho z^{m_\varrho},$$

wo $m_1, m_2, \ldots, m_\varrho$ positive oder negative, aber von Null verschiedene ganze Zahlen bedeuten. Legen wir nun der Variabeln z alle diejenigen

Werte bei, deren absoluter Betrag $= r$ ist, und ist g die offenbar endliche obere Grenze von $|f(z)|$ für diese Werte, so zeigen wir zunächst, dafs für das Anfangsglied A_0 die Ungleichheit

$$|A_0| \leqq g$$

stets erfüllt ist. Zu diesem Zwecke setzen wir $z = r\omega^\nu$, wo ν eine beliebige ganze Zahl und ω irgend eine primitive k-te Wurzel der Einheit sein möge und wo k nur so gewählt sein soll, dafs es in keiner der Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_\varrho$ enthalten ist. Alsdann ist stets

$$|z| = r,$$

also nach der Voraussetzung

$$|f(r\omega^\nu)| \leqq g.$$

Summiert man nun die Gleichungen

$$f(r\omega^\nu) = A_0 + A_1 r^{m_1}\omega^{\nu m_1} + A_2 r^{m_2}\omega^{\nu m_2} + \cdots + A_\varrho r^{m_\varrho}\omega^{\nu m_\varrho},$$

welche man erhält, indem man für ν der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots, n-1$ setzt, und wo n eine beliebig grofse ganze Zahl bedeutet, so ergiebt sich nach Division mit n die Gleichung:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f(r\omega^\nu) = A_0 + \frac{1}{n}\left\{A_1 r^{m_1}\frac{1-\omega^{m_1 n}}{1-\omega^{m_1}} + A_2 r^{m_2}\frac{1-\omega^{m_2 n}}{1-\omega^{m_2}} + \cdots + A_\varrho r^{m_\varrho}\frac{1-\omega^{m_\varrho n}}{1-\omega^{m_\varrho}}\right\}$$

oder es ist:

$$|A_0| \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|f(r\omega^\nu)| + \frac{1}{n}\left|A_1 r^{m_1}\frac{1-\omega^{m_1 n}}{1-\omega^{m_1}} + \cdots + A_\varrho r^{m_\varrho}\frac{1-\omega^{m_\varrho n}}{1-\omega^{m_\varrho}}\right|.$$

Wie grofs nun auch n gewählt werde, immer bleibt der auf der rechten Seite zuletzt stehende mit $\frac{1}{n}$ multiplizierte Ausdruck unterhalb einer endlichen Grenze; wird also n gröfser und gröfser angenommen, so nähert sich jener zweite Summand unbegrenzt der Null, während der erste nach der Voraussetzung höchstens gleich $\frac{1}{n} \cdot ng = g$ sein kann. Also folgt

$$|A_0| \leqq g + \delta,$$

wo δ beliebig klein gemacht werden kann; es ist daher in der That

$$|A_0| \leqq g,$$

was zu beweisen war.

Um nunmehr diesen Satz auf Potenzreihen auszudehnen und zu beweisen, dafs die Koeffizienten der Reihe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_i z^i + \cdots$$

die Bedingung

$$|a_i| \leqq \frac{g}{r^i}$$

erfüllen, wo g und r die in dem oben formulierten Satze angegebene Bedeutung haben, bilden wir die offenbar in dem Konvergenzbereiche von $f(z)$ ebenfalls konvergierende Reihe

$$z^{-i} f(z) = a_0 z^{-i} + \cdots + a_{i-1} z^{-1} + a_i + a_{i+1} z + \cdots + a_{i+s} z^s + \bar{f}(z),$$

wo $\bar{f}(z)$ das Aggregat aller folgenden Glieder enthält. Wählt man nun s genügend grofs, so kann der absolute Betrag des Restes $\bar{f}(z)$ auf jenem mit dem Radius r beschriebenen Kreise kleiner als eine beliebig kleine positive Gröfse ε gemacht werden. Wendet man nun auf die rationale Funktion

$$a_0 z^{-i} + \cdots + a_{i-1} z^{-1} + a_i + \cdots + a_{i+s} z^s = z^{-i} f(z) - \bar{f}(z)$$

den soeben bewiesenen Satz an und beachtet dabei, dafs nach den über $f(z)$ und $\bar{f}(z)$ gemachten Voraussetzungen der absolute Betrag der rechten Seite auf dem mit dem Radius r um den Nullpunkt beschriebenen Kreise unterhalb $gr^{-i} + \varepsilon$ liegt und dafs ε beliebig klein angenommen werden kann, so ergiebt sich

$$|a_i| \leqq \frac{g}{r^i}.$$

Jener Satz ist also vollständig bewiesen.

Der entsprechende Satz gilt auch für Potenzreihen mit zwei und mehr Variablen und wird wörtlich ebenso bewiesen.*) Für zwei Veränderliche lautet jenes Theorem folgendermafsen:

Konvergiert die Reihe:

$$f(z, u) = \sum_{i,k} a_{ik} (z - \alpha)^i (u - \beta)^k$$

für alle Wertsysteme (z, u), für welche

$$|z - \alpha| = \varrho, \quad |u - \beta| = \sigma$$

ist, und ist g die obere Grenze von $|f(z, u)|$ für alle jenen beiden Bedingungen genügenden Wertsysteme (z, u), so besteht für alle Reihenkoeffizienten a_{ik} die Ungleichheit:

$$|a_{ik}| \leqq \frac{g}{\varrho^i \sigma^k}.$$

Mit Hülfe dieses Satzes kann man nun ohne Schwierigkeit den wahren Konvergenzkreis einer Potenzreihe $f(z \mid \alpha_0)$ bestimmen, und es ergiebt sich das folgende wichtige Resultat**): Bildet man das zu einem

*) Vgl. z. B. Biermann, Theorie der analytischen Funktionen, S. 144 flg.

**) Vgl. z. B. Biermann a. a. O. S. 165 flg.

Punkte innerhalb des Konvergenzkreises von $f(z\,|\,\alpha_0)$ gehörige Funktionenelement $f(z\,|\,\alpha_1)$, so besitzt dieses, wie oben erwähnt, stets einen Konvergenzkreis von endlicher Gröfse. Dasselbe wird im allgemeinen auch der Fall sein, wenn der betrachtete Punkt α_1 sich der Peripherie des Konvergenzkreises von $f(z\,|\,\alpha_0)$ unbegrenzt nähert. Aber der wahre Konvergenzkreis von $f(z\,|\,\alpha_0)$ ist dadurch charakterisiert, dafs auf seiner Peripherie mindestens ein Punkt $\bar{\alpha}$ von der Beschaffenheit existiert, dafs der Konvergenzkreis von $f(z\,|\,\alpha_1)$ unendlich klein wird, wenn sich der Punkt α_1 dem Punkte $\bar{\alpha}$ auf irgend einem Wege unbegrenzt annähert. Für diesen Punkt $\bar{\alpha}$ existiert mithin kein zugehöriges Funktionenelement $f(z\,|\,\bar{\alpha})$, er liegt also aufserhalb des Bereiches der analytischen Funktion. Eine solche Stelle heifst eine singuläre Stelle der analytischen Funktion, und man kann demnach den folgenden wichtigen Satz aussprechen:

> Für eine analytische Funktion konvergiert die zu einem Punkte α_0 gehörige Potenzreihe stets innerhalb desjenigen um α_0 als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, dessen Peripherie durch den nächsten singulären Punkt hindurchgeht.

Bei den rationalen Funktionen sind die singulären Stellen alle und nur diejenigen Punkte, welche den Polen entsprechen; denn für alle und nur diese Stellen verliert ja jene Funktion den Charakter einer ganzen Funktion, da dort ihre Entwickelung eine wenn auch endliche Anzahl von Potenzen mit negativen Exponenten enthält. Wir erhalten somit hier einen neuen Beweis des a. S. 17 und 18 bewiesenen Satzes, dafs das zu einem Punkte $\mathfrak{p}_0$ gehörige Element einer rationalen Funktion jedesmal innerhalb eines Kreises konvergiert, dessen Peripherie durch den nächsten Pol derselben hindurchgeht.

§ 3.

Im § 1 haben wir den Satz gefunden:

> Jede rationale Funktion besitzt auf der ganzen Kugelfläche nur polare Unstetigkeiten.

Nunmehr können wir auch den umgekehrten Satz von fundamentaler Bedeutung leicht beweisen; er lautet:

> Eine eindeutige analytische Funktion von z, welche auf der ganzen Kugelfläche nur polare Unstetigkeiten besitzt, ist notwendig eine rationale Funktion.

In der That, besitzt eine solche Funktion $F(z)$ nur polare Unstetigkeiten, so kann sie deren nur eine endliche Anzahl haben Be-

säſse sie nämlich unendlich viele, so müſsten diese notwendig auf der Kugelfläche eine Häufungsstelle besitzen, d. h. es müſste eine solche Stelle ($z = \alpha_0$) existieren, für welche in jeder Nähe derartige Unstetigkeitsstellen vorhanden wären. Für diese Stelle α_0 besteht aber, wie oben gezeigt wurde, eine Entwickelung von der Form

$$F(z) = (z - \alpha_0)^a (a_0 + a_1 (z - \alpha_0) + \cdots),$$

wo die eingeklammerte Reihe innerhalb eines endlichen, wenn auch noch so kleinen Bereiches konvergiert. Es kann also in jenem Bereiche keine neue singuläre Stelle vorhanden sein, jene Stelle ist demnach keine Häufungsstelle. Seien nun wieder

$$\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_2, \ldots, \quad \mathfrak{p}_\varrho$$

alle Unstetigkeitsstellen von $F(z)$ und

$$H_1(z),\ H_2(z), \ldots, H_\varrho(z)$$

die zugehörigen Hauptteile, so ist die Differenz

$$f(z) = F(z) - \sum_{i=1}^{\varrho} H_i(z)$$

eine analytische Funktion, welche weder im Endlichen noch im Unendlichen eine singuläre Stelle besitzt, für welche also die zugehörige Reihe

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$$

nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Satze für die ganze unendlich ausgedehnte Ebene konvergiert.

Also liegt der Wert des absoluten Betrages $|f(z)|$ für jeden endlichen oder unendlichen Wert von z unterhalb einer endlichen Grenze g. Beschreibt man daher um den Anfangspunkt einen Kreis mit beliebig groſsem Radius R, so ist auch für alle Punkte seiner Peripherie $|f(z)| < g$; nach dem oben bewiesenen Satze ist aber für jeden Koeffizienten jener Potenzreihe:

$$|A_i| \leq \frac{g}{R^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

und da R hinsichtlich seiner Gröſse gar keiner Beschränkung unterworfen ist, so folgt aus den obigen Ungleichungen für unbegrenzt wachsendes R, daſs alle Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots$ Null sind; es reduziert sich also $f(z)$ auf eine Konstante, oder $F(z)$ auf eine rationale Funktion von z, w. z. b. w.

Dritte Vorlesung.

Die algebraischen Funktionen von z. — Untersuchung derselben für einen gegebenen Wert von z. — Die Gleichungsdiskriminante. — Untersuchung der algebraischen Funktionen in der Umgebung einer regulären Stelle. — Berechnung der Koeffizienten der n Funktionenelemente. — Beweis der Konvergenz jener Reihen. — Untere Grenze des Konvergenzbereiches für das ganze reguläre Gebiet.

§ 1.

Die genauere arithmetisch-analytische Untersuchung der rationalen Funktionen hat uns zu dem wichtigen Resultate geführt, dafs alle Funktionen des Körpers $K(z)$ und nur sie eindeutige analytische Funktionen sind, welche auf der ganzen Kugelfläche nur polare Unstetigkeiten besitzen. Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und untersuchen die sogenannten algebraischen Funktionen von z, d. h. die Funktionen u, welche durch eine algebraische Gleichung n-ten Grades

$$1)\qquad f(u,z) = A_n(z)u^n + A_{n-1}(z)u^{n-1} + \cdots + A_0(z) = 0$$

definiert sind, deren Koeffizienten beliebige ganze oder gebrochene rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln z sind. Ein spezieller Fall der algebraischen Funktionen sind die rationalen Funktionen selbst, denn diese und nur sie sind die Wurzeln linearer Gleichungen

$$A_1(z)u - A_0(z) = 0.$$

Durch Division mit $A_n(z)$ können wir der Gleichung (1) auch die Form geben:

$$1a)\quad f(u,z) = u^n + a_{n-1}(z)\,u^{n-1} + a_{n-2}(z)u^{n-2} + \cdots + a_0(z) = 0.$$

Es sei z ein solcher Wert der unabhängigen Variablen, welcher keinem Pole der Koeffizienten $a_h(z)$ entspricht. Dann besitzt die Gleichung (1a) bekanntlich n endliche Wurzeln.

$$c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, \ldots c_0^{(n)},$$

und es besteht die identische Zerlegung:

$$(1b)\quad f(u,z) = u^n + a_{n-1}(z)u^{n-1} + \cdots + a_0(z) = \left(u - c_0^{(1)}\right)\left(u - c_0^{(2)}\right)\ldots\left(u - c_0^{(n)}\right);$$

aus ihr ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung die n Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{n} e_0^{(i)} = -a_{n-1}(z)$$

2)
$$\sum_{i,k=1}^{n} e_0^{(i)} e_0^{(k)} = +a_{n-2}(z)$$

$$\sum_{i,k,l=1}^{n} e_0^{(i)} e_0^{(k)} e_0^{(l)} = -a_{n-3}(z)$$

$$\vdots$$

$$e_0^{(1)} e_0^{(2)} \dots e_0^{(n)} = (-1)^n a_0(z),$$

nach welchen die sogenannten „elementaren symmetrischen Funktionen“ der Gleichungswurzeln den Gleichungskoeffizienten mit abwechselnden Vorzeichen gleich sind.

Nun ist bekanntlich jede beliebige symmetrische Funktion der n Gröfsen $e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \dots e_0^{(n)}$ rational durch diese n elementaren symmetrischen Funktionen (2) darstellbar; und da diese ihrerseits rationale Funktionen von z sind, so ergiebt sich der wichtige Satz:

> Jede symmetrische Funktion der n Gleichungswurzeln $(e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \dots e_0^{(n)})$ ist eine bestimmte rationale Funktion von z. Speziell ist jede ganze symmetrische Funktion der Wurzeln eine ganze rationale Funktion der Gleichungskoeffizienten.

Eine der wichtigsten symmetrischen Funktionen ist die sogenannte Gleichungsdiskriminante:

3)
$$D(z) = \prod_{g \gtrless k} (e_0^{(g)} - e_0^{(k)}),$$

welche ihrer Bildung nach dann und nur dann verschwindet, wenn für den betrachteten Wert von z zwei oder mehrere von den n Wurzeln $e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \dots e_0^{(n)}$ einander gleich sind.

Man kann die Gleichungsdiskriminante auch anders darstellen: Differenziert man die Gleichung (1b) nach u und setzt dann für u eine der n Wurzeln $e_0^{(i)}$, so ergiebt sich:

$$f'(e_0^{(i)}, z) = (e_0^{(i)} - e_0^{(1)}) \dots (e_0^{(i)} - e_0^{(i-1)}) (e_0^{(i)} - e_0^{(i+1)}) \dots (e_0^{(i)} - e_0^{(n)}),$$

und wenn man das Produkt aller n Gleichungen bildet und beachtet, dafs dann die rechte Seite offenbar gleich dem Differenzenprodukt aller Wurzeln, also gleich der Diskriminante ist, so folgt:

3a)
$$D(z) = f'(e_0^{(1)}) f'(e_0^{(2)}) \dots f'(e_0^{(n)}).$$

Hieraus geht hervor, dafs für einen bestimmten Wert von z die Gleichungsdiskriminante eine ganze rationale Funktion der Gleichungskoeffizienten $a_k(z)$ ist, welche dann und nur dann verschwindet, wenn hier $f'(u, z)$ für eine der n Wurzeln von $f(u, z)$ verschwindet, wenn also $f(u, z)$ und $f'(u, z)$ mindestens einen Linearfaktor $(u - e_0^{(i)})$ gemeinsam haben.

Verschwindet für eine Gleichung $f(u, z) = 0$ die Diskriminante identisch, so haben $f(u)$ und $f'(u)$ für jeden Wert von z einen gemeinsamen Teiler. Einen solchen Divisor kann man bekanntlich mit Hilfe des Euklidischen Verfahrens durch successive Division, also auf rationalem Wege bestimmen und dann durch Division beseitigen. Denkt man sich dies von vornherein vorgenommen, so kann man a priori voraussetzen, dafs $f(u, z)$ mit der Ableitung $f'(u, z)$ keinen gemeinsamen Teiler besitzt, dafs also die Gleichungsdiskriminante nicht identisch verschwindet; dann besitzt diese rationale Funktion $D(z)$ von z nur eine endliche Anzahl von Nullstellen, und nur für diese haben $f(u)$ und $f'(u)$ eine gemeinsame Wurzel. Es ergiebt sich also der Satz:

> Ist die Gleichungsdiskriminante nicht identisch Null, so verschwindet die Ableitung $f'(u, z)$ nur an einer endlichen Anzahl von Stellen für eine der n Wurzeln von $f(u, z) = 0$.

Sind die Koeffizienten $a_0(z), a_1(z), \ldots a_{n-1}(z)$ in (1a) sämtlich ganze Funktionen, besitzen sie also keinen Pol im Endlichen, so haben für jeden im Endlichen liegenden Punkt $(z = \alpha_0)$ alle n Wurzeln endliche Werte; in diesem Falle nennt man die Funktion u eine ganze algebraische Funktion von z, weil sie ebenso wie die ganzen rationalen Funktionen für endliche Werte von z überall endlich bleibt. Wir werden uns später überzeugen, dafs diese Besonderheit der ganzen algebraischen Funktionen nur auf der an sich unwesentlichen Eigenschaft beruht, dafs auch hier alle Unendlichkeitsstellen von u dem Südpole O', d. h. dem Werte $(z = \infty)$ der unabhängigen Variablen entsprechen. Aus diesem Grunde werden wir später auch keine Veranlassung haben, die ganzen algebraischen Funktionen irgendwie zu bevorzugen.

Es sei jetzt u als algebraische Funktion von z durch die Gleichung (1) definiert. Dann erkennen wir sofort, dafs u nunmehr keine eindeutige Funktion von z mehr ist, denn zu jedem endlichen oder unendlichgrofsen Werte α_0 von z gehören stets n und auch nur n Werte $e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \ldots e_0^{(n)}$ von u, welche im allgemeinen endlich und von einander verschieden sind, aber in besonderen Fällen auch unendlichgrofs oder einander gleich werden können, und deren Bestimmung direkt

durch Auflösung der Zahlengleichung $f(u, \alpha_0) = 0$ geschieht. Es stellt sich somit nach dieser oberflächlichen Prüfung u als eine n-deutige Funktion von z dar. Die folgenden Untersuchungen werden zeigen, daſs, bezw. in welchem Sinne diese Aussage bei der strengen Fassung des Begriffes der analytischen Funktion ihre Geltung behält, welche am Schlusse der vorigen Vorlesung gegeben wurde.

Wir haben gezeigt, daſs eine beliebige rationale Funktion, d. h. eine Wurzel der linearen Gleichung $A_1(z)u - A_0(z) = 0$, in der Umgebung einer beliebigen Stelle $\mathfrak{p}_0$ der unabhängigen Variabeln in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, welche nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors $z - \alpha_0$ fortschreitet, und wir bestimmten die Koeffizienten derselben successive, indem wir die Kongruenz

$$u \equiv \frac{A_0(z)}{A_1(z)}$$

für immer höhere und höhere Potenzen von $z - \alpha_0$ als Modul auflösten. Man kann diese Methode offenbar auch so aussprechen: Betrachten wir die Gleichung

$$A_1(z)u - A_0(z) = 0 \tag{4}$$

als Kongruenz, und zwar successive für immer höhere und höhere Potenzen von $z - \alpha_0$ als Modul, so ergiebt sich als Lösung eine eindeutig bestimmte Reihe

$$u = a_\varrho (z - \alpha_0)^\varrho + a_{\varrho+1} (z - \alpha_0)^{\varrho+1} + \cdots,$$

welche jene Gleichung (4) formal befriedigt, und von der nachgewiesen werden konnte, daſs sie, genügend weit fortgesetzt, für alle Punkte einer gewissen endlichen Umgebung von α_0 konvergiert und dort den Wert von u mit jeder vorgegebenen Genauigkeit darstellt.

Genau dasselbe Verfahren wollen wir auch in dem allgemeineren Falle anwenden, daſs u als Function von z nicht durch eine lineare, sondern durch eine Gleichung n-ten Grades definiert ist. Es wird sich dann zeigen, daſs man für jede endliche oder die unendlich ferne Stelle genau n Potenzreihen finden kann, welche die n Wurzeln jener Gleichung für eine gewisse endliche Umgebung der betrachteten Stelle mit jeder vorgegebenen Genauigkeit darstellen. Der einzige Unterschied ist der, daſs, während die Entwickelung einer rationalen Funktion stets nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors fortschreitet, jene Entwickelungen für eine algebraische Funktion u an gewissen, aber nur in endlicher Anzahl auftretenden Punkten nach gebrochenen Potenzen fortschreiten können.

§ 2.

Ehe wir die Wurzeln der vorgelegten Gleichung in der Umgebung einer beliebigen Stelle $(z = \alpha)$ in Potenzreihen entwickeln, wollen wir diese Untersuchung für eine sogenannte reguläre Stelle durchführen, weil wir auf diesen ganz einfachen Fall nachher das allgemeine Problem mit Leichtigkeit reduzieren können.

Wir denken uns die Gleichung in der Form gegeben:

$$1) \qquad f(u, z) = u^n + a_{n-1}(z)u^{n-1} + \cdots + a_1(z)u + a_0(z) = 0,$$

wo alle Koeffizienten rationale Funktionen von z, also in der Umgebung einer jeden Stelle $(z = \alpha)$ als konvergente Potenzreihen darstellbar sind, welche nach Potenzen von $z - \alpha$ fortschreiten. Wir schliefsen zunächst die unendlich ferne Stelle und die nur in endlicher Anzahl vorhandenen Pole der n Koeffizienten $a_0(z), \ldots a_{n-1}(z)$ aus. Für alle übrigen Stellen $(z = \alpha)$ sind dann die Werte $a_i(\alpha)$, welche die Koeffizienten dort annehmen, endlich.

Wir bilden jetzt die Gleichungsdiskriminante $D(z)$. Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes ist diese eine nicht identisch verschwindende ganze rationale Funktion der Gleichungskoeffizienten $a_i(z)$; sie besitzt also für alle hier betrachteten Stellen $(z = \alpha)$ ebenfalls einen endlichen Wert. Wir schliefsen zweitens vorläufig auch die ebenfalls nur in endlicher Anzahl auftretenden Nullstellen der Diskriminante von unserem Bereiche aus. Da dann für alle übrigen Punkte $(z = \alpha)$

$$D(\alpha) = \Pi\left(e_0^{(g)} - e_0^{(k)}\right) = \Pi f'\left(e_0^{(i)}\right) \gtrless 0$$

ist, so sind für jeden Punkt unseres Bereiches alle n Wurzeln endlich und voneinander verschieden, und die nach u genommene Ableitung $f'(u, z)$ besitzt für alle n Gleichungswurzeln einen von Null verschiedenen Wert.

Wir wollen diese von der folgenden Betrachtung zuerst ausgeschlossenen Punkte die kritischen Punkte der Gleichung nennen. Es seien:

$$(z = \beta_1), \quad (z = \beta_2), \ldots (z = \beta_h), \quad (z = \infty)$$

jene Punkte, und es mögen

$$\mathfrak{B}_1 \qquad \mathfrak{B}_2, \ldots \qquad \mathfrak{B}_h \qquad \mathfrak{B}_\infty$$

ihre Bilder auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ sein. Der nach Ausschlufs jener $(h + 1)$ Punkte übrig bleibende Teil von $\mathfrak{K}$ soll der reguläre Bereich, jede Stelle desselben eine reguläre Stelle heifsen.

Wir betrachten nun die Gleichung (1) in der Umgebung einer Stelle $(z = \alpha_0)$ dieses regulären Bereiches und untersuchen, ob dieselbe hier durch das Element einer analytischen Funktion

3) $$u = e_0 + e_1(z - \alpha_0) + e_2(z - \alpha_0)^2 + \cdots$$

befriedigt werden kann. Soll dies der Fall sein, so mufs jene Gleichung zunächst für $z = \alpha_0$ durch das Anfangsglied e_0 befriedigt werden, d. h. e_0 mufs eine der n Wurzeln $e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \ldots e_0^{(n)}$ der bereits oben betrachteten Gleichung (1a)

4) $$f(e, \alpha_0) = e^n + a_{n-1}(\alpha_0)e^{n-1} + \cdots + a_1(\alpha_0) + a_0(\alpha_0) = 0$$

sein, deren Koeffizienten die endlichen Werte sind, welche die Funktionen $a_h(z)$ für $z = \alpha_0$ annehmen.

Unter jenen Wurzeln $e_0^{(k)}$ können mehrere einander gleich sein; dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn $(z = \alpha_0)$ eine der bereits ausgeschlossenen Nullstellen der Diskriminante in (2) ist.

Es sei jetzt e_0 irgend eine Wurzel von $f(e_0, \alpha_0) = 0$, für welche also sicher

$$f'(e_0, \alpha_0) \gtrless 0$$

ist. Wir zeigen dann, dafs zu diesem Anfangsgliede eine und nur eine eindeutig bestimmte Reihe:

$$u_0 = e_0 + e_1(z - \alpha_0) + e_2(z - \alpha_0) + \cdots$$

gehört, welche in einer endlichen Umgebung der Stelle $(z = \alpha_0)$ konvergiert und für jeden Punkt derselben eine Wurzel der Gleichung $f(u, z) = 0$ darstellt.

Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$z - \alpha_0 = \zeta, \quad u_1 = u - e_0 = e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \cdots;$$

dann entspricht der Stelle $(z = \alpha_0)$ von z die Stelle $(\zeta = 0)$ der Variablen ζ, und es kann die zu lösende Aufgabe jetzt einfacher so ausgesprochen werden:

Es sollen die Koeffizienten der Reihe:

5) $$u_1 = e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \cdots$$

so bestimmt werden, dafs die Reihe u_1 die Gleichung

6) $$f(u, z) = f(e_0 + u_1, \alpha_0 + \zeta) = 0$$

in der Umgebung der Stelle $(\zeta = 0)$ befriedigt.

Entwickeln wir nun die linke Seite der Gleichung (6) nach dem Taylorschen Satze nach Potenzen von u_1 und ζ, so geht sie über in:

$$0 = f(e_0 + u_1, \alpha_0 + \zeta) = f(e_0, \alpha_0) + u_1 f_{10}(e_0, \alpha_0) + \zeta f_{01}(e_0, \alpha_0)$$
$$+ u_1^2 f_{20}(e_0, \alpha_0) + u_1 \zeta f_{11}(e_0, \alpha_0) + \zeta^2 f_{02}(e_0, \alpha_0) + \cdots,$$

wo zur Abkürzung allgemein:

$$\frac{1}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{i+k} f(u, z)}{\partial u^i \partial z^k}\right)_{u=e_0,\ z=\alpha_0} = f_{ik}(e_0, \alpha_0)$$

gesetzt ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber, wenn man beachtet, dafs n. d. V. $f(e_0, \alpha_0) = 0$, $f_{10}(e_0, \alpha_0) \gtrless 0$ ist, folgende Bedingung für die unbekannte Reihe u_1:

$$u_1 = -\frac{f_{01}}{f_{10}}\zeta + \left(-\frac{f_{20}}{f_{10}}\right)u_1^2 + \left(-\frac{f_{11}}{f_{10}}\right)u_1\zeta + \left(-\frac{f_{02}}{f_{10}}\right)\zeta^2 + \cdots$$

Bei einfacherer Bezeichnung der hier auftretenden Koeffizienten kann also die obige Aufgabe folgendermafsen ausgesprochen werden:

Es soll die Gleichung:

7) $$u_1 = g_{10}\zeta + \sum_{i+k=2,3,4\ldots} g_{ik}\zeta^i u_1^k,$$

in welcher die Koeffizienten:

7a) $$g_{10};\quad g_{20},\ g_{11},\ g_{02};\quad g_{30}\cdots$$

gegebene Konstanten sind, in der Umgebung der Stelle $(\zeta = 0)$ durch eine Reihe:

8) $$u_1 = e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \cdots$$

gelöst werden.

Diese Aufgabe kann nun stets auf eine einzige Weise gelöst werden; und dasselbe gilt, wenn die Reihe der Koeffizienten (7a) nicht abbricht, wie dies hier der Fall ist; nur mufs alsdann die Reihe $\Sigma g_{ik}\zeta^i u_1^k$ innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $(\zeta = 0, u_1 = 0)$ konvergieren. Wir wollen die Aufgabe daher gleich unter dieser allgemeineren Annahme lösen.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes ersetzen wir in der Gleichung (7) u_1 durch die noch unbekannte Reihe (8) und ordnen dann die rechte Seite der so sich ergebenden Gleichung

9) $$(e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \cdots) = g_{10}\zeta + \sum_{i+k=2,3\ldots} g_{ik}\zeta^i(e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \cdots)^k$$

nach steigenden Potenzen von ζ; dann ist dieselbe bekanntlich innerhalb ihres Konvergenzbereiches nur dann erfüllt, wenn die noch unbekannten Koeffizienten $e_1, e_2, \ldots$ so gewählt werden können, dafs die Koeffizienten auf beiden Seiten jener Gleichung (9) gleich sind. So erhalten wir durch Koeffizientenvergleichung eine Reihe von Gleichungen:

$$10)\qquad \begin{aligned} e_1 &= g_{10} \\ e_2 &= g_{20} + g_{11}e_1 + g_{02}e_1^2 \\ e_3 &= g_{30} + g_{21}e_1 + g_{12}e_1^2 + g_{03}e_1^3 + g_{11}e_2 + 2g_{02}e_1e_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und man erkennt leicht, dafs sich allgemein aus der Vergleichung der Koeffizienten von ζ^k auf beiden Seiten für e_k eine Gleichung ergiebt:

$$10\text{a})\qquad e_k = G_k(g_{10}, g_{hi};\ e_1, e_2, \ldots e_{k-1}) \qquad (h+i=2, 3, \ldots),$$

in welcher die rechte Seite die Summe einer endlichen Anzahl von Produkten aus den Koeffizienten g_{hi} und den vorhergehenden Koeffizienten $e_1, e_2, \ldots e_{k-1}$ ist. Setzt man also den Wert von e_1 in die zweite, die so gefundenen Werte von e_1 und e_2 in die dritte Gleichung ein, und fährt so fort, so erhält man für jeden Koeffizienten einen expliciten Ausdruck von der Form:

$$11)\qquad e_k = H_k(g_{10};\ g_{hi}) \qquad (h+i=2, 3, \ldots),$$

welcher ebenfalls aus einer endlichen Anzahl der Koeffizienten g_{10}, g_{hi} allein durch die Operationen der Addition und Multiplikation gebildet ist. So ergiebt sich z. B. aus den Gleichungen (10) für die drei ersten Koeffizienten:

$$11\text{a})\qquad \begin{aligned} e_1 &= g_{10} \\ e_2 &= g_{20} + g_{11}g_{10} + g_{02}g_{10}^2 \\ e_3 &= g_{30} + g_{21}g_{10} + g_{12}g_{10}^2 + g_{03}g_{10}^3 + g_{11}g_{20} \\ &\quad + g_{11}^2g_{10} + 3g_{11}g_{02}g_{10}^2 + 2g_{02}g_{10} + 2g_{02}^2g_{10}^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es giebt somit eine einzige Potenzreihe $u_1 = e_1\zeta + \cdots$, welche die vorgelegte Gleichung (7) formal befriedigt.

§ 3.

Wir zeigen jetzt weiter, dafs die im vorigen Abschnitte bestimmte Reihe $e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \cdots$ in einer endlichen Umgebung der Stelle $(\zeta = 0)$ konvergiert und für sie auch eine Wurzel der Gleichung

$$1)\qquad u_1 = g_{10}\zeta + \Sigma g_{ik}\zeta^i u_1^k$$

darstellt.

Zum Beweise der Konvergenz der Reihe u_1 führt nun die folgende sehr allgemeine Überlegung, welche zuerst von Cauchy bei ähnlichen Fragen angewendet wurde. Ersetzt man in der Reihe $\Sigma e_h\zeta^h$ alle Koeffizienten e_h durch ihre absoluten Beträge und vergröfsert dann noch jeden Koeffizienten um eine beliebige Zahl, so erhält man eine Reihe

$$\overline{u}_1 = \sum_{h=1}^{\infty} \overline{e}_h \xi^h \qquad (|e_h| \leqq \overline{e}_h)$$

mit lauter positiven Koeffizienten $\overline{e}_h$, und für einen beliebigen innerhalb des Konvergenzbereiches von $\overline{u}_1$ liegenden Wert von ξ ist offenbar:

$$|\Sigma e_h \xi^h| \leqq \Sigma \overline{e}_h |\xi|^h.$$

Konvergiert daher die zweite Reihe $\overline{u}_1$ innerhalb eines Kreises mit dem Radius $\overline{\varrho}$, so gilt dasselbe auch von der ersten Reihe. Können wir also für die Reihe $\overline{u}_1$ beweisen, dafs sie für eine endliche Umgebung der Nullstelle konvergiert, so ist der verlangte Beweis auch für die Reihe u_1 erbracht, denn ihr Konvergenzradius ist gleich oder gröfser als der der zweiten Reihe.

Man kann nun in der That eine solche Reihe $\overline{u}_1$ bilden, welche so einfach ist, dafs man für sie ohne weiteres den verlangten Nachweis zu führen imstande ist. Beachtet man nämlich, dafs die Koeffizienten $e_1, e_2, \ldots$ in (11) und (11a) des § 2 aus den Gleichungskoeffizienten g_{10}, g_{hi} allein durch die Operationen der Addition und Multiplikation gebildet sind, so erkennt man sofort, dafs alle Koeffizienten e_h ihrem absoluten Werte nach vergröfsert werden, wenn man die Gleichungskoeffizienten g_{10}, g_{hi} durch ihre absoluten Beträge ersetzt und sie dann noch vergröfsert. Wir wollen dies auf folgende Weise thun: Die Reihe

2) $$G(\xi, u_1) = g_{10}\xi + \Sigma g_{hi} \xi^h u_1^i$$

der beiden Variablen ξ und u_1 möge für alle Werte

2a) $$|\xi| = \varrho, \quad |u_1| = \sigma$$

ihrer Argumente konvergieren; da jene Reihe nach dem Vorigen innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle ($\xi = 0$, $u_1 = 0$) konvergiert, so kann man stets endliche Gröfsen ϱ und σ so bestimmen, dafs der obigen Annahme genügt wird.

Nach dem auf S. 22 angegebenen Satze bestehen dann für alle Koeffizienten g_{ik} die Ungleichungen:

2b) $$|g_{ik}| < \frac{g}{\varrho^i \sigma^k} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

wenn g gröfser ist als die obere Grenze aller Wertsysteme $|G(\xi, u_1)|$, für welche die Gleichungen (2a) erfüllt sind. Ersetzt man also in der Grundgleichung (1) die Koeffizienten g_{ik} durch die Zahlen $\frac{g}{\varrho^i \sigma^k}$ und berechnet zu ihr die Potenzreihe $\overline{u}_1 = \overline{e}_1 \xi + \overline{e}_2 \xi^2 + \cdots$, so ist allgemein $|e_h| \leqq \overline{e}_h$; ist also der Konvergenzbereich dieser Reihe $\overline{u}_1$ endlich, so gilt dasselbe auch von dem Bereiche der zu untersuchenden Reihe u_1.

Substituieren wir nun jene Werte für die Koeffizienten g_{ik}, so geht die Grundgleichung (1) für $\overline{u}_1$ über in:

$$\overline{u}_1 = g\left(\frac{\xi}{\varrho} + \sum_{i+k=2,3\ldots\infty}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^i\left(\frac{\overline{u}_1}{\sigma}\right)^k\right),$$

und die rechte Seite kann für alle Wertsysteme:

$$|\xi| < \varrho \quad |\overline{u}_1| < \sigma$$

leicht summiert werden; dann ergiebt sich für $\overline{u}_1$ die einfache Gleichung:

$$\overline{u}_1 = g\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{\varrho}\right)\left(1-\frac{\overline{u}_1}{\sigma}\right)} - \left(1+\frac{\overline{u}_1}{\sigma}\right)\right)$$

oder:

3) $$u' = g'\left(\frac{1}{(1-\xi')(1-u')} - (1+u')\right),$$

wenn zur Abkürzung:

3a) $$g' = \frac{g}{\sigma}, \quad \xi' = \frac{\xi}{\varrho}, \quad u' = \frac{\overline{u}_1}{\sigma}$$

gesetzt und ξ' und u' ihrem absoluten Betrage nach kleiner als Eins angenommen werden.

Also ist u' als Funktion von ξ' durch die aus (3) folgende quadratische Gleichung definiert:

3b) $$Au'^2 - u' + B = 0,$$

wenn zur Abkürzung:

3c) $$A = 1 + g', \quad B = \frac{g'\xi'}{1-\xi'}$$

gesetzt ist, und zwar mufs $u' = \overline{e}_1\xi' + \overline{e}_2\xi'^2 + \cdots$ diejenige unter den beiden Wurzeln jener Gleichung sein, welche für $\xi' = 0$ ebenfalls verschwindet. Lösen wir diese quadratische Gleichung auf, so ergiebt sich:

$$u' = \frac{1-\sqrt{1-4AB}}{2A},$$

denn wir müssen das negative Vorzeichen der Wurzel wählen, damit sich u' für $\xi' = 0$, d. h. für $B = 0$ ebenfalls auf Null reduziert.

Diesen Wurzelausdruck können wir nun in der That nach dem binomischen Satze in eine Potenzreihe entwickeln, sobald nur:

4) $$|4AB| = \left|4(1+g')g' \cdot \frac{\xi'}{1-\xi'}\right| < 1$$

ist; dann ergiebt sich für u' die Reihe:

$$u' = B + AB^2 + 2A^2B^3 + 5A^3B^4 + \cdots,$$

welche innerhalb des Gebietes (4) gleichmäſsig konvergiert und die eine Wurzel von (3a) darstellt. Jenen Bereich können wir noch einfacher charakterisieren; in der That folgt aus (4)

$$4(1+g')g' \cdot |\zeta'| < |1-\zeta'| \qquad |\zeta'| < 1,$$

und da stets $|1-\zeta'| \geqq 1 - |\zeta'|$ ist, so wird jene Ungleichung sicher erfüllt sein, wenn man auf ihrer rechten Seite $|1-\zeta'|$ durch $1-|\zeta'|$ ersetzt. Dann ist aber einfacher:

$$(1+2g')^2 |\zeta'| < 1, \quad |\zeta'| < \frac{1}{(1+2g')^2}$$

oder, wenn man für ζ' und g' ihre Werte aus (3a) einsetzt:

$$|\zeta| < \frac{\varrho}{\left(1+2\frac{g}{\sigma}\right)^2},$$

d. h. die Reihe $\overline{u}_1 = \overline{e}_1\zeta + \overline{e}_2\zeta^2 + \cdots$ und somit auch die ursprüngliche Reihe $u_1 = e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \cdots$ konvergiert sicher innerhalb eines die Stelle $\zeta = 0$ umgebenden Kreises, dessen Radius

$$r \geqq \frac{\varrho}{\left(1+2\left(\frac{g}{\sigma}\right)\right)^2} \tag{5}$$

ist.

Wir müssen jetzt endlich zeigen, daſs die innerhalb des Gebietes (5) konvergente Reihe u_1 für diesen Bereich die vorgelegte Gleichung (1) befriedigt, oder, was dasselbe ist, daſs die aus (1) hervorgehende Differenz:

$$K(u_1, \zeta) = u_1 - (g_{10}\zeta + \Sigma g_{hi}\zeta^h u_1^i)$$

nach Substitution der Reihe $\Sigma e_k\zeta^k$ für u_1 in jenem Bereiche verschwindet. Macht man aber jene Substitution, so wird $K(u_1, \zeta)$ eine Potenzreihe von ζ allein, in der sich alle Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ζ auf Null reduzieren, d. h. $K(u_1, \zeta)$ wird identisch gleich Null; u_1 stellt also für jenen Bereich in der That eine Wurzel von $K(u_1, \zeta) = 0$ oder der Gleichung (1) dar.

Zum Schlusse bemerken wir noch, daſs der Beweis für die Konvergenz der Reihe $u_1 = e_1\zeta + \cdots$ ohne Benutzung des auf S. 22 erwähnten Satzes gegeben werden kann, wenn, wie es hier der Fall ist, die Reihe $G(\zeta, u_1)$ in (2) nur e i n e e n d l i c h e A n z a h l von Gliedern enthält. Ist dann nämlich g der gröſste unter den in endlicher Anzahl vorhandenen Koeffizienten g_{10}, g_{hi}, so sind aus den soeben angegebenen Gründen die Koeffizienten e_i von u_1 absolut genommen kleiner als die positiven Koeffizienten $\bar{e}_i$ der Reihe $\overline{u}_1$, welche durch die Gleichung

$$\overline{u}_1 = g(\zeta + \Sigma\zeta^i\overline{u}_1^k) \qquad (i+k = 2, 3, \ldots \infty)$$

definiert ist und welche genau zu derselben quadratischen Gleichung für u_1 führt wie vorher für u'. In diesem Falle tritt an Stelle von ϱ und σ die Zahl Eins, während g' durch g zu ersetzen ist.

Da wir gerade dieses Resultat später anzuwenden haben werden, so formulieren wir dasselbe in dem folgenden Satze:

Die Gleichung:

$$u_1 = g_{10}\zeta + \sum_{i+k=2,3,\ldots} g_{ik}\zeta^i u_1{}^k$$

besitzt stets eine und auch nur eine Lösung:

$$u_1 = e_1\zeta + e_2\zeta^2 + \cdots,$$

welche in einer endlichen Umgebung der Nullstelle konvergiert und für $\zeta = 0$ ebenfalls verschwindet. Ist die Anzahl der Koeffizienten g_{ik} endlich und g gröfser als der absolute Betrag aller dieser Zahlen, so konvergiert die Reihe für u_1 sicher innerhalb eines Kreises, dessen Radius gleich

$$\frac{1}{(1+2g)^2}$$

ist.

§ 4.

Im vorigen Abschnitte ist bewiesen worden, dafs für jeden regulären Punkt $\mathfrak{A}$ $(z = \alpha)$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ alle n zugehörigen Potenzreihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ innerhalb einer endlichen Umgebung von $\mathfrak{A}$ konvergieren und dort je eine Wurzel der Gleichung darstellen. Aber ebenso wie bei den rationalen Funktionen kann der Fall eintreten, dafs für eine oder mehrere Wurzeln der Konvergenzradius mehr und mehr abnimmt und zuletzt unter jede noch so kleine Grenze herabsinkt, wenn sich der Punkt $\mathfrak{A}$ unbegrenzt einer Grenzlage nähert. Wir zeigen jetzt, dafs dieser Fall höchstens dann eintreten kann, wenn $\mathfrak{A}$ einem der vorher ausgeschlossenen kritischen Punkte

$$\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h, \quad \mathfrak{B}_\infty$$

unendlich nahe kommt.

Wir umgeben zu diesem Zwecke jeden dieser kritischen Punkte auf der Kugel durch beliebig kleine Kreise und betrachten nun nur denjenigen Teil der Kugelfläche $\overline{\mathfrak{K}}$, welcher nach Fortlassung jener $(h+1)$ kleinen Kreisinneren übrig bleibt; wir wollen diesen Teil der Kugelfläche, welcher durch Verkleinerung der $(h+1)$ Kreise beliebig nahe an $\mathfrak{K}$ herangebracht werden kann, den regulären Bereich der Gleichung nennen.

Dann zeigen wir, dafs für alle unendlich vielen Punkte $\mathfrak{A}$ des regulären Bereiches die Konvergenzradien der n Reihen $u_1, u_2, \ldots u_n$

oberhalb einer und derselben positiven unteren Grenze $\varrho_0 > 0$ liegen.

Für den ganzen Bereich $\bar{\mathfrak{K}}$ bleiben zunächst die Gleichungskoeffizienten $a_{n-1}(\alpha), a_{n-2}(\alpha), \ldots a_0(\alpha)$ alle unterhalb einer endlichen Grenze, weil die rationalen Funktionen $a_h(z)$ innerhalb $\bar{\mathfrak{K}}$ allenthalben endlich und stetig sind; und dasselbe ist demnach auch für die n Wurzeln $e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \ldots e_0^{(n)}$ der Gleichung $f(u, \alpha) = 0$ für das ganze reguläre Gebiet der Fall. Dasselbe gilt auch von der Gleichungsdiskriminante und den Koeffizienten:

$$f_{ik} = \frac{1}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{(i+k)} f(u, z)}{\partial u^i \, \partial z^k}\right)_{u = e_0,\; z = \alpha},$$

da alle diese Gröfsen ganze Funktionen von e_0 und α_0 mit endlichen Koeffizienten sind. Andrerseits zeigt man aber leicht, dafs die Gleichungsdiskriminante für den ganzen regulären Bereich absolut genommen oberhalb einer endlichen Gröfse Δ bleibt; da nämlich die stetige Funktion $D(z)$ höchstens in den kritischen Punkten verschwindet, so kann sie nur in ihrer Umgebung unendlich klein werden. Hieraus folgt sofort, dafs für den ganzen Bereich $\bar{\mathfrak{K}}$ auch die Differenz zweier konjugierter Wurzeln $e_0^{(g)} - e_0^{(k)}$ absolut genommen oberhalb einer und derselben endlichen Grenze δ liegen mufs. In der That ist nach der soeben gemachten Bemerkung für eine beliebige reguläre Stelle $(z = \alpha)$

$$|D(\alpha)| = \Pi \, |e_0^{(i)} - e_0^{(k)}| > \Delta.$$

Nun liegen alle $n(n-1)$ Wurzeldifferenzen $|e_0^{(i)} - e_0^{(k)}|$ ebenso wie die Wurzeln selbst absolut genommen unter einer endlichen oberen Grenze, welche durch γ bezeichnet werden möge. Ist also $|e_0^{(g)} - e_0^{(h)}|$ etwa die kleinste jener Differenzen, so wird die soeben hingeschriebene Ungleichung noch verstärkt, wenn man alle Differenzen aufser jener kleinsten durch die gröfsere Zahl γ ersetzt; also ist

$$|e_0^{(g)} - e_0^{(h)}| \cdot \gamma^{n(n-1)-1} > \Delta$$

oder es ist für das ganze reguläre Gebiet in der That

$$|e_0^{(g)} - e_0^{(h)}| > \delta = \frac{\Delta}{\gamma^{n^2-n-1}}.$$

Mit Benutzung dieser Thatsachen kann nunmehr der angekündigte Beweis leicht geführt werden: Für eine beliebige reguläre Stelle $(z = \alpha)$ war der zugehörige Konvergenzradius sicher gröfser als $\frac{1}{(1+2g)^2}$, wenn g eine positive Zahl ist, welche gröfser ist als die absoluten Beträge der Koeffizienten

$$g_{ik} = -\frac{f_{ik}}{f_{10}},$$

welche in der definierenden Gleichung (7)

$$u_1 = g_{10}\zeta + \Sigma g_{ik}\zeta^i v^k$$

für $u_1 = u - e_0$ auftreten. Nur dann könnte also bei Annäherung an eine reguläre Stelle der Konvergenzbereich unendlich klein werden, wenn g unendlich wüchse; da aber für den ganzen regulären Bereich alle $|f_{ik}|$ endlich bleiben, so müfste dazu der gemeinsame Nenner:

$$|f_{10}| = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u = e_0^{(1)},\, \varepsilon = \alpha} = |e_0^{(1)} - e_0^{(2)}|\,|e_0^{(1)} - e_0^{(3)}| \cdots |e_0^{(1)} - e_0^{(n)}|$$

unendlich klein werden, und dies ist nicht der Fall, weil nach dem soeben gegebenen Beweise jede einzelne Wurzeldifferenz $|e_0^{(1)} - e_0^{(h)}|$ oberhalb δ, also $|f_{10}|$ für den ganzen Bereich oberhalb δ^{n-1} bleibt, und damit ist die obige Behauptung in ihrem vollen Umfange bewiesen.

Vierte Vorlesung.

Untersuchung der algebraischen Funktionen in der Umgebung einer beliebigen regulären oder kritischen Stelle. — Bestimmung der Anfangsglieder der zu einer Stelle gehörigen Potenzreihen. — Konstruktion des zu einer Stelle gehörigen Diagramms. — Folgerungen. — Aufstellung der zu einem Anfangsgliede gehörigen Potenzreihe.

§ 1.

Das in der vorigen Vorlesung gefundene Resultat sprechen wir in dem folgenden Satze aus:

Es sei u eine algebraische Funktion von z, welche durch die Gleichung

1) $$f(u, z) = u^n + a_{n-1}(z)u^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0$$

definiert ist, und $(z = \alpha)$ sei eine beliebige reguläre Stelle; dann existieren genau n Potenzreihen

$$u_i = e_0^{(i)} + e_1^{(i)}(z-\alpha) + e_2^{(i)}(z-\alpha)^2 + \cdots, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

welche alle in einer endlichen Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ konvergieren, welche lauter verschiedene Anfangsglieder besitzen und die in einer endlichen Umgebung jener Stelle die n Wurzeln der betrachteten Gleichung darstellen.

Damit haben wir das Grundproblem unserer Theorie, die Darstellung der algebraischen Funktionen durch Potenzreihen, fast für alle Stellen der unabhängigen Variablen gelöst; nur die $h+1$ kritischen Stellen $\mathfrak{B}_1, \ldots \mathfrak{B}_h, \mathfrak{B}_\infty$ entziehen sich dieser Methode; aber gerade diese sind von besonderer Wichtigkeit für die Erkenntnis der wahren Natur jener Funktionen; gerade die Untersuchung der algebraischen Funktionen u für die Umgebung dieser Stellen liefert uns die Eigenschaften, durch welche sie sich von den rationalen Funktionen von z unterscheiden. Es ist auch kein Zufall, daſs unsere Methode gerade für diese Stellen $(z = \alpha_0)$ versagt, denn es wird sich zeigen, daſs für ihre Umgebung zwar auch Reihen für u existieren, welche nach Potenzen von $z - \alpha_0$ fortschreiten, aber der wichtige Unterschied ist der, daſs gewisse unter ihnen nicht nach Potenzen mit ganzzahligen, sondern nach Potenzen mit gebrochenen Exponenten fortschreiten; es können also für u z. B. Reihen von der Form auftreten:

$$u = e_0 + e_1(z-\alpha_0)^{\frac{1}{\varrho}} + e_2(z-\alpha_0)^{\frac{2}{\varrho}} + \cdots,$$

welche eine Wurzel in der Umgebung einer kritischen Stelle ($z = \alpha_0$) darstellen. Nach der genauen Untersuchung des regulären Falles kann aber die Betrachtung der singulären Stellen, welche sonst zu den schwierigsten Fragen der ganzen Theorie gehört, mit Leichtigkeit durchgeführt werden. Wir gehen jetzt zu einer für alle regulären und kritischen Stellen gültigen Untersuchung der algebraischen Funktionen über, welche sich von den früher gegebenen dadurch unterscheidet, dafs sie ausser den trivialsten Konvergenzsätzen keine analytischen Hilfsmittel erfordert.

Lassen wir die Beschränkung fallen, dafs die Stelle ($z = \alpha$) regulär sein soll, so kann sich der Charakter der Potenzreihen für u einmal in der Weise ändern, dafs dieselben auch mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $z - \alpha$ beginnen können, wie dies vorher auch für die rationalen Funktionen Z von z in der Umgebung eines Poles bewiesen worden war. Zweitens können jene Reihen, wie soeben erwähnt wurde, nach gebrochenen Potenzen von $z - \alpha$ fortschreiten, und auch hier tritt der Bruch $\frac{1}{z}$ an Stelle des Linearfaktors $z - \alpha$, wenn die Funktion u in der Umgebung der unendlich fernen Stelle $\mathfrak{B}_\infty$ untersucht wird.

Um jetzt das vorgelegte Problem gleich in seiner allgemeinsten Gestalt zu umfassen und zu lösen, stellen wir uns die folgende Aufgabe:

> Es sei u als algebraische Funktion von z durch eine Gleichung:
>
> 1a) $f(u, z) = A_0(z) + A_1(z)\,u + A_2(z)u^2 + \cdots + A_n(z)u^n = 0$
>
> mit beliebigen rationalen Funktionen von z als Koeffizienten definiert. Es sollen die n Wurzeln jener Gleichung in endlicher Umgebung einer beliebigen (endlichen oder der unendlich fernen) Stelle ($z = \alpha$) durch konvergente Reihen
>
> 2) $$u = e_0\,(z-\alpha)^{\varepsilon_0} + e_1\,(z-\alpha)^{\varepsilon_1} + \cdots$$
>
> dargestellt werden, welche nach steigenden Potenzen des zugehörigen Linearfaktors fortschreiten, für welche also
> $$\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots$$
> ist.

Zur Abkürzung setzen wir wieder:

3) $$z - \alpha = \zeta \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{z} = \zeta,$$

je nachdem ($z = \alpha$) eine endliche oder die unendlich ferne Stelle ist, so dafs in allen Fällen u eine algebraische Funktion von ζ wird, welche in der Umgebung der Stelle ($\zeta = 0$) zu untersuchen ist. Dann gehen

die Gleichungskoeffizienten $A_k(z)$ in rationale Funktionen $A_k(\zeta)$ von ζ über. Wir denken uns dieselben nun nach ganzen Potenzen von ζ in der Umgebung von $(\zeta = 0)$ entwickelt, dann ergeben sich $(n+1)$ Reihen von der Form

$$4)\qquad \begin{aligned} A_0(\zeta) &= a_0\zeta^{\varrho_0} + b_0\zeta^{\varrho_0+1} + \cdots \\ A_1(\zeta) &= a_1\zeta^{\varrho_1} + b_1\zeta^{\varrho_1+1} + \cdots \\ &\vdots \\ A_n(\zeta) &= a_n\zeta^{\varrho_n} + b_n\zeta^{\varrho_n+1} + \cdots, \end{aligned}$$

welche, wie oben bewiesen wurde, alle in einer endlichen Umgebung der Stelle $(\zeta = 0)$ konvergieren, und wo die ganzen Zahlen $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_n$, die positiv, negativ oder Null sein können, die Ordnungszahlen der Gleichungskoeffizienten $A_k(\zeta)$ für die Stelle $(\zeta = 0)$, oder, was dasselbe ist, die Ordnungszahlen der ursprünglichen Gleichungskoeffizienten $A_k(z)$ für die zu untersuchende Stelle $(z = \alpha)$ bedeuten, welche in jedem Falle leicht zu bestimmen sind.

Wir substituieren diese Reihen für die Gleichungskoeffizienten, dann geht die linke Seite der Gleichung über in eine Reihe:

$$f(u, \zeta) = \sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta) u^k,$$

welche in Bezug auf u vom n-ten Grade ist, aber in Bezug auf ζ im allgemeinen nicht abbricht. Da aber alle Koeffizienten $A_k(\zeta)$ in endlicher Umgebung der Nullstelle konvergieren, so gilt dasselbe für die Reihe $f(u, \zeta)$ von zwei Variablen.

Nehmen wir nun für u irgend eine nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von ζ fortschreitende Potenzreihe (2):

$$2a)\qquad u_0 = e_0\zeta^{\varepsilon_0} + e_1\zeta^{\varepsilon_1} + \cdots,$$

konvergiert diese ebenfalls in endlicher Umgebung der Nullstelle, und substituieren wir sie an Stelle von u in die konvergente Doppelreihe $f(u, \zeta)$, so geht diese, wenn man die gleich hohen Potenzen von ζ zusammenfafst, in eine ebenfalls nach gebrochenen Potenzen von ζ fortschreitende Reihe

$$5)\qquad f(u_0, \zeta) = C_0\zeta^{\gamma_0} + C_1\zeta^{\gamma_1} + \cdots$$

über, welche auch in einer endlichen Umgebung der Nullstelle gleichmäfsig konvergiert.

Diese Reihe verschwindet nun in der Umgebung von $(\zeta = 0)$ dann und nur dann, d. h. die Reihe u_0 stellt nur dann in jener Umgebung

eine Wurzel der Gleichung $f(u, \zeta) = 0$ dar, wenn die Koeffizienten $C_0, C_1, \ldots$ sämtlich identisch verschwinden; offenbar sind diese ganze Funktionen der noch unbekannten Entwickelungskoeffizienten der Reihe u_0, während die Exponenten $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$ aus den unbekannten Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ linear zusammengesetzt sind. Die Aufgabe, die Reihe u_0 als Wurzel der Gleichung $f(u, \zeta) = 0$ zu bestimmen, reduziert sich also darauf:

> es sollen die unbekannten Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und die unbekannten Koeffizienten $e_0, e_1, e_2, \ldots$ der Reihe u_0 in (2a) so bestimmt werden, dafs sich in der Entwickelung der Reihe:
>
> 5) $$f(u_0, \zeta) = C_0 \zeta^{\gamma_0} + C_1 \zeta^{\gamma_1} + \cdots$$
>
> alle Koeffizienten $C_0, C_1, \ldots$ auf Null reduzieren.

Wir suchen nun zunächst u_0 so zu bestimmen, dafs das Anfangsglied $C_0 \zeta^{\gamma_0}$ in (5) verschwindet, und wir zeigen, dafs durch diese Forderung nur das Anfangsglied $e_0 \zeta^{\varepsilon_0}$, und zwar genau n-deutig bestimmt wird, entsprechend den Anfangsgliedern der Potenzreihen, in welche, wie wir zeigen werden, auch in diesem allgemeinen Falle die n Gleichungswurzeln in der Umgebung der Nullstelle entwickelt werden können.

Ersetzt man nun auf der linken Seite der gegebenen Gleichung:

$$f(u, \zeta) = A_0(\zeta) + A_1(\zeta) u_0 + A_2(\zeta) u_0^2 + \cdots + A_n(\zeta) u_0^n$$

die Koeffizienten $A_k(\zeta)$ durch ihre Entwickelungen (4) und u durch die noch unbekannte Reihe u_0, so ergiebt sich für $f(u_0, \zeta)$ die Reihe:

6) $$f(u_0, \zeta) = (a_0 \zeta^{\varrho_0} + b_0 \zeta^{\varrho_0 + 1} + \cdots) + (a_1 \zeta^{\varrho_1} + \cdots)(e_0 \zeta^{\varepsilon_0} + e_1 \zeta^{\varepsilon_1} + \cdots)$$
$$+ (a_2 \zeta^{\varrho_2} + \cdots)(e_0 \zeta^{\varepsilon_0} + \cdots)^2 + \cdots + (a_n \zeta^{\varrho_n} + \cdots)(e_0 \zeta^{\varepsilon_0} + \cdots)^n,$$

und man erkennt ohne weiteres, dafs die Summe der Anfangsglieder der $(n+1)$ Produkte $A_k(\zeta) u_0^k$ gleich:

7) $$f_0(\zeta) = a_0 \zeta^{\varrho_0} + a_1 e_0 \zeta^{\varrho_1 + \varepsilon_0} + a_2 e_0^2 \zeta^{\varrho_2 + 2\varepsilon_0} + \cdots + a_n e_0^n \zeta^{\varrho_n + n\varepsilon_0}$$

ist, und dafs man für einen beliebig gegebenen Wert des Exponenten ε_0 das Anfangsglied $C_0 \zeta^{\gamma_0}$ von $f(u_0, \zeta)$ einfach findet, wenn man in $f_0(\zeta)$ alle diejenigen Glieder $a_i e_0^i \zeta^{\varrho_i + i\varepsilon_0}$ zusammenfafst, für welche die Exponenten $\varrho_i + i\varepsilon_0$ den kleinsten Wert besitzen.

Hieraus folgt zunächst, dafs ε_0 nicht so gewählt werden darf, dafs nur einer der in $f_0(\zeta)$ auftretenden Exponenten von ζ:

8) $$\varrho_0, \quad \varrho_1 + \varepsilon_0, \quad \varrho_2 + 2\varepsilon_0, \ldots \varrho_n + n\varepsilon_0$$

den kleinsten Wert besitzt; denn wäre einer der Exponenten, etwa $\varrho_k + k\varepsilon_0$, kleiner als alle anderen $\varrho_i + i\varepsilon_0$, so begänne ja die Ent-

wickelung von $f(u_0, \zeta)$ mit dem einen Gliede niedrigster Ordnung $a_k c_0^k \zeta^{\varrho_k + k\varepsilon_0}$, und u_0 könnte somit in der Umgebung der Stelle $(\zeta = 0)$ nur dann eine Wurzel darstellen, wenn der Koeffizient $a_k c_0^k$ oder, da $a_k \gtrless 0$ ist, wenn c_0 verschwände. Es mufs demnach der Exponent ε_0 des Anfangsgliedes von u_0 notwendig so gewählt werden, dafs mindestens zwei von den Exponenten der Reihe (8), etwa $\varrho_g + g\varepsilon_0$ und $\varrho_l + l\varepsilon_0$, zugleich den kleinsten Zahlenwert haben, d. h. dafs die beiden Bedingungen erfüllt werden:

$$9)\qquad \begin{aligned} \gamma_0 = \varrho_g + g\varepsilon_0 &= \varrho_l + l\varepsilon_0 \\ \varrho_k + k\varepsilon_0 &\geqq \gamma_0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \end{aligned}$$

Sollen zwei Exponenten $\varrho_g + g\varepsilon_0$ und $\varrho_l + l\varepsilon_0$ einander gleich sein, so ergiebt sich hieraus für ε_0 der Wert:

$$10)\qquad \varepsilon_0 = -\frac{\varrho_l - \varrho_g}{l - g},$$

und man erhält so eine endliche Anzahl von möglichen Exponenten ε_0; man kann dann für alle diese leicht entscheiden, ob auch die zweite Bedingung in (9) für das so bestimmte ε_0 erfüllt ist. Man findet aber mit einem Schlage alle möglichen Exponenten ε_0, wenn man die folgende geometrische Repräsentation anwendet, welche in einem einfachen Falle bereits von Newton angegeben und später von De Gua, Cramer, Puiseux u. A. benutzt wurde.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem denken wir uns die $(n+1)$ Punkte fixiert:

$$\mathfrak{A}_0 = (0, \varrho_0), \quad \mathfrak{A}_1 = (1, \varrho_1), \quad \mathfrak{A}_2 = (2, \varrho_2), \ldots \mathfrak{A}_n = (n, \varrho_n),$$

so dafs allgemein die Abscisse des Punktes $\mathfrak{A}_i$ der Index i des Gleichungskoeffizienten $A_i(\zeta)$ oder $A_i(z)$ ist, während seine Ordinate gleich der Ordnungszahl ϱ_i von $A_i(z)$ in Bezug auf die zu untersuchende Stelle $(z = \alpha)$ ist. Denkt man sich nun alle jene Punkte $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n$ durch parallele Strahlen auf die Ordinatenachse projiziert, und sind $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots \mathfrak{C}_n$ die Projektionen jener $(n+1)$ Punkte, so ist allgemein die Ordinate von $\mathfrak{C}_i$ gleich

$$\varrho_i + i\,tg\,\varphi \qquad (i = 0, 1, \ldots n),$$

wenn φ der Steigungswinkel der Projektionsstrahlen ist. Setzt man also:

$$\varepsilon_0 = tg\,\varphi,$$

bezeichnet man also mit ε_0 die Steigung jener Projektionsstrahlen $\overline{\mathfrak{A}_i \mathfrak{C}_i}$, so sind die Ordinaten der $(n+1)$ Projektionen

$$\mathfrak{C}_0, \quad \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_n$$

bzw. gleich:

$$\varrho_0, \quad \varrho_1 + \varepsilon_0, \quad \varrho_2 + 2\varepsilon_0, \ldots \varrho_n + n\varepsilon_0,$$

sie stimmen also mit den Exponenten (8) der Funktion $f_0(\xi)$ in (7) überein.

Also wird den beiden Bedingungen (9) stets und nur dann genügt, wenn man die Steigung ε_0 der Projektionsstrahlen so wählt, daſs von den $(n+1)$ Projektionspunkten $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \ldots \mathfrak{C}_n$ die beiden untersten, etwa $\mathfrak{C}_g$ und $\mathfrak{C}_l$, zusammenfallen, und dieser Bedingung wird wieder dann und nur dann entsprochen, wenn als Projektionsstrahl eine Sehne $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ so gewählt wird, daſs alle anderen Punkte $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n$ oberhalb oder auf jener Sehne, bzw. ihrer Verlängerung liegen, wenn jene Sehne also das Punktsystem $(\mathfrak{A}_0, \ldots \mathfrak{A}_n)$ nach unten begrenzt.

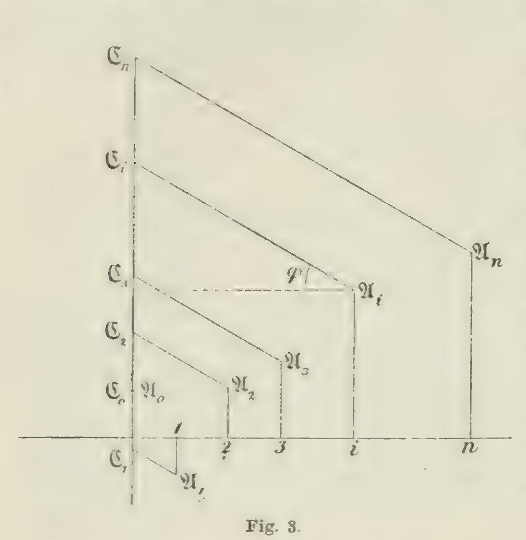


Fig. 3.

Alle diese Begrenzungssehnen und damit alle möglichen Werte von ε_0 findet man somit durch die folgende einfache Konstruktion: Man verbinde den letzten Punkt $\mathfrak{A}_n$ durch eine Gerade $\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_u$ mit demjenigen Punkte $\mathfrak{A}_u$, welcher von $\mathfrak{A}_n$ aus gesehen am tiefsten liegt. Falls mehrere Punkte auf dieser Sehne liegen sollten, wähle man für $\mathfrak{A}_u$ den äuſsersten von jenen Punkten. Hierauf verbinde man $\mathfrak{A}_u$ genau ebenso mit demjenigen von den früheren Punkten, $\mathfrak{A}_t$ durch die Gerade $\overline{\mathfrak{A}_u\mathfrak{A}_t}$, welche von $\mathfrak{A}_u$ aus gesehen am tiefsten erscheint, und fahre in derselben Weise fort, bis zuletzt ein Punkt $\mathfrak{A}_s$ mit dem ersten Punkte $\mathfrak{A}_0$ durch eine Sehne $\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}$ verbunden wird. Auf diese Weise ergiebt sich ein nach unten konvexes Polygon

$$\overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_u\mathfrak{A}_t} \ldots \overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0},$$

durch welches die Punktreihe $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n)$ nach unten begrenzt wird.*)

Es sei nun $\overline{\mathfrak{A}_l\mathfrak{A}_g}$ eine jener Begrenzungssehnen, $\mathfrak{A}_l = (l, \varrho_l)$ ihr Anfangspunkt und $\mathfrak{A}_g = (g, \varrho_g)$ ihr Endpunkt, so daſs $l > g$, also in

*) In Fig. 4 S. 46 ist ein Beispiel für den Fall von drei Begrenzungssehnen gezeichnet.

der Reihe $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n)$ $\mathfrak{A}_l$ ein späterer Punkt ist, als $\mathfrak{A}_g$. Dann ist die Steigung ε_0 der Strecke $\overline{\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_g}$ durch die Gleichung:

$$\varepsilon_0 = -\frac{\varrho_l - \varrho_g}{l - g}$$

gegeben, also positiv, negativ oder Null, je nachdem $\varrho_g \gtreqless \varrho_l$ ist. Es seien ferner der Reihe nach etwa:

$$\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_i \ldots \mathfrak{A}_h \mathfrak{A}_g$$

alle diejenigen unter den $(n+1)$ Punkten, welche *auf* jener Sehne und nicht über ihr liegen. Dann ist:

$$\gamma_0 = \varrho_l + l\varepsilon_0 = \varrho_k + k\varepsilon_0 = \varrho_i + i\varepsilon_0 = \cdots = \varrho_h + h\varepsilon_0 = \varrho_g + g\varepsilon_0,$$

während für alle übrigen oberhalb $\overline{\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_g}$ liegenden Punkte $\mathfrak{A}_\lambda$

$$\varrho_\lambda + \lambda\varepsilon_0 > \gamma_0$$

ist. Dann ist der Koeffizient C_0 der niedrigsten Potenz ξ^{γ_0} in (5) offenbar gleich:

$$\varphi(e_0) = a_l e_0^l + a_k e_0^k + a_i e_0^i + \cdots + a_h e_0^h + a_g e_0^g,$$

er besteht nämlich aus allen und nur den Produkten $a_r e_0^r$, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}_r$ auf dieser Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_l \mathfrak{A}_g}$ liegen.

Wählt man also für den Exponenten des Anfangsgliedes von $u_0 = e_0 \xi^{\varepsilon_0} + \cdots$ speziell diesen Wert $\varepsilon_0 = -\frac{\varrho_l - \varrho_g}{l - g}$, so verschwindet der zugehörige Anfangskoeffizient C_0 dann und nur dann, wenn e_0 eine der $l - g$ von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung l^{ten} Grades:

$$\varphi(e) = a_l e^l + \cdots + a_g e^g = 0$$

oder also eine der Wurzeln der Gleichung $(l-g)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\frac{1}{e^g}\varphi(e) = a_l e^{l-g} + a_k e^{k-g} + \cdots + a_g = 0$$

ist. Diese Gleichung besitzt nun genau $l - g$ Wurzeln, welche gleich oder voneinander verschieden sein können, und jede dieser Wurzeln kann als der zum Exponenten ε_0 gehörige Anfangskoeffizient für u_0 gewählt werden.

So ergiebt sich das folgende Resultat, welches der Einfachheit wegen nur für den in Fig. 4 angenommenen Fall von drei Begrenzungssehnen ausgesprochen werden mag, das aber natürlich ganz allgemein gilt:

Damit eine Potenzreihe:

$$u_0 = e_0 (z - \alpha)^{\varepsilon_0} + e_1 (z - \alpha)^{\varepsilon_1} + \cdots$$

eine Wurzel der Gleichung $f(u, z)$ in der Umgebung der beliebig gegebenen Stelle $(z = \alpha)$ darstelle, mufs zunächst der Exponent ε_0 ihres Anfangsgliedes einen der drei Werte

$$\varepsilon_0 = -\frac{\varrho_0 - \varrho_s}{0 - s}, \quad \varepsilon_0' = -\frac{\varrho_s - \varrho_t}{s - t}, \quad \varepsilon_0'' = -\frac{\varrho_t - \varrho_n}{t - n}$$

besitzen, welche der Steigung der drei Begrenzungssehnen:

$$\overline{\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_0}, \quad \overline{\mathfrak{A}_t\mathfrak{A}_s}, \quad \overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_t}$$

gleich sind. Damit ferner e_0 der einem jener drei Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_0', \varepsilon_0''$ entsprechende Anfangskoeffizient sei, mufs e_0 eine von

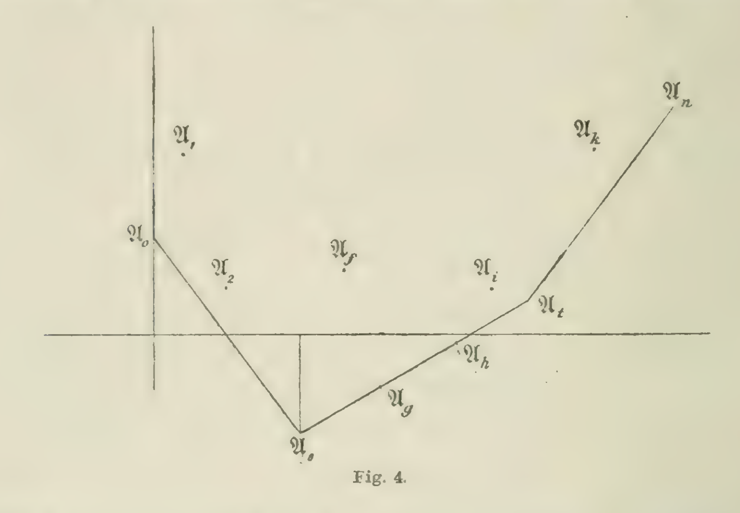


Fig. 4.

Null verschiedene Wurzel von einer der drei zugehörigen Gleichungen sein:

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= a_s e^s + \cdots + a_0 = 0 \\ \varphi_1(e) &= a_t e^t + \cdots + a_s e^s = 0 \\ \varphi_2(e) &= a_n e^n + \cdots + a_t e^t = 0, \end{aligned}$$

deren linke Seiten jedesmal aus denjenigen Produkten $a_k e^k$ gebildet sind, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}_k$ bzw. auf der ersten, zweiten, dritten Begrenzungssehne liegen.

Schon hier sehen wir also, dafs die Exponenten ε nicht notwendig ganze Zahlen sind; denn bereits bei den ersten Exponenten treten ja die Nenner s, $t - s$, $n - t$ auf, welche sich nicht fortzuheben brauchen.

Da so zu den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_0', \varepsilon_0''$ bzw. je s, $t - s$, $n - t$ von Null verschiedene mögliche Koeffizienten e_0 für u_0 gehören, so ergiebt sich die Anzahl der möglichen Anfangsglieder genau gleich:

$$s + (t - s) + (n - t) = n.$$

Im folgenden soll nun weiter gezeigt werden, dafs in der That zu jedem dieser Anfangsglieder eine und nur eine Potenzreihe gehört, welche eine Gleichungswurzel darstellt, d. h., dafs man wirklich auf diese Weise eine Darstellung der n Wurzeln der Gleichung $f(u, z) = 0$ in der Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ erhält.

§ 2.

Wir ziehen aus diesem Resultate gleich eine für das Weitere wichtige Folgerung, welche auch die vorher für die regulären Stellen durchgeführte Untersuchung verallgemeinert.

Wir wollen für den Augenblick bereits als bewiesen annehmen, dafs zu jedem der n Anfangsglieder $e_0(z-\alpha)^{\varepsilon_0}$ eine Potenzreihe gehört, welche je eine der n Gleichungswurzeln in der Umgebung des Punktes $(z = \alpha)$ darstellt. Es sei dieser Punkt eine beliebige endliche Stelle, welche nur nicht zu den Polen der Koeffizienten $a_h(z)$ in der definierenden Gleichung (1):

$$u^n + a_{n-1}(z)u^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0$$

gehört, die aber sehr wohl eine der Nullstellen der Gleichungsdiskriminante sein kann.

Dann sind alle Ordnungszahlen $\varrho_0, \varrho_1, \dots \varrho_{n-1}$ nicht negative ganze Zahlen, und ϱ_n ist sicher gleich Null, da $a_n(z) = 1$ ist. In dem zugehörigen Diagramme besitzen also alle Begrenzungssehnen notwendig eine positive Steigung, oder die Steigung Null, wie die nebenstehende Figur erkennen läfst.

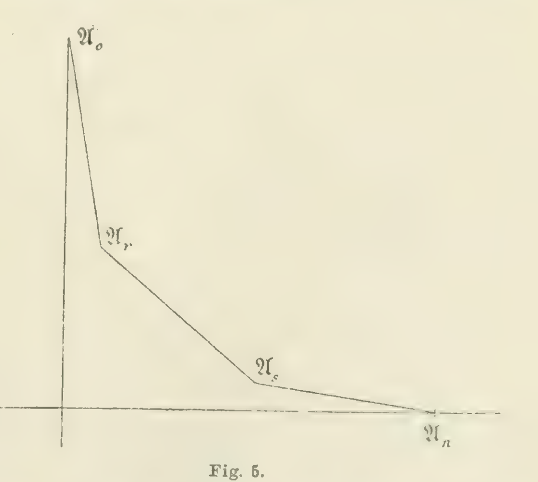


Fig. 5.

Gehört dagegen der Punkt $(z = \alpha)$ zu den Polen der Koeffizienten $a_h(z)$, so ist wieder $\varrho_n = 0$, aber mindestens eine der Zahlen

$$\varrho_{n-1}, \varrho_{n-2}, \dots \varrho_0$$

ist negativ, also mindestens die erste Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}_s}$ hat negative Steigung. Es ergiebt sich also der Satz:

Von den n zu einer endlichen Stelle $(z = \alpha)$ gehörigen Reihen

$$u_0^{(i)} = e_0^{(i)} (z - \alpha)^{\varepsilon_0} + \cdots$$

ist dann und nur dann mindestens eine von negativer Ordnung, wenn diese Stelle zu den Polen der Gleichungskoeffizienten gehört.

Die Anwendung derselben Überlegungen auf die Stelle $(z = \infty)$ ergiebt noch die Folgerung:

Von den zur unendlich fernen Stelle $(z = \infty)$ gehörigen n Reihen:

$$u_0^{(i)} = e_0^{(i)} \left(\frac{1}{z}\right)^{\varepsilon_0} + e_1^{(i)} \left(\frac{1}{z}\right)^{\varepsilon_1} + \cdots$$

ist dann und nur dann mindestens eine von negativer Ordnung, wenn unter den Koeffizienten $a_h(z)$ mindestens einer eine unecht gebrochene rationale Funktion ist.

Denn nur in diesem Falle ist der Grad einer Funktion $a_h(z)$ positiv, also ihre Ordnungszahl ϱ_h für die unendlich ferne Stelle negativ; nur in diesem Falle hat also wieder die letzte Begrenzungssehne eine negative Steigung.

Für die Folge brauchen wir nur die Entwickelung von einer jener n Wurzeln zu finden; ist nämlich bewiesen, dafs jede Gleichung in der Umgebung einer beliebigen Stelle mindestens eine solche Reihe als Wurzel besitzt, so wird nachher sehr einfach gezeigt werden, dafs jede Gleichung für die Umgebung von $(z = \alpha)$ genau so viele solche Wurzeln hat, als ihr Grad angiebt. Wir wollen daher im folgenden nur eine, und zwar eine von denjenigen Reihen

$$e_0 \zeta^{\varepsilon_0} + e_1 \zeta^{\varepsilon_1} + \cdots$$

aufsuchen, deren Ordnungszahl ε_0 den gröfsten Wert hat. Für sie ist also ε_0 einfach die Steigung der letzten Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_s \mathfrak{A}_0}$ in dem Diagramme, d. h. es ist:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varrho_0 - \varrho_s}{s} = \operatorname{Max}\left(\frac{\varrho_0 - \varrho_1}{1}, \frac{\varrho_0 - \varrho_2}{2}, \ldots \frac{\varrho_0 - \varrho_n}{n}\right),$$

wo hier, wie stets im folgenden, unter dem Ausdrucke $\operatorname{Max}(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)$ die gröfste unter den n Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ verstanden werden soll; ebenso werden wir im folgenden mitunter durch $\operatorname{Min}(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)$ die kleinste unter jenen n Zahlen bezeichnen. Spezialisieren wir also unser allgemeines Resultat für diese speziellen Reihen $u_0 = e_0 \zeta^{\varepsilon_0} + \cdots$ von möglichst hoher Ordnung, so ergiebt sich der Satz:

Für die Reihen höchster Ordnung, welche die Gleichung $f(u, z) = 0$ in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{p}\,(z = \alpha)$ befriedigen, ist $\varepsilon_0 = \frac{\varrho_0 - \varrho_s}{s}$, wo s so zu wählen ist, daſs ε_0 möglichst groſs ausfällt, und der Koeffizient e_0 ist eine der s Wurzeln der Gleichung s^{ten} Grades:

$$\varphi_0(e) = a_s e^s + \cdots + a_k e^k + a_h e^h + \cdots + a_0 = 0,$$

wo $a_s, \ldots a_k, a_h, \ldots a_0$ die Anfangsglieder derjenigen Gleichungskoeffizienten $A_s(z), \ldots A_k(z), A_h(z), \ldots A_0(z)$ sind, für welche in dem Diagramme die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}$ auf der Begrenzungssehne liegen, für welche also:

$$\frac{\varrho_0 - \varrho_s}{s} = \cdots = \frac{\varrho_0 - \varrho_k}{k} = \frac{\varrho_0 - \varrho_h}{h} = \cdots = \varepsilon_0$$

ist.

Wir wollen uns die n zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Potenzreihen

$$u_i = e_0^{(i)}\,(z-\alpha)^{\varepsilon_0^{(i)}} + e_1^{(i)}\,(z-\alpha)^{\varepsilon_1^{(i)}} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

so geordnet denken, daſs $\varepsilon_0^{(1)} \geqq \varepsilon_0^{(2)} \geqq \cdots \geqq \varepsilon_0^{(n)}$ ist, und dann diejenigen s Reihen, für welche $\varepsilon_0^{(1)} = \varepsilon_0^{(2)} = \cdots = \varepsilon_0^{(s)}$ den gröſsten Wert besitzt, die s Wurzeln höchster Ordnung nennen. Da für diese die Ordnungszahl $\frac{\varrho_0 - \varrho_s}{s}$ einfach die Ordnungszahl des Quotienten:

$$\left(\frac{A_0(z)}{A_s(z)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

ist, so kann man das vorige Resultat auch so aussprechen:

Die Ordnungszahl der Wurzeln höchster Ordnung in der Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ ist gleich dem gröſsten Werte, welchen die Ordnungszahl der n Quotienten:

$$\frac{A_0(z)}{A_1(z)},\quad \left(\frac{A_0(z)}{A_2(z)}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \left(\frac{A_0(z)}{A_3(z)}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots \left(\frac{A_0(z)}{A_n(z)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

an jener Stelle besitzt, und jene Gleichung besitzt genau s solche Wurzeln höchster Ordnung, wenn der s^{te} jener Quotienten der letzte ist, dessen Ordnungszahl den Maximalwert hat.

Genau ebenso kann man auch unmittelbar aus den Gleichungskoeffizienten die Ordnungszahl ε_0 der Wurzeln niedrigster Ordnung erkennen und ihre Anzahl bestimmen. In der That entspricht diesen die erste Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_{n-r}}$ des Diagramms in Fig. 4, wenn

$\mathfrak{A}_{n-\tau}$ der letzte Punkt jener Punktreihe ist, welcher von $\mathfrak{A}_n$ aus gesehen am tiefsten erscheint; es ist also τ die Anzahl der Wurzeln niedrigster Ordnung und ihre gemeinsame Ordnungszahl:

$$\varepsilon_0 = -\frac{\varrho_n - \varrho_{n-\tau}}{n-(n-\tau)} = \frac{\varrho_{n-\tau} - \varrho_n}{\tau},$$

wo τ so zu wählen ist, daſs dieser Quotient möglichst klein ausfällt. Da aber somit ε_0 nichts anderes ist als die Ordnungszahl der Quotienten $\left(\frac{A_{n-\tau}(z)}{A_n(z)}\right)^{\frac{1}{\tau}}$, so gilt der Satz:

Die Ordnungszahl ε_0 der Wurzeln niedrigster Ordnung in der Umgebung der Stelle $(z=\alpha)$ ist gleich dem kleinsten Werte, welchen die Ordnungszahl der n Quotienten:

$$\frac{A_{n-1}(z)}{A_n(z)}, \quad \left(\frac{A_{n-2}(z)}{A_n(z)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{A_{n-3}(z)}{A_n(z)}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots$$

an jener Stelle besitzt, und jene Gleichung besitzt genau τ solche Wurzeln, wenn der τ^{te} jener Quotienten der letzte ist, dessen Ordnungszahl den Minimalwert hat.

Aus diesem Satze ergiebt sich sofort die Richtigkeit des auf S. 27 Mitte ausgesprochenen Theorems für die ganzen algebraischen Funktionen, wenn man $A_n(z) = 1$ und alle anderen Koeffizienten als ganz voraussetzt.

§ 3.

Es sei nun $e_0 \zeta^{\varepsilon_0}$ das Anfangsglied einer der s Wurzeln höchster Ordnung der Gleichung $f(u, \zeta) = 0$; wir stellen uns jetzt die Aufgabe, alle folgenden Glieder der zugehörigen Reihe

$$u_0 = e_0 \zeta^{\varepsilon_0} + e_1 \zeta^{\varepsilon_1} + \cdots$$

zu bestimmen. Zu diesem Zwecke ersetzen wir in der vorgelegten Gleichung u durch die neue abhängige Variable u', welche durch die Gleichung

$$u = e_0 \zeta^{\varepsilon_0} + u' \tag{1}$$

mit u zusammenhängt; dann ist also:

$$u' = e_1 \zeta^{\varepsilon_1} + e_2 \zeta^{\varepsilon_2} + \cdots \tag{1'}$$

das Aggregat der noch unbekannten folgenden Glieder unserer Reihe. Diese neue Unbekannte ist nun die Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades:

$$f_1(u') = f(e_0\zeta^{\varepsilon_0} + u') = f(e_0\zeta^{\varepsilon_0}) + u' \frac{f'(e_0\zeta^{\varepsilon_0})}{1} + u'^2 \cdot \frac{f''(e_0\zeta^{\varepsilon_0})}{1\cdot 2} + \cdots$$
$$+ u'^n \cdot \frac{f^{(n)}(e_0\zeta^{\varepsilon_0})}{1\cdot 2\ldots n},$$

d. h. u' genügt, als Funktion von ζ betrachtet, ebenfalls einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades, nämlich der folgenden:

$$f_1(u') = A_0'(\zeta) + A_1'(\zeta)u' + A_2'(\zeta)u'^2 + \cdots + A_n'(\zeta)u'^n, \tag{2}$$

in welcher allgemein:

$$A_k'(\zeta) = \frac{f^{(k)}(e_0\zeta^{\varepsilon_0})}{1\cdot 2\ldots k} \tag{2a}$$

gesetzt ist.

Diese neue Gleichung können wir nun genau ebenso behandeln wie die ursprüngliche; wir müssen die Potenzreihe $u_0' = e_1\zeta^{\varepsilon_1} + \cdots$ so zu bestimmen suchen, dafs in der Entwickelung von

$$f_1(u_0', \zeta) = f_1(e_1\zeta^{\varepsilon_1} + \cdots) = C_0'\zeta^{\gamma'_0} + C_1'\zeta^{\gamma'_1} + \cdots$$

nach Potenzen von ζ alle Koeffizienten $C_0', C_1', \ldots$ der Potenzen von ζ der Reihe nach verschwinden; hierzu mufs zunächst wieder der Exponent ε_1 und der Koeffizient e_1 des Anfangsgliedes so bestimmt werden, dafs sich das Anfangsglied C_0' in der obigen Entwickelung auf Null reduziert, und diese Bestimmung kann offenbar wörtlich ebenso gemacht werden, wie dies im vorigen Abschnitt für e_0 und ε_0 angegeben wurde.

Um diese Aufgabe zu lösen, entwickeln wir jetzt die neuen Gleichungskoeffizienten $A_k'(\zeta)$ wieder nach Potenzen von ζ, was offenbar möglich ist, da dieselben zwar nicht rationale Funktionen von ζ, wohl aber von $\zeta^{\frac{1}{s}}$ sind, weil in ζ^{ε_0} der Exponent höchstens den Nenner s besitzen kann. Es sei also wieder:

$$A_k'(\zeta) = \frac{f^{(k)}(e_0\zeta^{\varepsilon})}{1\cdot 2\ldots k} = a_k'\zeta^{\varrho'_k} + \cdots \qquad (k = 0, 1, \ldots n) \tag{3}$$

die Entwickelung jener $(n+1)$ Gleichungskoeffizienten, so konstruieren wir jetzt das neue System der $(n+1)$ Punkte:

$$\mathfrak{A}_0, \qquad \mathfrak{A}_1', \qquad \mathfrak{A}_2', \ldots \mathfrak{A}_n',$$

welche bzw. die Koordinaten:

$$(0, \varrho_0'), \quad (1, \varrho_1'), \quad (2, \varrho_2'), \ldots (n, \varrho_n')$$

haben. Der einzige, aber unwesentliche Unterschied gegen die zur Bestimmung von ε_0 gemachte Konstruktion ist der, dafs die Ordinaten $\varrho_0', \varrho_1', \ldots \varrho_n'$ jener $(n+1)$ Punkte möglicherweise Brüche mit dem Nenner s sein können, während sie vorher ganze Zahlen waren.

Begrenzt man nun diese Punkte von $\mathfrak{A}_n'$ ausgehend nach unten durch ein konvexes Sehnenpolygon, so zeigt man genau wie vorher

dafs der erste Exponent ε_1 von u'_0 notwendig gleich der Steigung von einer unter jenen Begrenzungssehnen sein mufs. Soll ferner die Ordnungszahl ε_1 jenes zweiten Gliedes $e_1\zeta^{\varepsilon_1}$ ebenfalls möglichst grofs sein, so mufs für ε_1 wieder die Steigung der letzten Begrenzungssehne gewählt werden. Wir können und wollen auch hier diese letzte Forderung stellen, da es uns ja nur auf die Bestimmung einer einzigen Potenzreihe ankommt. Nach dem im vorigen Paragraphen auf S. 48 bewiesenen Satze ergiebt sich dann für den Exponenten ε_1 die Bestimmung:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varrho'_0 - \varrho'_{s_1}}{s_1} = \operatorname{Max}\left(\frac{\varrho'_0 - \varrho'_1}{1}, \frac{\varrho'_0 - \varrho'_2}{2}, \dots \frac{\varrho'_0 - \varrho'_n}{n}\right),$$

wo also wieder s_1 so zu wählen ist, dafs jener Quotient so grofs als möglich ausfällt; und der zugehörige Entwickelungskoeffizient e_1 ist eine der s_1 Wurzeln der Gleichung s_1^{ten} Grades:

$$\varphi_1(e) = a'_{s_1}e^{s_1} + \cdots + a'_i e^i + \cdots + a'_0 = 0,$$

wo $a'_{s_1}, \dots a'_i, \dots a'_0$ die Anfangsglieder von allen und nur den Koeffizienten $A'_{s_1}(\zeta), \dots A'_i(\zeta), \dots A'_0(\zeta)$ sind, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}'_{s_1} \dots \mathfrak{A}'_i \dots \mathfrak{A}'_0$ auf der letzten Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}'_{s_1}\mathfrak{A}'_0}$ dieses zweiten Diagramms liegen.

In derselben Weise fortfahrend kann man nun beliebig viele Glieder jener Reihe u_0 berechnen. Man müfste jetzt, nachdem das Glied $e_1\zeta^{\varepsilon_1}$ bestimmt ist, statt u' die neue Unbekannte u'' durch die Gleichung

$$u' = e_1\zeta^{\varepsilon_1} + u''$$

einführen; dann genügt u'' der Gleichung n^{ten} Grades:

$$f_2(u'') = f_1(e_1\zeta^{\varepsilon_1} + u'') = A''_0(\zeta) + A''_1(\zeta)u'' + \cdots + A''_n(\zeta)u''^n_n,$$

wenn wieder allgemein:

$$A''_k(\zeta) = \frac{f_1^{(k)}(e_1\zeta^{\varepsilon_1})}{1\cdot 2 \dots k}$$

gesetzt ist; das Anfangsglied $e_2\zeta^{\varepsilon_2}$ von u'' kann somit aus dieser Gleichung genau auf dieselbe Weise wie vorher das von u' bestimmt werden.

Auf diese Weise erhält man eine Reihe:

$$u_0 = e_0\zeta^{\varepsilon_0} + e_1\zeta^{\varepsilon_1} + e_2\zeta^{\varepsilon_2} + \cdots,$$

deren Glieder durch ein wohldefiniertes Verfahren beliebig weit berechnet werden können. Wir werden jetzt beweisen, dafs diese Reihe nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von ζ fortschreitet, dafs sie in einer endlichen Umgebung der Nullstelle konvergiert, und hier in der That eine Wurzel der vorgelegten Gleichung darstellt.

Fünfte Vorlesung.

Die Reihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ schreiten nach steigenden Potenzen des Linearfaktors $(z-\alpha)$ fort. — Der irreguläre und der reguläre Teil der Reihen u_i. — Die n Wurzeln der Kongruenz $f(u) \equiv 0$. — Die Reihen u_i stellen die n Gleichungswurzeln in der Umgebung der Stelle $(z=\alpha)$ dar. — Untere Grenze für den Konvergenzbereich aller Reihen u_i. — Anwendungen.

§ 1.

Wir zeigen zunächst, dafs die im vorigen Abschnitt bestimmte Reihe $u_0 = c_0 \zeta^{\varepsilon_0} + e_1 \zeta^{\varepsilon_1} + \cdots$ in der That nach wachsenden Potenzen von ζ fortschreitet, dafs also stets $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots$ ist. Da aber allgemein der Exponent ε_{k+1} auf genau dieselbe Art aus ε_k hervorgeht, wie ε_1 aus ε_0 bestimmt wurde, so braucht nur der Beweis geführt zu werden, dafs $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ist. Hierzu führt nun die folgende prinzipiell wichtige Überlegung, mit deren Hilfe nicht nur diese spezielle, sondern auch alle anderen hier sich darbietenden Fragen über jene Reihe beantwortet werden können, mit Ausnahme der Frage nach ihrer Konvergenz, welche dann leicht auf die in der dritten Vorlesung bewiesenen Sätze reduziert werden kann.

Der Gleichmäfsigkeit wegen werde jetzt die auf S. 49 in der Gleichung $\varepsilon_0 = \frac{\varrho_0 - \varrho_s}{s}$ eingeführte Zahl s mit s_0 bezeichnet; es sei also:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varrho_0 - \varrho_{s_0}}{s_0}$$

die Ordnung des Anfangsgliedes unserer Reihe, und

$$\varphi_0(e) = a_{s_0} e^{s_0} + \cdots + a_0$$

die linke Seite der Gleichung s_0^{ten} Grades, deren Wurzel der Anfangskoeffizient c_0 ist. Setzt man dann in $f(u)$ $u = e\zeta^{\varepsilon_0}$, wo e eine Unbestimmte bedeutet, so beginnt die Entwickelung von $f(e\zeta^{\varepsilon_0})$ nach Potenzen von ζ, wie wir sahen, mit $\varphi_0(e)\zeta^{\varrho_0}$, d. h. es besteht für ein variables e die Gleichung:

$$f(e\zeta^{\varepsilon_0}) = \varphi_0(e)\zeta^{\varrho_0} + \psi_0(e,\zeta)\zeta^{\overline{\varrho_0}}, \tag{1}$$

wo in dem zweiten Summanden alle übrigen Glieder mit Ausnahme des Anfangsgliedes zusammengefafst sind, und wo der Exponent $\overline{\varrho}_0$ des gemeinsamen Faktors $\zeta^{\overline{\varrho_0}}$ gröfser als ϱ_0 ist.

Setzt man nun in dieser Identität:

$$e = e_0 + \frac{u'}{\zeta^{\varepsilon_0}},$$

so wird ihre linke Seite:

$$1') \qquad f(e_0\zeta^{\varepsilon_0} + u') = f_1(u') = A_0'(\zeta) + A_1'(\zeta)u' + \cdots + A_n'(\zeta)u'^n,$$

d. h. durch jene Substitution geht die linke, also auch die rechte Seite von (1) in die Gleichung $f_1(u')$ über, deren Wurzel die Reihe

$$u' = e_1\zeta^{\varepsilon_1} + \cdots$$

war. Diese Gleichung liefert daher auch eine direkte Bestimmung der Ordnungszahlen ϱ_k', welche die Gleichungskoeffizienten $A_k'(\zeta)$ in $f_1(u')$ besitzen; entwickelt man nämlich in der aus (1) und (1') folgenden Gleichung:

$$f_1(u') = \zeta^{\varrho_0}\varphi_0\left(e_0 + \frac{u'}{\zeta^{\varepsilon_0}}\right) + \zeta^{\overline{\varrho}_0}\psi_0\left(e_0 + \frac{u'}{\zeta^{\varepsilon_0}}\right)$$

die rechte Seite mit Hilfe des Taylorschen Satzes nach Potenzen von u', so folgt:

$$f_1(u') = \zeta^{\varrho_0}\left(\varphi_0(e_0) + \varphi_0'(e_0)\frac{u'}{\zeta^{\varepsilon_0}} + \frac{\varphi_0''(e_0)}{2!}\frac{u'^2}{\zeta^{2\varepsilon_0}} + \cdots\right)$$

$$+ \zeta^{\overline{\varrho}_0}\left(\psi_0(e_0,\zeta) + \psi_0'(e_0,\zeta)\frac{u'}{\zeta^{\varepsilon_0}} + \frac{\psi_0''(e_0,\zeta)}{2!}\frac{u'^2}{\zeta^{2\varepsilon_0}} + \cdots\right);$$

man erhält also durch Koeffizientenvergleichung für die $(n+1)$ Gleichungskoeffizienten $A_k'(\zeta)$ die folgenden Entwickelungen nach Potenzen von ζ:

$$A_k'(\zeta) = \zeta^{\varrho_0 - k\varepsilon_0}\frac{\varphi_0^{(k)}(e_0)}{k!} + \zeta^{\overline{\varrho}_0 - k\varepsilon_0}\frac{\psi_0^{(k)}(e_0,\zeta)}{k!}.$$

Da aber $\overline{\varrho}_0 > \varrho_0$ war, so folgt, dafs die Ordnung ϱ_k' von $A_k'(\zeta)$ stets und nur dann gleich $\varrho_0 - k\varepsilon_0$ ist, wenn $\varphi_0^{(k)}(e_0) \gtrless 0$, im entgegengesetzten Falle aber sicher gröfser als $\varrho_0 - k\varepsilon_0$ ist. Man kann also für jeden Werth von k:

$$2) \qquad \varrho_k' = \varrho_0 - k\varepsilon_0 + \delta_k \qquad (k = 0, 1, \ldots n)$$

setzen, wo δ_k nur dann verschwindet, wenn $\varphi_0^{(k)}(e_0) \gtrless 0$ ist, sonst aber stets einen positiven Wert hat.

Der Anfangskoeffizient e_0 ist nun eine der s_0 Wurzeln der Gleichung $\varphi_0(e) = 0$; um gleich die allgemeinste Annahme zu machen, werde vorausgesetzt, dafs e_0 eine mehrfache, und zwar eine λ_0-fache Wurzel derselben, dafs also:

$$\varphi_0(e) = (e - e_0)^{\lambda_0}\varphi_0(e)$$

ist, wo jetzt $_0(e_0) \gtrless 0$ ist. Alsdann verschwinden bekanntlich die λ_0 ersten Ableitungen:

$$\varphi_0(c), \quad \varphi_0'(c), \quad \varphi_0''(c), \dots \varphi_0^{(\lambda_0-1)}(c)$$

für $c = c_0$, während $\varphi_0^{(\lambda_0)}(c_0)$ sicher von Null verschieden ist. Daraus folgt, dafs in der obigen Gleichung (2) die λ_0 ersten Zahlen

$$\delta_0, \quad \delta_1, \dots \delta_{\lambda_0-1}$$

sicher positiv, dafs dagegen δ_{λ_0} sicher Null ist, dafs also:

$$2') \quad \begin{gathered} \varrho_0' > \varrho_0, \quad \varrho_1' > \varrho_0 - \varepsilon_0, \quad \varrho_2' > \varrho_0 - 2\varepsilon_0, \dots \varrho_{\lambda_0-1} > \varrho_0 - (\lambda_0 - 1)\varepsilon_0 \\ \varrho_{\lambda_0}' = \varrho_0 - \lambda_0\varepsilon_0 \end{gathered}$$

ist.

Mit Hilfe dieses fundamentalen Resultates kann nun leicht bewiesen werden, dafs $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ ist. In der That war:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varrho'_0 - \varrho'_{s_1}}{s_1} = \operatorname{Max}\left(\frac{\varrho'_0 - \varrho'_1}{1}, \frac{\varrho'_0 - \varrho'_2}{2}, \dots \frac{\varrho'_0 - \varrho'_n}{n}\right).$$

Nun ist aber allgemein wegen (2):

$$\frac{\varrho'_0 - \varrho'_k}{k} = \frac{(\varrho_0 + \delta_0) - (\varrho_0 - k\varepsilon_0 + \delta_k)}{k} = \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k},$$

also ist:

$$\varepsilon_1 = \operatorname{Max}\left(\dots, \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k}, \dots\right) = \varepsilon_0 + \operatorname{Max}\left(\frac{\delta_0 - \delta_1}{1}, \frac{\delta_0 - \delta_2}{2}, \dots \frac{\delta_0 - \delta_n}{n}\right),$$

und von jenen n Brüchen ist mindestens einer, nämlich $\frac{\delta_0 - \delta_{\lambda_0}}{\lambda_0} = \frac{\delta_0}{\lambda_0}$ positiv, weil $\delta_0 > 0$, $\delta_{\lambda_0} = 0$ ist. Also gilt dasselbe a fortiori von dem gröfsten unter jenen Brüchen, d. h. es ist sicher:

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0 + \frac{\delta_0}{\lambda_0} > \varepsilon_0,$$

und hiermit ist der angekündigte Beweis vollständig erbracht, d. h. es ist erwiesen, dafs die Reihe u_0 nach *steigenden* Potenzen von ζ fortschreitet.

§ 2.

Aus denselben Betrachtungen folgt aber jetzt ein weit wichtigeres Resultat für unsere Reihe u_0. Der erste Koeffizient c_0 war eine λ_0-fache Wurzel der ersten Koeffizientengleichung $\varphi_0(c) = 0$ vom Grade s_0. Ganz ebenso ist die zweite Koeffizientengleichung:

$$\varphi_1(c) = 0$$

vom Grade s_1. Wir führen jetzt den Nachweis, dafs stets $s_1 < s_0$ ist, und zwar zeigen wir gleich die Richtigkeit des folgenden sehr viel tiefer gehenden Satzes:

Der Grad s_1 der zweiten Koeffizientengleichung $\varphi_1(e) = 0$ ist höchstens gleich der Zahl λ_0, welche den Grad der Vielfachheit der Wurzel e_0 in der ersten Koeffizientengleichung angiebt.

Jener Grad s_1 ist nämlich die gröfste Zahl k, für welche der Quotient:

$$\frac{\varrho'_0 - \varrho'_k}{k} = \varepsilon_0 + \frac{\delta_0 - \delta_k}{k}$$

möglichst grofs ausfällt. Hieraus folgt aber leicht, dafs s_1 nicht gröfser als λ_0 sein kann. Ist nämlich $k > \lambda_0$, so ist:

$$\frac{\delta_0 - \delta_k}{k} < \frac{\delta_0 - \delta_k}{\lambda_0} \leqq \frac{\delta_0}{\lambda_0} = \frac{\delta_0 - \delta_{\lambda_0}}{\lambda_0},$$

weil $k > \lambda_0$, $\delta_k \geqq 0$ und $\delta_{\lambda_0} = 0$ ist; es ist also stets:

$$\frac{\varrho'_0 - \varrho'_k}{k} < \frac{\varrho'_0 - \varrho'_{\lambda_0}}{\lambda_0},$$

d. h., der Grad s_1 der zweiten Koeffizientengleichung mufs eine der Zahlen $1, 2, \ldots \lambda_0$ sein, was zu beweisen war.

Sind jetzt $\varphi_0(e) = 0$, $\varphi_1(e) = 0$, $\varphi_2(e) = 0, \ldots$ die erste, zweite, dritte, ... Koeffizientengleichung für unsere Reihe, und sind e_0, e_1, $e_2, \ldots$ bzw. λ_0-, λ_1-, λ_2-fache Wurzeln jener Gleichungen u. s. w., so kann man ihre linken Seiten folgendermafsen schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi_0(e) &= (e - e_0)^{\lambda_0} \bar{\varphi}_0(e) \\ \varphi_1(e) &= (e - e_1)^{\lambda_1} \bar{\varphi}_1(e) \\ \varphi_2(e) &= (e - e_2)^{\lambda_2} \bar{\varphi}_2(e) \\ & \cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

wo allgemein $\bar{\varphi}_k(e)$ die Wurzel $e = e_k$ nicht mehr enthält. Sind endlich $s_0, s_1, s_2, \ldots$ die Grade jener Gleichungen, so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, dafs:

$$\begin{aligned} s_1 &\leqq \lambda_0 \leqq s_0, \\ s_2 &\leqq \lambda_1 \leqq s_1, \\ & \cdots\cdots, \end{aligned}$$

und es zeigt sich so, dafs für eine beliebige $(k+1)^{\text{te}}$ Koeffizientengleichung im allgemeinen:

$$s_{k+1} < s_k$$

ist; nur dann kann $s_{k+1} = s_k$ sein, wenn auch $\lambda_k = s_k$ ist, d. h. wenn die nächstvorhergehende Koeffizientengleichung:

$$\varphi_k(e) = (e - e_k)^{s_k} = 0$$

ist, also nur die einzige Wurzel e_k besitzt. Da somit die Grade $s_0, s_1, s_2, \ldots$ der Koeffizientengleichungen, wie weit man auch gehen

mag, immer abnehmen, oder gleich bleiben, so müssen von einem gewissen Gliede an alle folgenden Gleichungen von einem und demselben Grade sein. Es sei $e_\tau \zeta^{\varepsilon_\tau}$ jenes Glied, und:

$$s_\tau = s_{\tau+1} = s_{\tau+2} = \cdots = s,$$

d. h. s der gemeinsame Grad aller jener Koeffizientengleichungen. Nach dem soeben bewiesenen Satze besitzt dann aber jede der folgenden Gleichungen $\varphi_k(e) = 0$ nur je eine Wurzel, d. h. es ist, wie weit man auch in der Reihe u_0 gehen mag:

$$\begin{aligned} \varphi_\tau(e) &= (e - e_\tau)^s \\ \varphi_{\tau+1}(e) &= (e - e_{\tau+1})^s \\ \varphi_{\tau+2}(e) &= (e - e_{\tau+2})^s \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

Im folgenden Paragraphen wird bewiesen werden, dafs jene Gleichungen (1) stets linear werden, d. h. dafs der gemeinsame Exponent s notwendig gleich Eins ist, falls nur die Gleichungsdiskriminante $D(z)$ nicht identisch verschwindet, falls also $f(u)$ nicht mit der Ableitung $f'(u)$ einen gemeinsamen Teiler hat. Für die folgenden Betrachtungen können wir aber auch $s \geqq 1$ voraussetzen.

Auf das in (1) angegebene Resultat gründet sich nun eine wichtige Einteilung der ganzen Reihe $u_0 = \sum_0^\infty e_k \zeta^{\varepsilon_k}$. Wir bezeichnen nämlich das Aggregat:

$$u_0^{(0)} = e_0 \zeta^{\varepsilon_0} + e_1 \zeta^{\varepsilon_1} + \cdots + e_{\tau-1} \zeta^{\varepsilon_{\tau-1}}$$

der τ vor jenem Elemente $e_\tau \zeta^{\varepsilon_\tau}$ stehenden Glieder von u_0 als den irregulären Teil von u_0, und die ganze übrigbleibende unendliche Reihe

$$\overline{u}_0 = e_\tau \zeta^{\varepsilon_\tau} + e_{\tau+1} \zeta^{\varepsilon_{\tau+1}} + \cdots$$

als den regulären Teil von u_0. Nach dem soeben Bewiesenen besteht dann der irreguläre Teil $u_0^{(0)}$ von $u_0 = u_0^{(0)} + \overline{u}_0$ stets aus einer endlichen Anzahl von Gliedern.

Um nun die Fundamentaleigenschaft des regulären Teiles $\overline{u}_0$ zu finden, bilden wir die Gleichung $\overline{f}(\overline{u})$, der $\overline{u}_0$ genügt. Dieselbe kann folgendermafsen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \overline{f}(\overline{u}) = f(u_0^{(0)} + \overline{u}) &= f(u_0^{(0)}) + f'(u_0^{(0)})\,\overline{u} + \frac{f''(u_0^{(0)})}{2!}\,\overline{u}^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(u_0^{(0)})}{n!}\,\overline{u}^n \\ &= \overline{A}_0(\zeta) + \overline{A}_1(\zeta)\,\overline{u} + \overline{A}_2(\zeta)\,\overline{u}^2 + \cdots + \overline{A}_n(\zeta)\,\overline{u}^n = 0. \end{aligned}$$

Entwickelt man hier alle jene Koeffizienten:

$$\bar{A}_k(\zeta) = \frac{f^{(k)}(u_0^{(0)})}{k!} \qquad (k = 0, 1, \ldots n)$$

nach Potenzen von ζ, so erhält man offenbar Reihen, welche im allgemeinen nach gebrochenen Potenzen von ζ fortschreiten, denn ihre Exponenten setzen sich ganzzahlig aus den Exponenten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{\tau-1}$ von $u_0^{(0)}$ zusammen; ist also a der Generalnenner jener τ Exponenten ε, so schreiten die Entwickelungen aller Koeffizienten $\bar{A}_k(\zeta)$ nach ganzen Potenzen von $\zeta^{\frac{1}{a}}$ fort. Die Ordnungszahlen $\bar{\varrho}_0, \bar{\varrho}_1, \ldots \bar{\varrho}_n$ dieser Gleichungskoeffizienten $\bar{A}_0(\zeta), \bar{A}_1(\zeta), \ldots \bar{A}_n(\zeta)$ sind daher ebenfalls Brüche mit demselben Nenner; wir bezeichnen sie durch:

$$\frac{t_0}{a}, \quad \frac{t_1}{a}, \ldots \frac{t_n}{a},$$

wo $t_0, t_1, \ldots t_n$ ganze Zahlen bedeuten. Dann besteht der folgende wichtige Satz:

> Die Exponenten $\varepsilon_\tau, \varepsilon_{\tau+1}, \varepsilon_{\tau+2}, \ldots$ des regulären Teiles der Reihe u_0 sind sämtlich Brüche, deren gemeinsamer Nenner der Generalnenner a der Exponenten $(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_{\tau-1})$ ihres irregulären Teiles ist; die ganze Reihe u_0 schreitet also nach ganzen Potenzen von $\zeta^{\frac{1}{a}}$ fort.

Wir brauchen diesen Satz wieder nur für das erste Glied $e_\tau \zeta^{\varepsilon_\tau}$ des regulären Teiles zu beweisen, da er für alle späteren in genau derselben Weise folgt. Nun ergaben sich aber für e_τ und ε_τ die Bestimmungsgleichungen:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_s}{s}$$

$$2) \qquad \bar{\varphi}(e) = (e - e_\tau)^s = e^s - s e^{s-1} e_\tau + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} e^{s-2} e_\tau^2 - \cdots \pm e_\tau^s = 0.$$

Zunächst ist hier ε_τ die Steigung der letzten Begrenzungssehne $\overline{\mathfrak{A}_s \mathfrak{A}_0}$ des zugehörigen in Fig. 6 gezeichneten Diagramms, und nach dem früher Bewiesenen müssen in $\bar{\varphi}(e)$ die Anfangsglieder von allen und nur den Koeffizienten $\bar{A}_0(\zeta), \bar{A}_1(\zeta), \ldots$ auftreten, für welche die zugehörigen Punkte $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots$ auf und nicht über $\overline{\mathfrak{A}_s \mathfrak{A}_0}$ liegen. Nun treten aber in $\bar{\varphi}(e)$ in (2) alle Glieder mit von Null verschiedenen Koeffizienten auf; es liegen also alle Punkte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{s-1}$ auf jener Begrenzungssehne, und ihre Steigung ε_τ stimmt also auch mit der Steigung ihres

ersten Stückes $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0$ überein; es ergiebt sich somit in diesem Falle für jene Steigung ε_τ der einfachere Ausdruck:

$$\varepsilon_\tau = \frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_1}{1} = \frac{t_0 - t_1}{a},$$

d. h. ε_τ ist in der That ein Bruch mit dem Nenner a, was zu beweisen war.

Ersetzen wir also wieder ζ durch den Linearfaktor $z - \alpha$, so ergiebt sich in jedem Falle für u_0 eine Reihe, welche wir in etwas veränderter Bezeichnung folgendermaßsen schreiben können:

$$3)\qquad u_0 = e_h (z-\alpha)^{\frac{h}{a}} + e_{h+1}(z-\alpha)^{\frac{h+1}{a}} + e_{h+2}(z-\alpha)^{\frac{h+2}{a}} + \cdots,$$

wo h wieder eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null sein kann.

Aus der in der dritten Vorlesung durchgeführten Untersuchung des sogenannten regulären Falles folgt, dafs für alle diejenigen endlichen Punkte $(z = \alpha)$, welche nicht Nullstellen der Gleichungsdiskriminante oder Pole der Gleichungskoeffizienten sind, der Nenner a stets gleich Eins ist, denn für alle diese Punkte schritten ja alle n Reihen für die Wurzeln von $f(u, z) = 0$ nach ganzen Potenzen von $(z - \alpha)$ fort. Für jene kritischen Stellen können dagegen gewisse von den zugehörigen Reihen nach gebrochenen Potenzen von $z - \alpha$ fortschreiten; wann dies eintritt, wird eine genauere Untersuchung lehren.

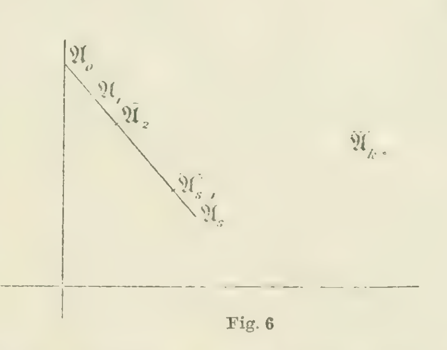


Fig. 6

Die soeben gefundene Reihe (3) befriedigt nun die Gleichung $f(u, z) = 0$ formal; setzt man sie nämlich für u in $f(u, z)$ ein, so erhält man ebenfalls eine nach ganzen Potenzen von $z - \alpha$ fortschreitende Reihe, deren Zahlkoeffizienten alle identisch verschwinden, wenn man sich die Reihe u_0 genügend weit berechnet denkt. In der That sei:

$$u_0^{(l)} = e_h (z-\alpha)^{\frac{h}{a}} + e_{h+1}(z-\alpha)^{\frac{h+1}{a}} + \cdots + e_l (z-\alpha)^{\frac{l}{a}}$$

das Aggregat der $(l+1) - h$ ersten Glieder jener Reihe, dann ist, wie oben bemerkt wurde, die Ordnungszahl von $f(u_0^{(l)}, z)$ gleich $\varrho_0^{(l)}$, und $\varrho_0^{(l)}$

ist ebenfalls ein Bruch $\frac{t_l}{a}$ mit dem Nenner a. Bildet man nun in dieser Weise der Reihe nach die Ordnungszahlen $\varrho_0^{(h)}, \varrho_0^{(h+1)}, \varrho_0^{(h+2)}, \ldots \varrho_0^{(l)} \ldots$ von $f(u_0^{(h)}, z), f(u_0^{(h+1)}, z) \ldots$, so erhält man eine Reihe von Brüchen mit dem Nenner a:

$$\frac{t_h}{a}, \quad \frac{t_{h+1}}{a}, \quad \frac{t_{h+2}}{a}, \ldots$$

und da diese nach (2') auf S. 55 eine wachsende Reihe bilden, so gilt dasselbe auch von ihren ganzzahligen Zählern; die Ordnungszahlen $\frac{t_l}{a}$ von $f(u_0^{(l)})$ wachsen also mit zunehmendem l über jedes Mafs hinaus, oder die Reihe u_0 befriedigt die Gleichung $f(u, z) = 0$ wirklich formal.

§ 3.

Im vorigen Abschnitt ist bewiesen worden, dafs für jede Gleichung $f(u, z) = 0$ und eine beliebige Stelle $(z = \alpha)$ mindestens eine nach Potenzen von $z - \alpha$ fortschreitende Reihe u_0 existiert, durch welche sie formal befriedigt wird. Wir wollen jetzt zuerst nachweisen, dafs die Anzahl der Potenzreihen, welche die gleiche Eigenschaft besitzen, stets gleich n, d. h. gleich dem Grade von $f(u, z)$ ist; erst dann können wir den Beweis erbringen, dafs jene n Reihen in einer endlichen Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ konvergieren und hier die n Wurzeln der Gleichung darstellen.

Zu diesem Zwecke sprechen wir die Beziehung der vorher gefundenen Reihe u_0 zu der Funktion $f(u, z)$ in einer arithmetischen Form aus: Substituiert man für u in die Funktion $f(u, z)$ das Aggregat

$$\overline{u}^0 = e_h (z - \alpha)^{\frac{h}{a}} + e_{h+1} (z - \alpha)^{\frac{h+1}{a}} + \cdots + e_R (z - \alpha)^{\frac{R}{a}}$$

der $(R - h + 1)$ ersten Glieder der Reihe u_0, und wählt man R grofs genug, so beginnt die Entwickelung von $f(\overline{u}_0, z)$ mit einer beliebig hohen Potenz $(z - \alpha)^M$ des zugehörigen Linearfaktors, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen bewiesen wurde, d. h. es wird:

$$1) \qquad f(\overline{u}_0, z) = (z - \alpha)^M G(z),$$

wo $G(z)$ eine Reihe ist, welche ebenfalls nach Potenzen von $(z - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet und für $z = \alpha$ endlich bleibt; und dasselbe ist a fortiori der Fall, wenn man R noch weiter vergröfsert.

Wir wollen auch hier, wie im § 2 der ersten Vorlesung, zwei Funktionen $F(z)$ und $F_1(z)$ von z kongruent modulo $(z - \alpha)^M$ nennen,

wenn ihre Differenz durch den Modul $(z-\alpha)^M$ teilbar ist, wenn also der Quotient

$$\frac{F(z)-F_1(z)}{(z-\alpha)^M}$$

für $z=\alpha$ endlich bleibt. Dann können wir die Gleichung (1) in der Form schreiben:

$$f(\overline{u}_0, z) \equiv 0 \quad (\text{mod } (z-\alpha)^M),$$

und, wir wollen sagen, $\overline{u}_0$ ist eine Wurzel der Kongruenz:

$$\text{1a)} \qquad f(u, z) \equiv 0 \quad (\text{mod } (z-\alpha)^M);$$

wir können auch die beliebig weit verlängerte Reihe u_0 selbst an Stelle von $\overline{u}_0$ nehmen; dann ist diese für jede noch so hohe Potenz $(z-\alpha)^{M_1}$ als Modul eine Wurzel jener Kongruenz. Wir wollen die in den vorigen Abschnitten gefundene Reihe u_0 im folgenden durch u_1 bezeichnen; dann können wir das bis jetzt gefundene Hauptresultat folgendermafsen aussprechen:

Jede Kongruenz n^{ten} Grades:

$$\text{2)} \qquad f(u, z) \equiv 0 \quad (\text{mod } (z-\alpha)^{M_1})$$

für eine beliebig hohe Potenz von $z-\alpha$ als Modul besitzt mindestens eine Kongruenzwurzel:

$$u_1 = \sum_{k=h}^{\infty} e_k (z-\alpha)^{\frac{k}{a}},$$

welche man für einen gegebenen Exponenten M_1 jedesmal nur bis zu einem Gliede $e_R (z-\alpha)^{\frac{R}{a}}$ zu bilden braucht, um sicher zu sein, dafs jenes Aggregat die Kongruenz befriedigt.

Der Beweis nun, dafs jene Kongruenz genau n Wurzeln besitzt, gründet sich auf den Hilfssatz:

Ist $u=u_1$ eine Wurzel der Kongruenz (2), so ist ihre linke Seite modulo $(z-\alpha)^{M_1}$ durch den zugehörigen Linearfaktor teilbar, d. h. es ist:

$$\text{2')} \qquad f(u, z) \equiv (u-u_1) f_1(u, z) \quad (\text{mod } (z-\alpha)^{M_1}),$$

wo $f_1(u, z)$ eine ganze Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in u ist.

In der That, ist $f(u_1)$ durch $(z-\alpha)^{M_1}$ teilbar, so ist:

$$f(u,z) \equiv f(u,z) - f(u_1, z) = A_n(z)(u^n - u_1^n) + A_{n-1}(z)(u^{n-1} - u_1^{n-1}) + \cdots$$
$$+ A_1(z)(u-u_1) = (u-u_1) f_1(u, z),$$

wo in der That:

$$3)\qquad f_1(u,z) = \Sigma A_k(z)\,\frac{u^k - u_1^k}{u - u_1} = B_{n-1}(z)u^{n-1} + \cdots + B_0(z)$$

eine ganze Funktion des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in u ist, deren Koeffizienten $B_l(z)$ offenbar Potenzreihen sind, welche nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreiten.

Auch für diese Funktion $f_1(u,z)$ kann man nun durch unsere Methode eine Reihe u_2 bestimmen, welche nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $(z-\alpha)$ fortschreitet und die Gleichung $f_1(u,z)=0$ formal befriedigt, denn hierzu ist ja die Bedingung notwendig und hinreichend, dafs die Koeffizienten $B_l(z)$ nach Potenzen von $(z-\alpha)$ entwickelbar sind. Nach dem soeben bewiesenen Satze ergiebt sich so für ihre linke Seite $f_1(u,z)$ die folgende Kongruenz:

$$f_1(u,z) \equiv (u-u_2)f_2(u,z) \quad (\text{mod } (z-\alpha)^{M_2}),$$

wo $f_2(u,z)$ eine ganze Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades und M_2 wiederum einen Exponenten bedeutet, der beliebig grofs angenommen werden kann, wenn nur die Reihe u_2 genügend weit berechnet wird. Diese Kongruenz vertritt aber eine Gleichung von der Form:

$$f_1(u,z) = (u-u_2)f_2(u,z) + (z-\alpha)^{M_2}G_2(u,z).$$

Setzt man diesen Wert von $f_1(u,z)$ in (3) ein, so folgt:

$$f(u,z) \equiv (u-u_1)(u-u_2)f_2(u,z) + (u-u_2)(z-\alpha)^{M_2}G_2(u,z) \quad (\text{mod } (z-\alpha)^{M_1}).$$

Wählt man endlich die ganz beliebige Zahl M_2 so grofs, dafs hier das zweite Glied auf der rechten Seite durch $(z-\alpha)^{M_1}$ teilbar ist, so ergiebt sich endlich die Kongruenz:

$$f(u,z) \equiv (u-u_1)(u-u_2)f_2(u,z) \quad (\text{mod } (z-\alpha)^{M_1}).$$

In derselben Weise kann man weiter schliefsen: man bestimme jetzt eine Wurzel u_3 von $f_2(u,z) \equiv 0$ u. s. w., und gelangt so zuletzt zu der für eine beliebig hohe Potenz $(z-\alpha)^M$ und für ein variables u gültigen Kongruenz:

$$4)\qquad f(u,z) \equiv A(u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_n) \quad (\text{mod } (z-\alpha)^M),$$

wo A eine ganze Funktion nullten Grades in u, d. h. eine Funktion von z allein ist, welche sich durch Koeffizientenvergleichung gleich dem Koeffizienten $A_n(z)$ von u^n in $f(u,z)$ ergiebt.

Aus dieser Kongruenz folgt zunächst, dafs z. B. u_2 nicht blofs eine Kongruenzwurzel der abgeleiteten Funktion $f_1(u,z)$, sondern auch eine solche von $f(u,z)$ selbst ist, denn für $u=u_2$ wird die rechte Seite von (4), also auch ihre linke durch $(z-\alpha)^M$ teilbar, und ganz ebenso folgt, dafs alle n Reihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ Wurzeln der Kongruenz (2)

sind. Ebenso leicht erkennt man aber aus (4), dafs keine andere Potenzreihe u_{n+1} eine Wurzel der Kongruenz (2) sein kann. Substituiert man nämlich $u = u_{n+1}$ in (4), so müfste:

$$f(u_0, z) \equiv A_n(u_{n+1} - u_1)(u_{n+1} - u_1) \ldots (u_{n+1} - u_n) \equiv 0 \mod (z-\alpha)^M$$

sein, und zwar für eine beliebig hohe Potenz von $z-\alpha$, wenn man jene $(n+1)$ Reihen $u_1, u_2, \ldots u_{n+1}$ genügend weit verlängert denkt. Aber jenes Produkt von $(n+1)$ Faktoren kann nur dann durch eine beliebig hohe Potenz von $z-\alpha$ teilbar sein, wenn mindestens einer seiner Faktoren eine beliebig hohe Potenz dieses Linearfaktors enthält, und dies ist wiederum nur dann der Fall, wenn entweder $A_n(z) = 0$ ist, oder wenn u_{n+1} einer der n Reihen $u_1, \ldots u_n$ gleich ist. Also ergiebt sich der Satz:

Jede Funktion n^{ten} Grades $f(u, z)$ besitzt für eine beliebig hohe Potenz $(z-\alpha)^M$ als Modul stets genau n Kongruenzwurzeln:

$$u_1, \quad u_2, \ldots u_n,$$

welche sämtlich in Potenzreihen entwickelt werden können, die nach ganzzahligen Potenzen bzw. von:

$$(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}, \quad (z-\alpha)^{\frac{1}{b}}, \ldots (z-\alpha)^{\frac{1}{c}}$$

fortschreiten, und es besteht alsdann für variable Werte von u und z die Kongruenz:

$$f(u, z) \equiv A_n(z)(u-u_1) \ldots (u-u_n) \quad (\text{mod } (z-\alpha)^M).$$

Es sei nun u_1 eine jener n Kongruenzwurzeln, welche nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreiten möge. Dann besteht die identische Gleichung:

$$5) \qquad f(u_1, z) - (z-\alpha)^M G\left((z-\alpha)^{\frac{1}{a}}\right) = 0,$$

wo M eine beliebig grofse Zahl und $G\left((z-\alpha)^{\frac{1}{a}}\right)$ nach positiven Potenzen von $(z-\alpha)$ fortschreitet, und welche besagt, dafs $f(u_1, z)$ mindestens durch $(z-\alpha)^M$ teilbar ist. Denkt man sich auf der linken Seite dieser identischen Gleichung die mit

$$1, \quad (z-\alpha)^{\frac{1}{a}}, \quad (z-\alpha)^{\frac{2}{a}}, \ldots (z-\alpha)^{\frac{a-1}{a}}$$

multiplizierten Glieder zusammengefafst, so erhält man eine neue identische Gleichung:

5a) $$\mathfrak{A}_0(z) + \mathfrak{A}_1(z)(z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + \cdots + \mathfrak{A}_{a-1}(z)(z-\alpha)^{\frac{a-1}{a}} = 0,$$

wo die Koeffizienten Potenzreihen sind, welche nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)$ fortschreiten. Aber diese zweite Gleichung kann nur identisch erfüllt werden, wenn die a Reihen $\mathfrak{A}_k(z)$ ebenfalls identisch verschwinden; denn wäre dies nicht der Fall, und ist $\mathfrak{A}_h(z)$ in der Reihe der Funktionen $\mathfrak{A}_0(z), \mathfrak{A}_1(z), \ldots \mathfrak{A}_{a-1}(z)$ die erste, deren Ordnungszahl λ_h möglichst klein ist, so beginnt die Entwickelung der linken Seite mit der Potenz $(z-\alpha)^{\lambda_h+\frac{h}{a}}$, und dieses Glied kann sich weder gegen ein früheres noch gegen ein späteres fortheben.

Ersetzt man aber auf der linken Seite der ursprünglichen Gleichung (5a) $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ durch den konjugierten Wert $\omega(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$, wo

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{a}h} \qquad (h = 1, 2, \ldots a-1)$$

eine der a^{ten} Wurzeln der Einheit ist, und ordnet wieder in derselben Weise, wie vorher, so geht diese linke Seite über in:

$$\mathfrak{A}_0(z) + \mathfrak{A}_1(z)\omega \cdot (z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + \mathfrak{A}_2(z)\omega^2 \cdot (z-\alpha)^{\frac{2}{a}} + \cdots$$
$$+ \mathfrak{A}_{a-1}(z)\omega^{\frac{a-1}{a}}(z-\alpha)^{\frac{a-1}{a}},$$

und auch diese verschwindet, da die a Koeffizienten $\mathfrak{A}_h(z)$, wie oben bewiesen, identisch Null sind. Also bleibt die obige Gleichung bestehen, wenn man statt der Wurzel $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ alle ihre a konjugierten Werte setzt, welche sich von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ durch die a^{ten} Wurzeln der Einheit unterscheiden. Durch diese Substitution erhält man aber aus der Reihe u_1 genau a konjugierte Reihen $u_1, u_2, \ldots u_a$, und aus den a durch dieselbe Substitution aus (5) folgenden Gleichungen:

$$f(u_i, z) - (z-\alpha_0)^M G\left(\omega(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}\right) = 0$$

geht hervor, daſs diese a konjugierten Reihen sämtlich ebenfalls Wurzeln der vorgelegten Kongruenz, also unter den n Kongruenzwurzeln enthalten sind. Andererseits sind sie aber auch offenbar sämtlich voneinander verschieden. Zu jeder Reihe u_1, welche nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, gehört also stets ein Cyklus von a konjugierten Reihen $u_1, u_2, \ldots u_a$, welche aus u_1

dadurch hervorgehen, dafs man $(z-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ durch seine α konjugierten Werte ersetzt.

Der Einfachheit wegen wollen wir wieder mit dem Koeffizienten $A_n(z)$ von u^n durchdividieren, sodafs derselbe gleich Eins wird. Aus der dann sich ergebenden Kongruenz:

$$u^n + a_{n-1}(z)u^{n-1} + \cdots + a_0(z) \equiv (u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_n) \pmod{(z-\alpha)^M}$$

folgen dann durch Koeffizientenvergleichung genau wie im § 1 der dritten Vorlesung die n Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma u_i & \equiv -a_{n-1}(z) \\ \Sigma u_i u_k & \equiv +a_{n-2}(z) \\ \vdots & \\ u_1 u_2 \ldots u_n & \equiv (-1)^n a_0(z) \end{array}\right\} \bmod (z-\alpha)^M$$

d. h. die elementaren symmetrischen Funktionen jener n Kongruenzwurzeln sind den Gleichungskoeffizienten mit abwechselnden Vorzeichen kongruent, und ferner folgt genau wie a. a. O. der allgemeinere Satz, dafs jede symmetrische Funktion jener n Kongruenzwurzeln einer bestimmten rationalen Funktion von z kongruent wird für eine beliebig hohe Potenz von $z-\alpha$ als Modul, wenn nur jene Reihen u_k genügend weit verlängert werden; und zwar ist jene symmetrische Funktion der n Kongruenzwurzeln derjenigen rationalen Funktion von z kongruent, der die entsprechende symmetrische Funktion der Gleichungswurzeln gleich ist. Ist speziell $D(z)$ wieder die Gleichungsdiskriminante, so ist also:

$$\prod_{i=1}^{n} f'(u_i) = \prod_{g \gtrless k} (u_g - u_k) \equiv D(z) \pmod{(z-\alpha)^M}.$$

Aus diesen Thatsachen ziehen wir zunächst die Folgerung, dafs die n Reihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ sicher von einander verschieden sind, wenn nur die Gleichungsdiskriminante $D(z)$ nicht identisch verschwindet. Wären nämlich zwei von jenen Reihen identisch, so wäre ja das Differenzenprodukt jener n Reihen:

$$D(u_1, u_2, \ldots u_n) = \prod_{g \gtrless k} (u_g - u_k)$$

identisch Null; nach dem soeben bewiesenen Satze ist aber diese symmetrische Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_n$ für eine beliebig hohe Potenz

$(z-\alpha)^M$ der Diskriminante $D(z)$ der Gleichung $f(u, z) = 0$ kongruent, welche wir auf S. 26 betrachtet haben. Also müfste diese letztere Funktion für jede noch so hohe Potenz $(z-\alpha)^M$ der Kongruenz genügen:

$$D(z) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ (z-\alpha)^M),$$

was offenbar nur dann möglich ist, wenn $D(z) = 0$ ist, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Ferner wollen wir aus diesem Satze ein bereits vorher auf S. 57 angekündigtes wichtiges Resultat ableiten. Ist wieder $\zeta = z - \alpha$ und

$$u_1 = e_h \zeta^{\varepsilon_h} + e_{h+1} \zeta^{\varepsilon_h + 1} + \cdots$$

die Potenzreihe für eine der n Wurzeln, so genügte jeder Koeffizient e_k einer Gleichung $\varphi_k(e) = 0$; die Grade dieser Gleichungen bildeten eine abnehmende Reihe, und von einem Gliede $e_\tau \zeta^{\varepsilon_\tau}$ an sind alle folgenden Gleichungen $\varphi_\tau(e) = 0$, $\varphi_{\tau+1}(e) = 0, \ldots$ von gleichem Grade s, und jede ist die s^{te} Potenz eines Linearfaktors.

Wir zeigen jetzt, dafs, falls die Gleichung $f(u) = 0$ nicht überall gleiche Wurzeln hat, falls also ihre Diskriminante nicht identisch verschwindet, stets $s = 1$ ist, dafs also alle regulären Koeffizienten $e_\tau, \ldots$ einfach durch lineare Gleichungen bestimmt werden. Ist nämlich:

$$u_1^{(r)} = e_h \zeta^{\varepsilon_h} + \cdots + e_r \zeta^{\varepsilon_r}$$

das Aggregat der $(r - h + 1)$ Anfangsglieder von u_1, und wird r so grofs gewählt, dafs $f(u_1^{(r)}, z)$ bereits eine sehr hohe Ordnung hat, so wird:

$$u_1 = u_1^{(r)} + \bar{u}_1, \qquad \bar{u}_1 = e_{r+1} \zeta^{\varepsilon_r + 1} + \cdots$$

und $\bar{u}_1$ ist eine Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades:

$$\bar{f}(\bar{u}) = f(u_1^{(r)} + \bar{u}_1) = f(u_1^{(r)}) + f'(u_1^{(r)})\bar{u} + \frac{f''(u_1^{(r)})}{2!}\bar{u}^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(u_1^{(r)})}{n!}\bar{u}^n;$$

der Exponent ε_{r+1} des folgenden Gliedes ist dann durch die Gleichung bestimmt:

$$\varepsilon_{r+1} = \mathrm{Max}\left(\frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_1}{1}, \frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_2}{2}, \ldots \frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_n}{n}\right),$$

wenn $\bar{\varrho}_0, \bar{\varrho}_1, \ldots \bar{\varrho}_n$ die Ordnungszahlen von $f(u_1^{(r)})$, $f'(u_1^{(r)}) \ldots f^{(n)}(u_1^{(r)})$ bedeuten. Nun kann die Ordnungszahl $\bar{\varrho}_0$ von $f(u_1^{(r)})$ beliebig grofs gemacht werden, wenn nur r genügend grofs gewählt wird; dagegen bleibt die Ordnungszahl $\bar{\varrho}_1$ von $f'(u_1^{(r)})$ unterhalb einer endlichen Grenze, wie grofs auch r angenommen ist, denn sonst wäre ja $f'(u_1)$ selbst von beliebig hoher Ordnung, und das Gleiche wäre für das Produkt:

$$f'(u_1) f'(u_2) \ldots f'(u_n) = D(z)$$

der Fall, während die Diskriminante $D(z)$ in Bezug auf jede Stelle von bestimmter endlicher Ordnung ist, es sei denn, dafs sie identisch verschwindet, eine Möglichkeit, die wir oben ausgeschlossen haben. Ebenso bleiben die Ordnungszahlen $\bar{\varrho}_2, \bar{\varrho}_3, \dots \bar{\varrho}_n$ offenbar stets oberhalb einer endlichen unteren Grenze $\bar{\varrho}$, sodass für $i = 2, 3, \dots n$

$$\frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_i}{i} < \frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}}{2}$$

ist. Wählt man also nur r so grofs, dafs $\bar{\varrho}_0 > 2\bar{\varrho}_1 - \bar{\varrho}$ wird, so ist sicher $\frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_1}{1} > \frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}}{2} > \frac{\bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_i}{i}$ d. h. es ist in der That $\varepsilon_{r+1} = \bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_1$ und $s = 1$, was zu beweisen war.

Wir ziehen aus diesem Resultat noch eine Folgerung, mit deren Hilfe wir die sämtlichen regulären Glieder einer Wurzel durch ein sehr einfaches rekurrierendes Verfahren finden können. Ist nämlich $e_{r+1}(z-\alpha)^{\varepsilon_{r+1}}$ ein beliebiges Glied des regulären Teiles einer Wurzel, und

$$u_1^{(r)} = e_0(z-\alpha)^{\varepsilon_0} + e_1(z-\alpha)^{\varepsilon_1} + \cdots + e_r(z-\alpha)^{\varepsilon_r}$$

das Aggregat aller vorhergehenden Glieder, und ist:

$$f(u_1^{(r)}) = a_0(z-\alpha)^{\bar{\varrho}_0} + \cdots, \quad f'(u_1^{(r)}) = a_1(z-\alpha)^{\bar{\varrho}_1} + \cdots,$$

so wird nach dem soeben bewiesenen Satze $\varepsilon_{r+1} = \bar{\varrho}_0 - \bar{\varrho}_1$, während sich der Koeffizient e_{r+1} aus der linearen Gleichung

$$a_0 + a_1 e_{r+1} = 0$$

bestimmt. Also ergiebt sich der Satz:

> Ist $e_{r+1}(z-\alpha)^{\varepsilon_{r+1}}$ ein reguläres Glied von einer der n Wurzeln der Kongruenz $f(u, z) = 0$ und $u^{(r)}$ das Aggregat aller vorhergehenden Glieder, so ist dasselbe gleich dem Anfangsgliede der Entwickelung von:
>
> $$-\frac{f(u^{(r)})}{f'(u^{(r)})}$$
>
> nach Potenzen von $(z-\alpha)$.

Dieser Satz liefert ein sehr expedites Verfahren zur Bestimmung jener Reihen, um so mehr, als von einer leicht bestimmbaren unteren Grenze für ε_{r+1} an das Anfangsglied von $f'(u^{(r)})$ ungeändert bleibt, wie weit man auch in der Reihe fortgehen möge. Dann braucht also jenes Anfangsglied $a_1(z-\alpha)^{\bar{\varrho}_1}$ nur ein für alle Male berechnet zu werden, und man findet jedes folgende Glied einfach dadurch, dafs man $-f(u^{(r)})$ stets durch dasselbe Glied $a_1(z-\alpha)^{\bar{\varrho}_1}$ dividiert.

§ 4.

Es soll jetzt bewiesen werden, dafs die n Reihen $u_1, u_2, \ldots u_n$, welche die Gleichung $f(u, z) = 0$ formal befriedigen, sämtlich innerhalb einer endlichen Umgebung der betrachteten Stelle $(z = \alpha)$ konvergieren und dort die n Gleichungswurzeln darstellen. Diesen an sich schwierigen Beweis können wir nun fast vollständig auf den bereits im § 3 der dritten Vorlesung geführten Beweis für den regulären Fall reduzieren, weil uns die soeben durchgeführten Untersuchungen nicht nur die eine Wurzel u_1, sondern alle n Kongruenzwurzeln modulo $(z-\alpha)^M$ ergeben haben.

Die Reihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ schreiten alle nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $z - \alpha$ fort. Es sei a^* der Generalnenner aller in diesen Reihen auftretenden gebrochenen Exponenten. Setzen wir dann:

$$(z-\alpha)^{\frac{1}{a^*}} = \zeta,$$

so entspricht der Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ die Umgebung der Nullstelle für die neue Variable ζ, und $u_1, u_2, \ldots u_n$ gehen in Potenzreihen über, welche nach ganzen Potenzen von ζ fortschreiten und jetzt folgendermafsen geschrieben sein mögen:

$$1) \qquad u_i = e_{r_i}^{(i)} \zeta^{r_i} + e_{r_i+1}^{(i)} \zeta^{r_i+1} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Es soll dann allgemein r_i die Ordnung oder die Ordnungszahl der Wurzel u_i genannt werden.

Wir brauchen den angekündigten Beweis nur für irgend eine jener n Reihen zu führen; es sei die Bezeichnung von vornherein so gewählt, dafs u_1 diejenige Reihe ist, deren Konvergenz bewiesen werden soll.

Wir werden zeigen, dafs diese allgemeine Aufgabe auf den Konvergenzbeweis für den regulären Fall vollständig reduziert werden kann, wenn man voraussetzen darf, dafs die Ordnungszahl r_1 der zu untersuchenden Reihe u_1 positiv ist, während die Ordnungszahlen $r_2, r_3, \ldots r_n$ sämtlich negativ oder höchstens Null sind. Offenbar ist diese Voraussetzung im allgemeinen nicht erfüllt, aber man kann die vorgelegte Gleichung durch eine sehr einfache Transformation so umformen, dafs ihre Wurzeln die verlangte Eigenschaft erhalten.

Es sei nämlich jene Voraussetzung nicht erfüllt, und es möge:

$$2) \qquad u_1 = e_{r_1}^{(1)} \zeta^{r_1} + \cdots + e_s^{(1)} \zeta^s + e_{s+1}^{(1)} \zeta^{s+1} + \cdots$$

die Entwickelung der zu untersuchenden Wurzel u_1 bedeuten; wir betrachten dann das Aggregat:

$$u_1^{(0)} = e_{r_1}^{(1)} \zeta^{r_1} + \cdots + e_s^{(1)} \zeta^s$$

der $(s+1)-r_1$ ersten Glieder von u_1, und wählen s beliebig, jedenfalls aber so grofs, dafs die Aggregate der Anfangsglieder von $u_2, u_3, \ldots u_n$ bis zu derselben Potenz ζ^s hin alle von $u_1^{(0)}$ verschieden sind. Dieser Bedingung kann stets genügt werden, da, wie oben bewiesen wurde, die n Reihen u_i sämtlich von einander verschieden sind.

Jetzt führen wir in der ursprünglichen Gleichung $f(u, z) = 0$ an Stelle von u die neue Variable:

$$3)\qquad \overline{u} = \frac{u - u_1^{(0)}}{\zeta^s}, \qquad u = u_1^{(0)} + \zeta^s \overline{u}$$

ein; dieselbe genügt dann offenbar der algebraischen Gleichung:

$$\overline{f}(\overline{u}) = f(u_1^{(0)} + \zeta^s \overline{u}) = f(u_1^{(0)}) + f'(u_1^{(0)})\,\zeta^s \overline{u} + \cdots + \frac{f^{(n)}(u_1^{(0)})}{n!}\,\zeta^{ns}\overline{u}^n$$
$$= \overline{A}_0(\zeta) + \overline{A}_1(\zeta)\overline{u} + \cdots + \overline{A}_n(\zeta)\overline{u}^n = 0,$$

und für ihre n Kongruenzwurzeln $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots \overline{u}_n$ folgen aus (3) unmittelbar die Werte:

$$\overline{u}_i = \frac{u_i - u_1^{(0)}}{\zeta^s}.$$

Also erhält man aus (2) speziell für die erste Wurzel $\overline{u}_1$ die Gleichung:

$$\overline{u}_1 = \frac{u_1 - u_1^{(0)}}{\zeta^s} = e_{s+1}^{(1)}\zeta + e_{s+2}^{(1)}\zeta^2 + \cdots;$$

$\overline{u}_1$ ist also von positiver Ordnung, und zwar ist diese Wurzel, abgesehen von dem Faktor ζ^s, gleich der zu untersuchenden Reihe u_1 nach Weglassung ihrer $(s+1)-r_1$ Anfangsglieder. Von den übrigen Wurzeln $\overline{u}_2, \overline{u}_3, \ldots \overline{u}_n$ ist aber keine einzige von positiver Ordnung, denn wäre dies etwa für:

$$\overline{u}_2 = \frac{u_2 - u_1^{(0)}}{\zeta^s}$$

der Fall, so müfste ja $u_2 - u_1^{(0)}$ mindestens durch ζ^{s+1} teilbar sein, d. h. es wäre $u_1^{(0)}$ auch das Aggregat der Anfangsglieder von u_2, was doch nach der oben gemachten Voraussetzung nicht der Fall ist.

Ersetzt man also die ursprüngliche Gleichung $f(u, \zeta) = 0$ durch die transformierte $\overline{f}(\overline{u}, \zeta) = 0$, so besitzt diese die Eigenschaft, dafs eine und nur eine ihrer Wurzeln $\overline{u}_1$ von positiver Ordnung ist; hat man aber bewiesen, dafs diese Reihe $\overline{u}_1$ in endlicher Umgebung der Nullstelle konvergiert, so gilt dasselbe auch von der ursprünglich zu untersuchenden Reihe

$$u_1 = u_1^{(0)} + \zeta^s \overline{u}_1,$$

da sie sich von jener nur um die Summe $u_1^{(0)}$ einer endlichen Anzahl von Gliedern $e_k^{(1)}\zeta^k$ unterscheidet. Auch hier haben wir aber, wie

nochmals ausdrücklich hervorgehoben werden mag, den Nullpunkt selbst nicht der Umgebung der Stelle $(\zeta = 0)$ hinzuzurechnen; falls nämlich das Aggregat $u_1^{(0)}$ der Anfangsglieder mit negativen Potenzen von ζ beginnt, so wird die Reihe u_1 im Nullpunkte selbst unendlich, konvergiert aber für jeden noch so benachbarten Punkt seiner Umgebung.

Wir können und wollen daher jetzt voraussetzen, dafs schon in der ursprünglichen Gleichung die zu untersuchende Wurzel u_1 die einzige von positiver Ordnung ist, dafs also die n Wurzeln folgendermafsen geschrieben werden können:

4) $$u_1 = \zeta^{\varrho_1} E_1(\zeta), \quad u_2 = \zeta^{-\varrho_2} E_2(\zeta), \ldots u_n = \zeta^{-\varrho_n} E_n(\zeta),$$

wo allgemein $E_i(\zeta)$ eine Einheitsfunktion für die Stelle $(\zeta = 0)$, d. h. eine Potenzreihe von der Ordnung Null, und wo $\varrho_1 = r_1$ eine positive ganze Zahl ist, während $-\varrho_2, -\varrho_3, \ldots -\varrho_n$ negative ganze Zahlen oder Null bedeuten.

Es sei jetzt:

5) $$f(u, \zeta) = A_0(\zeta) + A_1(\zeta)u + \cdots + A_n(\zeta)u^n = 0$$

die zu untersuchende Gleichung, und zwar mögen die Koeffizienten $A_i(\zeta)$ bereits nach Potenzen von ζ entwickelt, und die gröfste in allen enthaltene Potenz von ζ durch Division beseitigt sein, so dafs keine jener $(n+1)$ Potenzreihen von negativer Ordnung, und mindestens eine unter ihnen von der Ordnung Null ist. Dann lehrt schon die einfache Betrachtung des zugehörigen Diagramms in Fig. 7, dafs ihr erster Koeffizient $A_0(\zeta)$ mindestens mit der ersten, der zweite $A_1(\zeta)$ aber genau mit der nullten Potenz von ζ beginnt. In der That liegt nach der soeben gemachten Annahme keiner der $(n+1)$ Punkte $\mathfrak{A}_h$ unter der Horizontalachse, weil der bzw. die tiefstliegenden unter ihnen sich auf jener Achse befinden. Da ferner diese Kongruenz nur eine einzige Wurzel von positiver Ordnung hat, während die Ordnungszahl aller übrigen negativ oder Null ist, so folgt, dafs nur die

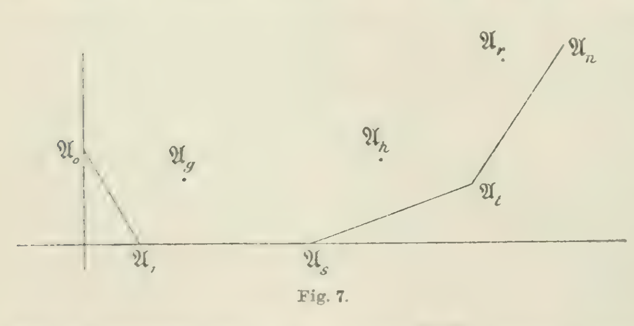


Fig. 7.

letzte Begrenzungssehne, nämlich $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0}$ positive Steigung hat, während alle übrigen Sehnen des Begrenzungspolygons negative Steigung besitzen, oder horizontal verlaufen. Zieht man also durch $\mathfrak{A}_1$ eine Horizontale,

so müssen alle übrigen Punkte $\mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_n$ auf oder über ihr liegen, d. h. $\mathfrak{A}_1$ ist der tiefstliegende oder einer der tiefstliegenden Punkte des Diagramms, und mufs daher auf der Horizontalachse liegen, es ist daher in der That $\varrho_0 > 0$, $\varrho_1 = 0$, während alle folgenden Ordnungszahlen $\geqq 0$ sind.

Ohne Benutzung des Diagramms beweist man denselben Satz einfach so: Da die zu untersuchende Kongruenz die n Wurzeln (4) hat, so besteht für eine beliebig hohe Potenz ζ^M als Modul die Zerlegung:

$$f(z) \equiv A_n(\zeta)(u - \zeta^{\varrho_1} E_1)(u - \zeta^{-\varrho_2} E_2) \ldots (u - \zeta^{-\varrho_n} E_n) \pmod{\zeta^M};$$

die Ordnung des Faktors $A_n(\zeta)$ ist dadurch eindeutig bestimmt, dafs nach Ausführung der Multiplikation alle Koeffizienten von nicht negativer Ordnung in ζ sind, und mindestens einer von ihnen die Ordnung Null hat. Dieser Bedingung wird dann und nur dann genügt, wenn

$$A_n(\zeta) = \zeta^{\varrho_2 + \varrho_3 + \cdots + \varrho_n} E_0(\zeta)$$

gesetzt wird, denn dann ergiebt sich:

$$f(u, \zeta) \equiv E_0 (u - \zeta^{\varrho_1} E_1)(u\zeta^{\varrho_2} - E_2) \ldots (u\zeta^{\varrho_n} - E_n) \pmod{\zeta^M}.$$

In dem entwickelten Produkte sind dann nämlich alle Koeffizienten von nicht negativer Ordnung, und das von u freie Glied wird

$$\pm \zeta^{\varrho_1} E_0 E_1 E_2 \ldots E_n,$$

ist also von positiver Ordnung, während sich der Koeffizient von u für $\zeta = 0$ offenbar auf

$$\mp E_0 E_2 E_3 \ldots E_n$$

reduziert, also in der That von der nullten Ordnung ist, und hiermit ist die aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen.

Denken wir uns also jetzt die Gleichung (5) nach Potenzen von u und ζ geordnet, so erhält man ein Aggregat aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, welches folgendermafsen geschrieben werden kann:

$$a_{10}\zeta + a_{01}u + \sum_{i+k=2,3,\ldots} a_{ik}\zeta^i u^k = 0,$$

wo der Koeffizient a_{01} von u, — das Anfangsglied der Entwickelung von $A_1(\zeta)$ — sicher von Null verschieden ist, und ein konstantes Glied a_{00} gar nicht auftritt, da $A_0(\zeta)$ von positiver Ordnung in ζ ist. Durch Auflösung dieser Gleichung nach u erhält man also eine Gleichung:

$$u = g_{10}\zeta + \sum_{i+k=2,3,\ldots} g_{ik}\zeta^i u^k,$$

in welcher

$$g_{hi} = -\frac{a_{hi}}{a_{01}}$$

zu setzen ist, und welche vollständig mit der auf S. 31 in Nr. 7 angegebenen für den regulären Fall übereinstimmt. Es gelten somit auch alle Folgerungen, welche wir damals aus ihr gezogen hatten. Wir zeigten dort, dafs diese Gleichung stets eine und auch nur eine Lösung:

$$u = e_1 \zeta + e_2 \zeta^2 + \cdots$$

von positiver Ordnung besitzt, und dafs diese stets innerhalb eines endlichen Bereiches konvergiert, welcher von der absoluten Gröfse der Koeffizienten g_{hi} abhängt. Ist nämlich g nicht kleiner als der Maximalwert der absoluten Beträge aller g_{hi}, so ist der Radius des Konvergenzkreises mindestens gleich

$$\frac{1}{(1+2g)^2},$$

liegt also stets oberhalb einer endlichen angebbaren Grenze.

Hieraus folgt also, dafs die Reihe u_1 und ebenso auch die übrigen Reihen $u_2, u_3, \ldots u_n$ sämtlich innerhalb einer endlichen Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ konvergieren. Substituiert man aber irgend eine dieser konvergenten Reihen u_i für u in die ganze rationale Funktion $f(u, z)$, so ergiebt sich wieder eine für denselben Bereich konvergente Reihe, welche nach Potenzen von $z - \alpha$ fortschreitet, und deren Koeffizienten alle identisch verschwinden, weil jene Reihe die Gleichung $f(u, z) = 0$ formal befriedigt. Also verschwindet $f(u_i, z)$ für jenen Bereich ebenfalls identisch, d. h. u_i stellt für jenen Bereich eine der n Wurzeln der Gleichung in der Umgebung dieser Stelle dar, und dasselbe gilt für alle jene n Reihen.

Ist R der Radius desjenigen endlichen Kreises, innerhalb dessen alle jene n Reihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ konvergieren, so besteht für diesen die Gleichung:

$$f(u, z) = A_n(z)(u - u_1)(u - u_2) \ldots (u - u_n); \tag{6}$$

denn die Differenz der linken und rechten Seite ist eine ganze Funktion von u, deren Koeffizienten konvergente Reihen sind, welche nach Potenzen von $z - \alpha$ fortschreiten und deren Koeffizienten sämtlich identisch verschwinden, weil für eine beliebig hohe Potenz $(z - \alpha)^M$ als Modul die Kongruenz:

$$f(u, z) - A_n(z)(u - u_1) \ldots (u - u_n) \equiv 0 \pmod{(z - \alpha)^M}$$

besteht. Also besteht die Gleichung (6) für jene ganze Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$, und aus ihr folgt, dafs für einen beliebigen Punkt

$(z = z_0)$ jener Umgebung die Werte $u_i(z_0)$, welche diese Reihen für $z = z_0$ annehmen, die n Wurzeln sind, welche die Gleichung $f(u, z_0) = 0$ in jenem Punkte besitzt.

Genau ebenso folgt, dafs jede symmetrische Funktion

$$S(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

jener n Potenzreihen innerhalb ihres gemeinsamen Konvergenzbereiches gleich der betreffenden rationalen Funktion von z ist.

Wir hatten nun im § 4 der dritten Vorlesung gezeigt, dafs der Konvergenzradius für alle n Reihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ in der Umgebung jeder Stelle $\mathfrak{p}$ des regulären Gebietes $\bar{\mathfrak{K}}$ von unserer Kugelfläche $\mathfrak{K}$ oberhalb einer und derselben positiven Gröfse ϱ_0 liegt, also niemals unendlich klein werden kann. Dieses Gebiet $\bar{\mathfrak{K}}$ umfafste alle Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ mit Ausnahme von $(h+1)$ beliebig klein anzunehmenden Kreisen, welche mit den $(h+1)$ kritischen Punkten

$$\mathfrak{B}_1, \ldots \mathfrak{B}_h, \quad \mathfrak{B}_\infty$$

als Mittelpunkten auf $\mathfrak{K}$ beschrieben waren. Die jetzt durchgeführte Untersuchung hat gezeigt, dafs der obige Satz richtig bleibt, wenn wir auch jene kritischen Punkte $\mathfrak{B}$ dem regulären Gebiete $\bar{\mathfrak{K}}$ hinzurechnen; denn auch für sie besitzen ja die n zugehörigen Reihen einen von Null verschiedenen Konvergenzradius. Dagegen müssen wir nach wie vor alle Punkte einer beliebig kleinen Umgebung jener Punkte $\mathfrak{B}$ von dem Gebiete $\bar{\mathfrak{K}}$ ausschliefsen, denn wenn sich der Punkt $\mathfrak{p}\,(z = \alpha)$ auf der Kugelfläche einem jener Punkte $\mathfrak{B}$ unbegrenzt annähert, so kann in der That für eine oder mehrere Reihen u_i der Konvergenzradius unter jede noch so kleine Grenze herabsinken. Andererseits kann aber der Radius jener $(h+1)$ Kreise von vornherein so klein gewählt werden, dafs jeder noch so nahe an einem der Mittelpunkte $\mathfrak{B}$ liegende Punkt $\mathfrak{p}$ dem regulären Gebiete $\bar{\mathfrak{K}}$ angehört, nur wird dann die untere Grenze ϱ_0 für den Konvergenzbereich innerhalb $\bar{\mathfrak{K}}$ entsprechend kleiner. Wir sprechen dieses wichtige Resultat in dem folgenden Satze aus:

> Für jeden regulären oder kritischen Punkt $(z = \alpha)$ bzw. $(z = \infty)$ konvergieren alle n zugehörigen Potenzreihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ innerhalb eines Kreises
>
> $$|z - \alpha| < \varrho \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \varrho.$$
>
> dessen Radius ϱ für alle Punkte der Kugelfläche oberhalb einer von Null verschiedenen unteren Grenze ϱ_0 liegt. Jedoch mufs man dann die Punkte ausschliefsen, welche innerhalb einer beliebig klein anzunehmenden Umgebung der kritischen Punkte liegen.

§ 5.

Als eine einfache Anwendung des soeben erhaltenen Resultates untersuchen wir noch etwas genauer die Werte der Gleichungswurzeln in den kritischen Stellen und zeigen, wie man dieselben unmittelbar aus den Gleichungskoeffizienten finden kann. Man erhält die zu einer Stelle $\mathfrak{p}\,(z=\alpha)$ gehörigen Wurzeln $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots u_n^{(0)}$, indem man in den zugehörigen Potenzreihen $u_1, u_2, \ldots u_n$ einfach $(z=\alpha)$ setzt. Hieraus folgt, dafs z. B. $u_1^{(0)}$ in $\mathfrak{p}$ den Wert $(u_1^{(0)}=0)$ oder $(u_1^{(0)}=\infty)$ hat, je nachdem die zugehörige Reihe u_1 mit einer positiven oder einer negativen Potenz von $z-\alpha$ beginnt, je nachdem also die zugehörige Begrenzungssehne eine positive oder negative Steigung besitzt; dagegen hat $u_1^{(0)}$ einen endlichen von Null verschiedenen Wert, wenn die Reihe u_1 mit der nullten Potenz von $z-\alpha$ beginnt, d. h. wenn die zugehörige Begrenzungssehne horizontal verläuft.

Hieraus ergiebt sich ein einfaches Mittel, um aus den Koeffizienten der Gleichung:

$$f(u,z)=A_0(z)+A_1(z)u+\cdots+A_n(z)u^n=0$$

unmittelbar die Anzahl der Wurzeln zu bestimmen, welche für eine beliebige Stelle $(z=\alpha)$ Null bzw. unendlich grofs werden. In der That seien

$$\varrho_0,\quad \varrho_1,\ldots,\varrho_n$$

wie früher die Ordnungszahlen der Koeffizienten $A_h(z)$ für jene Stelle, also die Exponenten der in ihnen enthaltenen Potenzen von $z-\alpha$, und seien ϱ_g und ϱ_k bzw. der erste und der letzte Exponent jener Reihe, welche den kleinsten Wert besitzen, so lehrt ein Blick auf das zugehörige Diagramm in Fig. 8, dafs $\mathfrak{A}_k\mathfrak{A}_g$ die horizontale Begrenzungssehne für das zugehörige Diagramm ist, und dafs die Begrenzungssehnen von $\mathfrak{A}_n$ bis $\mathfrak{A}_k$ negative, die von $\mathfrak{A}_k$ bis $\mathfrak{A}_0$ positive Steigung haben. Mit Hilfe der Ergebnisse unserer früheren Untersuchungen folgt aber hieraus der Satz:

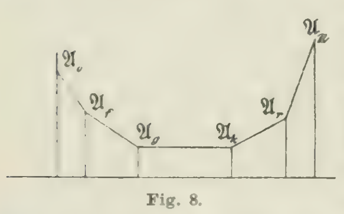


Fig. 8.

Sind in der Reihe der Gleichungskoeffizienten $A_g(z)$ und $A_k(z)$ der erste und der letzte, deren Ordnungszahl für die Stelle $(z=\alpha)$ den kleinsten Wert hat (wobei auch $k=g$ sein kann), so haben an jener Stelle von den n Wurzeln $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots u_n^{(0)})$ genau $(n-k)$ den Wert $(u=\infty)$, und g den Wert Null, während die $(k-g)$ übrigen endliche und von Null verschiedene Werte besitzen; diese Werte sind die $k-g$ von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$a_k e^k+\cdots+a_h e^h+\cdots+a_g e^g=0,$$

wenn $a_k \ldots a_h \ldots a_g$ die Anfangsglieder derjenigen Koeffizienten bedeuten, deren Ordnungszahlen den kleinsten Wert haben.

Beachten wir, daſs für die Stelle $(z = \infty)$ die Ordnungszahl einer rationalen Funktion $A(z)$ gleich dem negativ genommenen Grade ist, so erhalten wir speziell für die Stelle $(z = \infty)$ den Satz:

> Sind in der Reihe der Gleichungskoeffizienten $A_0(z), \ldots A_n(z)$ die beiden Funktionen $A_g(z)$ und $A_k(z)$ die erste und die letzte, deren Grad den gröſsten Wert besitzt, so werden für $(z = \infty)$ genau $(n - k)$ Wurzeln unendlich groſs und genau g Wurzeln unendlich klein, während die $k - g$ übrigen Wurzeln für $(z = \infty)$ endliche und von Null verschiedene Werte erhalten.

Wir denken uns die Gleichung (1) so geschrieben, daſs alle Koeffizienten $A_h(z)$ ganze Funktionen von z ohne gemeinsamen Teiler sind. Dann sind alle Koeffizienten $A_k(z)$ in Bezug auf jede endliche Stelle $(z = \alpha)$ von nicht negativer Ordnung und mindestens einer besitzt die niedrigste Ordnung Null. Dann können wir den folgenden Satz aussprechen, welcher die Ähnlichkeit zwischen den algebraischen und den früher betrachteten rationalen Funktionen von z deutlich hervortreten läſst:

> Es giebt nur eine endliche Anzahl von Stellen $(z = \alpha)$, für welche eine der Wurzeln $u_1, \ldots u_n$ verschwindet oder unendlich groſs wird, und zwar geschieht dies für alle und nur für die Nullstellen von $A_0(z)$ bzw. von $A_n(z)$ und auſserdem eventuell für die Stelle $(z = \infty)$.

Ist nämlich z. B. $A_n(\alpha) = 0$, also $\varrho_n > 0$, so ist nach dem soeben bewiesenen Satze mindestens eine Wurzel unendlich groſs, und das Entsprechende gilt, wenn $A_0(\alpha) = 0$, also $\varrho_0 > 0$ ist.

Aus diesen Sätzen ziehen wir gleich eine für das Weitere sehr wichtige Folgerung, welche ebenfalls die nahe Verwandtschaft der rationalen und der algebraischen Funktionen erkennen läſst:

> Eine algebraische Gleichung, deren Wurzeln für keinen (endlichen oder unendlichen) Wert der Variablen Null oder unendlich werden, besitzt lauter konstante Koeffizienten, ihre Wurzeln sind also n konstante Zahlen.

Denken wir uns nämlich die Koeffizienten wie vorher als ganze Funktionen von z ohne gemeinsamen Teiler geschrieben, so können zunächst $A_0(z)$ und $A_n(z)$ keine einzige Nullstelle besitzen, da ja sonst für sie mindestens eine der n Wurzeln Null oder unendlich wäre. Also sind diese äuſsersten Koeffizienten sicher von z unabhängig. Ferner müssen aber auch die übrigen ganzen Funktionen $A_1(z)$, $A_2(z)$, $\ldots A_{n-1}(z)$

sämtlich in Bezug auf z vom nullten Grade, also ebenfalls Konstanten sein, denn wäre dies nicht der Fall, und wären $A_g(z)$ und $A_k(z)$ diejenigen unter ihnen, deren Grad den gröfsten Wert hat, so wären ja nach dem vorigen Satz genau $n-k$ Wurzeln für $(z=\infty)$ unendlich grofs und g Wurzeln Null. Also ist in diesem Falle die definierende Gleichung:

$$A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + \cdots + A_1 u + A_0 = A_n (u-\beta_1)(u-\beta_2)\ldots(u-\beta_n) = 0,$$

wo alle Koeffizienten A_i konstant sind; ihre Wurzeln sind demnach n gleiche oder verschiedene Konstanten $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)$.

Ist speziell $A_n(z)=1$, also u eine ganze algebraische Funktion von z, so wird keine der n Wurzeln für eine im Endlichen liegende Stelle unendlich grofs, weil dann $A_n(z)$ keine Nullstelle besitzt. Soll umgekehrt u für ein endliches z nicht unendlich werden, so mufs $A_n(z)$ eine Konstante sein, denn enthielte $A_n(z)$ auch nur einen Linearfaktor $z-\alpha$, so würde ja für $z=\alpha$ mindestens eine der n Wurzeln unendlich grofs sein. Für $z=\infty$ dagegen wird in diesem Falle mindestens eine der n Wurzeln unendlich grofs, falls nicht alle anderen Koeffizienten $A_h(z)$ in z vom nullten Grade, also von z ganz unabhängig sind. Ist nämlich $A_k(z)$ der letzte Koeffizient, dessen Grad den gröfsten Wert besitzt, so werden genau $(n-k)$ von jenen Wurzeln für $z=\infty$ ebenfalls unendlich grofs, was zu beweisen war.

Hieraus folgt sofort der wichtige Satz:

> Eine algebraische Funktion u besitzt dann und nur dann keine Unendlichkeitsstelle, wenn sie eine Konstante ist. Die Konstanten sind also die einzigen algebraischen Funktionen, welche überall endlich sind.

Denn damit keine Wurzel für eine endliche Stelle unendlich werde, ist notwendig und hinreichend, dafs u eine ganze algebraische Funktion von z ist, und damit keine einzige Wurzel für $(z=\infty)$ unendlich wird, müssen alle ganzen Funktionen $A_h(z)$ vom nullten Grade, also Konstanten sein.

Eine Stelle $(z=\alpha)$ wurde eine **kritische Stelle** der algebraischen Funktion u genannt, wenn für sie entweder eine Wurzel der zugehörigen Gleichung $f(u,\alpha_0)=0$ unendlich grofs ist, oder wenn mindestens zwei jener Wurzeln einander gleich werden, die entsprechenden Entwickelungen also genau dasselbe Anfangsglied besitzen. Zu diesen kritischen Stellen gehören also zuerst alle Nullstellen der ganzen Funktion $A_n(z)$, weil für sie und für sie allein mindestens eine der Wurzeln $u_i^{(0)}$ unendlich grofs wird; zweitens folgte aber aus der Gleichung:

$$D(z) = \prod (u_g^{(0)} - u_h^{(0)}),$$

dafs für jede andere im Endlichen liegende Stelle $(z = \alpha)$ dann und nur dann von den n endlichen Zahlen $u_h^{(0)}$ zwei einander gleich sind, wenn $D(\alpha) = 0$, d. h. wenn $(z = \alpha)$ eine Nullstelle der Gleichungsdiskriminante ist.

Ist u eine ganze algebraische Funktion, aber keine Konstante, also $A_n(z) = 1$, so ist die unendlich ferne Stelle sicher ein kritischer Punkt, und zu ihm treten nur noch die Nullstellen der Diskriminante hinzu. Unter dem Begriff der kritischen Stelle sind vorläufig alle Punkte zusammengefafst, für welche sich die Wurzeln überhaupt nicht regulär verhalten. Erst später werden wir die verschiedenen möglichen Fälle vollständig scheiden können, und dann wird dieser für das folgende noch bequeme Sammelbegriff von selbst entbehrlich werden.

Zu den kritischen Stellen gehören sicher auch diejenigen, für welche eine der Reihen u_i nach gebrochenen Potenzen von $(z - \alpha)$ fortschreitet. Dies folgt bereits aus der Thatsache, dafs für alle regulären Punkte $(z = \alpha)$ alle n Reihen u_i nach ganzen Potenzen von $z - \alpha$ fortschreiten; jetzt können wir dasselbe aber auch direkt einsehen. In der That, soll die Stelle $(z = \alpha)$ keine kritische Stelle sein, so darf keine der n Reihen u_h mit negativen Potenzen von $(z - \alpha)$ beginnen. Schreitet nun etwa u_1 nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fort, so gehört zu u_1 ein Cyklus konjugierter Reihen:

$$u_1 = b_0 + b_1 (z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + b_2 (z-\alpha)^{\frac{2}{a}} + \cdots$$

$$u_2 = b_0 + b_1 \omega (z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + b_2 \omega^2 (z-\alpha)^{\frac{2}{a}} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$u_a = b_0 + b_1 \omega^{a-1} (z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + b_2 \omega^{2(a-1)} (z-\alpha)^{\frac{2}{a}} + \cdots,$$

welche für $(z = \alpha)$ alle einander gleich, nämlich gleich b_0 werden. Da die Anzahl aller kritischen Punkte endlich ist, so gilt dasselbe a fortiori für diese speziellen Punkte; wir erhalten so als einfache Folgerung den wichtigen Satz:

> Die Anzahl der Stellen $(z = \alpha)$, für welche nicht alle Wurzeln u_h nach ganzen Potenzen von $z - \alpha$ fortschreiten, ist stets endlich.

Sechste Vorlesung.

Abhängigkeit der Potenzreihen $u(\mathfrak{p})$ von der Stelle $\mathfrak{p}$. — Fortsetzung eines Funktionenelements $u(\mathfrak{p})$ über das reguläre Gebiet der Kugelfläche. — Abhängigkeit des Endwertes von dem durchlaufenen Wege. — Änderung eines Elementes $u(\mathfrak{p})$ beim Umlauf um einen kritischen Punkt.

§ 1.

Durch die Gleichung $f(u, z) = 0$ werden in der Umgebung jedes Punktes $\mathfrak{p}(z = a)$ der Kugelfläche genau n Funktionenelemente

$$u_1(\mathfrak{p}), \quad u_2(\mathfrak{p}), \ldots u_n(\mathfrak{p})$$

definiert, welche die n Gleichungswurzeln in einer endlichen Umgebung von $\mathfrak{p}$ darstellen, und hier stetige und differenzierbare Funktionen von z sind.

Der Konvergenzbereich jener n Reihen bleibt stets oberhalb einer endlichen Grenze, es sei denn, dafs $\mathfrak{p}$ unendlich nahe an eine der kritischen Stellen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$ bzw. auch an den unendlich fernen Punkt heranrückt, falls nämlich dieser zu den kritischen Stellen gehört, was jetzt stets direkt entschieden werden kann.

Es sei nun $\mathfrak{p}_0$ eine beliebige reguläre Stelle, $u(\mathfrak{p}_0)$ eines der n zugehörigen Funktionenelemente, so kann dasselbe auf eindeutig bestimmte Weise fortgesetzt werden, wenn man vorläufig die kritischen Punkte und gewisse beliebig klein zu wählende Umgebungen derselben ausschliefst. Ist nämlich $\mathfrak{p}_1$ irgend ein im Innern des Konvergenzbereiches von $u(\mathfrak{p}_0)$ liegender Punkt, und bildet man die zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige Fortsetzung von $u(\mathfrak{p}_0)$, so erhält man ein eindeutig bestimmtes Funktionenelement $u(\mathfrak{p}_1)$, welches nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie*) ebenfalls die Gleichung $f(u, z) = 0$ innerhalb eines endlichen Bereiches von $\mathfrak{p}_1$ befriedigt, und welches, da es für $\mathfrak{p}_1$ nur n solche Funktionenelemente giebt, mit einem und nur einem dieser direkt bestimmten Potenzreihen identisch ist; auf dieselbe Weise kann man ein Element beliebig weit fortsetzen, da für alle regulären Stellen $\mathfrak{p}$ der Konvergenzradius eines jeden Funktionenelementes $u(\mathfrak{p})$ oberhalb einer positiven unteren Grenze ϱ_0 liegt. Hieraus folgt, dafs für die Funktionenelemente $u(\mathfrak{p})$ die kritischen Punkte $\mathfrak{B}_k$ die einzigen singulären Punkte sind, da nur bei der Annäherung an sie der Konvergenzbereich eines Elementes unter jede noch so kleine Grenze herabsinken kann. Da nun nach dem auf S. 23 erwähnten Satze der Funktionentheorie der

*) Vgl. z. B. Biermann a. a. O. S. 185.

Konvergenzkreis eines Funktionenelementes durch die nächste singuläre Stelle desselben hindurchgeht, so ergiebt sich der folgende Satz:

Die n zu einer Stelle $\mathfrak{p}$ gehörigen Elemente $u_1(\mathfrak{p}), \ldots u_n(\mathfrak{p})$ konvergieren sicher innerhalb eines Kreises, dessen Peripherie durch den $\mathfrak{p}$ zunächst liegenden kritischen Punkt hindurchgeht, mag nun $\mathfrak{p}$ ein endlicher oder der unendlich ferne Punkt der Kugelfläche sein. Im letzteren Falle entspricht dem Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{p}_\infty$ auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ das Äufsere desjenigen um den Anfangspunkt der Horizontalebene beschriebenen Kreises, dessen Peripherie durch den entferntesten im Endlichen gelegenen kritischen Punkt hindurchgeht.

Wir werden diesen präziseren Satz im folgenden nie gebrauchen, denn zur Lösung der Aufgabe, ein Element $u(\mathfrak{p})$ über die ganze Kugelfläche hin auf beliebigem Wege fortzusetzen, genügt der vorher vollständig bewiesene Satz, dafs für das ganze reguläre Gebiet der Gleichung der Konvergenzradius der zugehörigen Reihe niemals unendlich klein werden kann. Schliefsen wir nämlich jetzt wieder die kritischen Punkte durch beliebig kleine Kreise aus, und bezeichnen den übrig bleibenden Theil der Kugelfläche durch $\overline{\mathfrak{K}}$, so kann man das Element $u(\mathfrak{p}_0)$ auf einem beliebigen ganz innerhalb $\overline{\mathfrak{K}}$ verlaufenden Wege s nach einem anderen Punkte $\mathfrak{p}$ fortsetzen, und nach dem obigen Satze ist man sicher, dafs man nach einer endlichen Zahl von Fortsetzungsschritten wirklich $\mathfrak{p}$ erreicht. Man erhält so ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Element $u(\mathfrak{p})$, von welchem man aber nur weifs, dafs es eine der n Wurzeln der gegebenen Gleichung für die Endstelle $\mathfrak{p}$ ist. Dagegen sind wir vorläufig noch nicht im stande, zu entscheiden, welche von diesen bei einem gegebenen Wege s sich ergiebt. Diese wichtige Frage wollen wir in dieser Vorlesung zu lösen versuchen.

§ 2.

Es sei also jetzt $\mathfrak{p}_0$ eine beliebige reguläre Stelle $(z = \alpha_0)$ des Bereiches $\overline{\mathfrak{K}}$, und

$$u(\mathfrak{p}_0) = b_0^{(0)} + b_1^{(0)}(z - \alpha_0) + \cdots$$

eine der n zugehörigen regulären Potenzreihen für u. Da diese innerhalb einer endlichen Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ konvergiert und $\mathfrak{p}_0$ einen beliebigen Punkt von $\overline{\mathfrak{K}}$ bedeuten kann, so kann $u(\mathfrak{p}_0)$ auf einem beliebigen Wege s von $\mathfrak{p}_0$ aus zu einer beliebigen anderen Stelle $\mathfrak{p}\,(z = \alpha)$ fortgesetzt werden, und es ergiebt sich dort eine eindeutig bestimmte Potenzreihe

$$u(\mathfrak{p}) = b_0 + b_1(z - \alpha) + \cdots,$$

nämlich eine der n zu dieser Stelle gehörigen Potenzreihen für u.

Setzt man nun die Reihe $u(\mathfrak{p}_0)$ auf einem anderen Wege s' von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}$ fort, so erhält man in $\mathfrak{p}$ eine Entwickelung

$$u'(\mathfrak{p}) = b'_0 + b'_1(z-a) + \cdots,$$

welche wieder eine der n dort vorhandenen Potenzreihen sein mufs, also mit $u(\mathfrak{p})$ identisch, oder aber auch von $u(\mathfrak{p})$ verschieden sein kann; es ist somit der Endwert $u(\mathfrak{p})$ nicht allein von jener Stelle $\mathfrak{p}$, sondern auch von dem Wege abhängig, auf welchem die Fortsetzung geschieht.

Wir betrachten jetzt speziell den Fall, dafs der Weg s geschlossen ist, dafs also sein Endpunkt $\mathfrak{p}$ mit dem Anfangspunkte $\mathfrak{p}_0$ zusammenfällt. Ein solcher Weg soll ein Umlauf genannt werden. Nach einem Umlaufe kann nun die Potenzreihe $u(\mathfrak{p}_0)$ in ihren Ausgangswert zurückkehren, d. h. durch den Umlauf ungeändert bleiben, oder aber sie kann sich ändern, nämlich in eine der übrigen $n-1$ zu $u(\mathfrak{p}_0)$ konjugierten Potenzreihen, etwa in $u'(\mathfrak{p}_0)$, übergehen. Wir beweisen jetzt zuerst den folgenden Fundamentalsatz, durch welchen das Verhalten einer Reihe $u(\mathfrak{p}_0)$ einem derartigen Umlaufe gegenüber bestimmt wird:

> Umschliefst die Umlaufskurve s keinen einzigen der kritischen Punkte, so bleibt bei einem Umlaufe längs derselben jede der n Potenzreihen $u(\mathfrak{p}_0)$ ungeändert.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes nehmen wir an, eine jener Reihen, etwa $u(\mathfrak{p}_0)$, ändere sich bei einem Umlaufe der Kurve s, d. h. man erhalte nach diesem Umlaufe von $\mathfrak{p}_0$ über $\mathfrak{p}$ nach $\mathfrak{p}_0$ zurück eine von dem Anfangswerte verschiedene Potenzreihe $u'(\mathfrak{p}_0)$. Denkt man sich jene Kurve nun durch eine beliebige Verbindungslinie $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, welche aber ebenfalls innerhalb $\bar{\mathfrak{K}}$ verläuft, also nicht durch einen der kritischen Punkte hindurchgeht, in die beiden geschlossenen Kurven

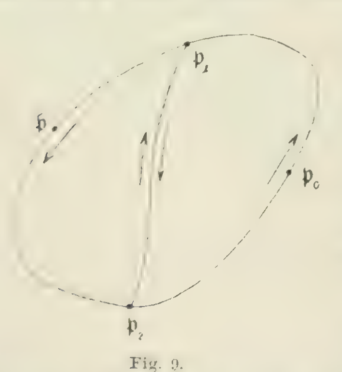


Fig. 9.

$$s_1 = \mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_0, \quad s_2 = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2$$

zerlegt, so folgt unmittelbar, dafs sich dann eins der n Funktionenelemente $u(\mathfrak{p})$ auch bei mindestens einem jener kleineren Umläufe s_1, s_2 ändern mufs. Angenommen nämlich, dies sei nicht der Fall. Setzt man dann $u(\mathfrak{p}_0)$ auf dem geschlossenen Wege

$$\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_0$$

fort, so erhält man genau denselben Wert $u'(\mathfrak{p}_0)$ wie vorher, weil ja der neu hinzutretende Weg $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1$ hin und zurück in gleicher Weise

durchlaufen wird, so daſs die Reihe $u(\mathfrak{p}_1)$ nach jenem Zwischenwege in $\mathfrak{p}_1$ denselben Wert erhält, welchen sie vorher hatte. Jener Weg kann aber auch folgendermaſsen geschrieben werden:

$$\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_2)\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2(s_2)\mathfrak{p}_0.$$

Nimmt man also an, das durch Fortsetzung auf dem Wege $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ aus $u(\mathfrak{p}_0)$ hervorgehende Element $u(\mathfrak{p}_2)$ ändere sich bei dem Umlaufe s_2 nicht, so erhält es nach diesem Umlaufe s_2 in $\mathfrak{p}_2$ denselben Wert $u(\mathfrak{p}_2)$ wie vorher, der Umlauf s_2 kann daher einfach fortgelassen werden. Dann aber reduziert sich der ganze ursprüngliche Umlauf s auf $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_0 = s_1$; änderte sich also die Potenzreihe $u(\mathfrak{p}_0)$ auch bei diesem Umlaufe s_1 nicht, so müſste sie auch bei dem ganzen Umlaufe gegen die Voraussetzung ungeändert bleiben.

Wenn sich also eine Reihe $u(\mathfrak{p}_0)$ bei irgend einem Umlaufe s ändert und man zerlegt die Umlaufskurve s in zwei kleinere Kurven s_1 und s_2, so muſs sich mindestens eins der n Elemente u bei einem der beiden kleineren Umläufe s_1, s_2 ebenfalls ändern. Ist dies etwa für s_1 der Fall, so zerlege man s_1 wieder in derselben Weise und fahre so weiter fort. Da durch eine jede solche Teilung der durch die Kurve eingeschlossene Bereich verkleinert wird und der kleinere Bereich jedesmal innerhalb des vorhergehenden gröſseren liegt, so kann man jene Teilung so einrichten und so weit führen, daſs schlieſslich der durch die letzte Umlaufskurve σ eingeschlossene Bereich nach Umfang und Inhalt so klein wird, wie man nur immer will, d. h. daſs sich die Kurve σ in allen ihren Punkten einem ganz bestimmten innerhalb s gelegenen Punkte $\bar{\mathfrak{p}}$ beliebig nahe anschlieſst, und daſs sich trotzdem mindestens eins der n Elemente u beim Umlaufe um jene kleine Kurve σ ändert. Ist nun zunächst $\bar{\mathfrak{p}}$ ein regulärer Punkt und die Kurve σ genügend klein, so unterscheiden sich die Funktionswerte $u(\mathfrak{p})$, welche irgend ein Funktionenelement u auf jener Kurve besitzt, wegen der Stetigkeit desselben um so wenig, wie man nur immer will, von dem Werte $u(\bar{\mathfrak{p}})$, den $u(\mathfrak{p})$ in $\bar{\mathfrak{p}}$ selbst annimmt. Andererseits sind aber die n zu $\bar{\mathfrak{p}}$ gehörigen konjugierten Werte von u unter der soeben ge machten Voraussetzung sämtlich endlich, und sie unterscheiden sich um endliche Gröſsen von einander. Es kann daher $u(\mathfrak{p})$ bei dem Umlaufe σ um jenen Punkt $\mathfrak{p}$ in keinen dieser konjugierten Werte übergehen, d. h. es muſs $u(\mathfrak{p})$ bei jenem Umlaufe ungeändert bleiben, falls $\bar{\mathfrak{p}}$ ein regulärer Punkt ist. Soll sich also $u(\mathfrak{p})$ bei dem Umlaufe um die Kurve σ ändern, so muſs jener innerhalb σ gelegene Punkt $\mathfrak{p}$, wie behauptet wurde, notwendig einer der kritischen Punkte $\mathfrak{B}_i$ sein, für welche entweder eine Wurzel unendlich groſs ist oder zwei Wurzeln einander gleich sind.

Der obige Satz kann nunmehr auch in folgender Form ausgesprochen werden:

> Setzt man eine beliebige Potenzreihe u von einem Punkte $\mathfrak{p}_0$ zu einem anderen $\mathfrak{p}$ auf zwei verschiedenen Wegen s und s' fort, welche keinen kritischen Punkt einschliefsen, so gelangt man beide Male zu demselben Elemente $u(\mathfrak{p})$.

Denn setzt man $u(\mathfrak{p})$ von dem Endpunkte $\mathfrak{p}$ aus zuerst auf dem Wege s rückwärts nach $\mathfrak{p}_0$ und alsdann von $\mathfrak{p}_0$ aus auf dem Wege s' wieder nach $\mathfrak{p}$ fort, so erhält man einen Umlauf, welcher $u(\mathfrak{p})$ notwendig in sich selbst zurückführen mufs, da der von s und s' gebildete Weg keinen kritischen Punkt einschliefst. Wären aber $u(\mathfrak{p})$ und $u'(\mathfrak{p})$ die verschiedenen Potenzreihen, welche man, von $\mathfrak{p}_0$ ausgehend, auf den beiden Wegen s und s' in $\mathfrak{p}$ erhält, so würde der Umlauf von $\mathfrak{p}$ über $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}$ zurück $u(\mathfrak{p})$ über $u(\mathfrak{p}_0)$ in $u'(\mathfrak{p})$ überführen. Jene beiden Elemente $u(\mathfrak{p})$ und $u'(\mathfrak{p})$ müssen demnach identisch sein.

§ 3.

Es braucht jetzt nur noch weiter untersucht zu werden, ob und in welcher Weise sich eine Reihe $u(\mathfrak{p}_0)$ ändert, wenn der Punkt $\mathfrak{p}_0$ um einen kritischen Punkt $\overline{\mathfrak{p}}$ einen Umlauf macht. Wir können und wollen uns bei dieser Untersuchung darauf beschränken, die Änderung von $u(\mathfrak{p}_0)$ zu untersuchen, wenn $\mathfrak{p}_0$ die Peripherie eines um $\overline{\mathfrak{p}}$ als Mittelpunkt beschriebenen Kreises durchläuft, welcher sich ganz innerhalb des zu $u(\overline{\mathfrak{p}})$ gehörenden Konvergenzkreises befindet. Ein solcher cyklischer Umlauf um einen Punkt $\overline{\mathfrak{p}}$ soll eine Umkreisung desselben genannt werden. Jeder andere Umlauf kann dann, wie sich ergeben wird, durch eine solche Umkreisung ersetzt werden.

Wir wollen den Punkt $\overline{\mathfrak{p}}$ zunächst als einen ganz beliebigen regulären oder kritischen Punkt annehmen. Alsdann schreitet die zugehörige Potenzreihe $u(\overline{\mathfrak{p}})$ in jedem Falle nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen des Linearfaktors $z - \overline{\alpha}$ fort und konvergiert, selbst wenn sie eine Anzahl Anfangsglieder mit negativen Exponenten enthalten sollte, wenn also $u(\overline{\mathfrak{p}})$ in $\overline{\mathfrak{p}}$ selbst unendlich grofs wird, stets innerhalb einer endlichen Umgebung von $\overline{\mathfrak{p}}$ gleichmäfsig und stellt die zugehörigen Werte von $u(\mathfrak{p})$ mit jeder vorgegebenen Genauigkeit dar. Wir denken uns nun um $\overline{\mathfrak{p}}$ als Mittelpunkt einen Kreis $\overline{k}$ beschrieben, dessen Radius $\overline{\varrho}$ kleiner ist als der Radius des zu $u(\overline{\mathfrak{p}})$ gehörenden Konvergenzkreises, nehmen sodann den Ausgangspunkt $\mathfrak{p}_0$ für die Um-

kreisung irgendwo auf der Peripherie von $\bar{k}$ an und untersuchen nun, in welcher Weise sich die zugehörende Reihe $u(\mathfrak{p}_0)$ ändert, wenn wir sie auf der Peripherie jenes Kreises in positiver Umlaufsrichtung um $\bar{\mathfrak{p}}$ fortsetzen.

Da die Stelle $\mathfrak{p}_0$ nach der Voraussetzung innerhalb des Konvergenzbereiches von $u(\bar{\mathfrak{p}})$ liegt, so ist sie regulär, d. h. die n zu der Stelle $\mathfrak{p}_0$ gehörenden Potenzreihen für u verhalten sich alle regulär, und ihre Anfangsglieder sind sämtlich um endliche Gröfsen voneinander verschieden. Es giebt also eine und auch nur eine Reihe $u(\mathfrak{p}_0)$, welche mit der Entwickelung von $u(\bar{\mathfrak{p}})$ an dieser Stelle zusammenfällt. Denkt man sich nun jene Reihe längs der Peripherie von $\bar{k}$ fortgesetzt, so koincidieren auch diese Fortsetzungen mit $u(\bar{\mathfrak{p}})$ für den ihnen gemeinsamen Konvergenzbereich, und man erkennt so, dafs die Reihe $u(\mathfrak{p}_0)$ nach einer Umkreisung des Punktes $\bar{\mathfrak{p}}$ sich ändern oder ungeändert bleiben wird, je nachdem dasselbe für die Reihe $u(\bar{\mathfrak{p}})$ der Fall ist oder nicht. Wir untersuchen daher nur die Änderung, welche die Reihe $u(\bar{\mathfrak{p}})$ selbst bei einer Umkreisung erleidet, und unterscheiden dabei die beiden Fälle, dafs sie nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors $z-\bar{\alpha}$ fortschreitet.

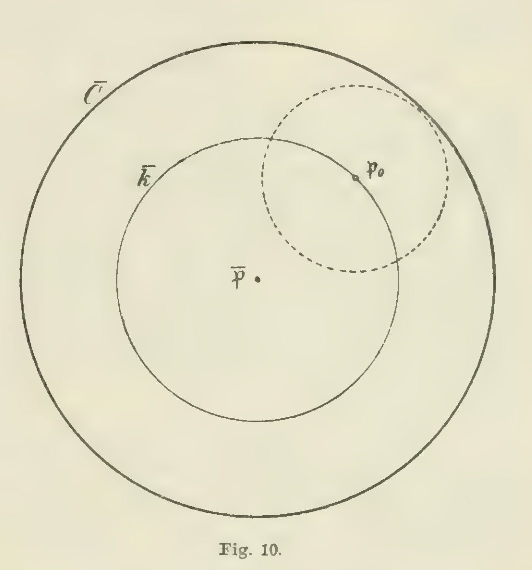


Fig. 10.

Es sei also im ersten Falle

$$u(\bar{\mathfrak{p}})=b_r(z-\bar{\alpha})^r+b_{r+1}(z-\bar{\alpha})^{r+1}+\cdots$$

die Entwickelung von $u(\mathfrak{p})$. Ist dann $\mathfrak{p}$ irgend ein Punkt der Peripherie des mit dem Radius $\bar{\varrho}$ um $\bar{\mathfrak{p}}$ beschriebenen Kreises $\bar{k}$, so ist für ihn

$$z-\bar{\alpha}=\bar{\varrho}\,e^{\varphi i},$$

wo φ das zugehörige Argument ist, und für ihn ist also der Wert jener Reihe durch den Ausdruck

$$b_r \bar{\varrho}^r e^{r\varphi i} + b_{r+1} \bar{\varrho}^{r+1} e^{(r+1)\varphi i} + \cdots$$

dargestellt. Ist nun φ_0 das zu dem Ausgangspunkte $\mathfrak{p}_0$ gehörende Argument, so umläuft der Punkt $\mathfrak{p}$, von $\mathfrak{p}_0$ ausgehend, den Kreis $\bar{k}$ vollständig in positivem Umlaufssinne, wenn man das Argument φ von φ_0 aus alle Werte bis $\varphi_0 + 2\pi$ durchlaufen läfst. Da aber allgemein

$$b_s \bar{\varrho}^s e^{s(\varphi_0 + 2\pi)i} = b_s \bar{\varrho}^s e^{s\varphi_0 i}$$

ist, so kehren nach jener Umkreisung alle Glieder $b_s(z-\bar{\alpha})^s$ in ihre Anfangswerte zurück, d. h. der Wert von $u(\bar{\mathfrak{p}})$ wird durch eine solche Umkreisung in keiner Weise geändert. Schreitet also die Potenzreihe $u(\bar{\mathfrak{p}})$ nach ganzen Potenzen von $z - \bar{\alpha}$ fort, so wird die Reihe $u(\mathfrak{p}_0)$ durch eine Umkreisung des Punktes $\bar{\mathfrak{p}}$ nicht geändert, mag dieser Punkt ein regulärer oder ein kritischer Punkt sein.

Es möge nun die Entwickelung von $u(\bar{\mathfrak{p}})$ in der Umgebung der Stelle $(z = \bar{\alpha})$ nach gebrochenen Potenzen von $z - \bar{\alpha}$ fortschreiten, und zwar sei

$$u(\bar{\mathfrak{p}}) = b_r (z-\bar{\alpha})^{\frac{r}{a}} + b_{r+1}(z-\bar{\alpha})^{\frac{r+1}{a}} + \cdots$$

Alsdann existieren aufser dieser noch genau $a-1$ konjugierte Entwickelungen:

$$u_1(\bar{\mathfrak{p}}) = b_r \omega^r (z-\bar{\alpha})^{\frac{r}{a}} + b_{r+1}\omega^{(r+1)}(z-\bar{\alpha})^{\frac{r+1}{a}} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{a-1}(\bar{\mathfrak{p}}) = b_r \omega^{(a-1)r} (z-\bar{\alpha})^{\frac{r}{a}} + b_{r+1}\omega^{(a-1)(r+1)}(z-\bar{\alpha})^{\frac{r+1}{a}} + \cdots,$$

welche aus jener ersten dadurch hervorgehen, dafs die Wurzel

$$\sqrt[a]{z-\bar{\alpha}}$$

der Reihe nach durch ihre a konjugierten Werte

$$(z-\bar{\alpha})^{\frac{1}{a}}, \quad \omega(z-\bar{\alpha})^{\frac{1}{a}}, \ldots, \omega^{a-1}(z-\bar{\alpha})^{\frac{1}{a}}$$

ersetzt wird, wenn

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{a}}$$

die erste unter den a^{ten} Wurzeln der Einheit bedeutet. Setzt man nun wieder

$$z - \bar{\alpha} = \bar{\varrho} \cdot e^{\varphi i}$$

und läfst dann das Argument φ alle Werte von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$, oder läfst man den Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}_0$ aus die ganze Peripherie von $\bar{k}$ durchlaufen, so geht hierbei jedes Glied

$$b_s (z - \bar{\alpha})^{\frac{s}{a}} = b_s \bar{\varrho}^s e^{\frac{s \varphi_0 i}{a}}$$

über in

$$b_s \bar{\varrho}^s e^{\frac{s(\varphi_0 + 2\pi) i}{a}} = b_s \bar{\varrho}^s e^{\frac{s \varphi_0 i}{a}} e^{s \frac{2\pi i}{a}} = \omega^s b_s \bar{\varrho}^s e^{\frac{s \varphi_0 i}{a}} = \omega^s b_s (z - \bar{\alpha})^{\frac{s}{a}},$$

d. h. bei jener Umkreisung geht der Wert von $u(\bar{\mathfrak{p}})$ für die Stelle $\mathfrak{p}_0$ in denjenigen über, welchen die erste konjugierte Reihe $u_1(\bar{\mathfrak{p}})$ in demselben Punkte annimmt. In genau derselben Weise zeigt man, dafs bei dieser Umkreisung $u_1(\bar{\mathfrak{p}})$ in $u_2(\bar{\mathfrak{p}})$, $u_2(\bar{\mathfrak{p}})$ in $u_3(\bar{\mathfrak{p}})$ u. s. w., und dafs die letzte der a konjugierten Reihen $u_{a-1}(\bar{\mathfrak{p}})$ wieder in $u(\bar{\mathfrak{p}})$ übergeht. In diesem Falle ändern sich also alle a konjugierten Reihen $u_i(\bar{\mathfrak{p}})$ bei einer Umkreisung von $\bar{\mathfrak{p}}$, und zwar in der Weise, dafs sie sich einfach in der angegebenen Reihenfolge cyklisch vertauschen. Läfst man den Punkt $\mathfrak{p}_0$ den Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ zweimal hintereinander umkreisen, so geht $u(\bar{\mathfrak{p}})$ über $u_1(\bar{\mathfrak{p}})$ in $u_2(\bar{\mathfrak{p}})$ über, und man überzeugt sich genau ebenso, dafs $u(\bar{\mathfrak{p}})$ der Reihe nach in $u_1(\bar{\mathfrak{p}}), u_2(\bar{\mathfrak{p}}), \ldots, u_{a-1}(\bar{\mathfrak{p}})$ übergeht, wenn man den Punkt $\mathfrak{p}_0$ den Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ einmal, zweimal, ..., $(a-1)$ mal in positiver Richtung umkreisen läfst; erst bei der a^{ten} Umkreisung kehrt dann jene Reihe wieder in ihren Anfangswert zurück. Es ergiebt sich somit der folgende allgemeine Satz:

> Ist $u(\bar{\mathfrak{p}})$ eine in der Umgebung einer beliebigen Stelle $\bar{\mathfrak{p}}$ giltige Entwickelung von u, so bleibt sie bei einer Umkreisung derselben dann und nur dann ungeändert, wenn sie nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors fortschreitet. Schreitet jene Potenzreihe dagegen nach ganzen Potenzen von $(z - \bar{\alpha})^{\frac{1}{a}}$ fort, so geht sie bei einer Umkreisung in die erste ihr konjugierte Reihe über und kehrt erst nach einer a-maligen Umkreisung in ihren Anfangswert zurück.

Es ist hierbei noch zu bemerken, dafs man genau dasselbe Resultat erhält, wenn der Punkt $\mathfrak{p}$, von $\mathfrak{p}_0$ ausgehend, den Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ auf einer beliebigen geschlossenen Kurve s umläuft, falls diese nur ganz innerhalb des zu $\bar{\mathfrak{p}}$ gehörenden Konvergenzkreises bleibt. Denn setzt man auch in diesem Falle

$$z - \bar{\alpha} = \varrho e^{\varphi i},$$

so durchläuft wieder das Argument die Werte von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$, während der Radiusvektor ϱ, von ϱ_0 ausgehend, die Reihe der zugehörigen Radienvektoren durchläuft und zuletzt wiederum in seinen Anfangswert zurückkehrt.

Genau die gleichen Betrachtungen gelten auch für die Stelle $\overline{a} = \infty$, d. h. für den Südpol O' auf der Kugelfläche. Schreitet für diese Stelle die Entwickelung des zugehörigen Elementes nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$ fort, so bleibt sie bei der Umkreisung von O' ungeändert; im anderen Falle geht sie in die erste ihr konjugierte über. Es ist dabei zu beachten, dafs auch hier die Umkreisung dann in positivem Sinne erfolgt, wenn der Mittelpunkt, d. h. der Südpol O', links bleibt. Bildet man also jenen Umlaufskreis um O' als einen um den Anfangspunkt der Horizontal-Ebene mit sehr grofsem Radius beschriebenen Kreis ab, so ist dieser abgebildete Kreis offenbar so zu durchlaufen, dafs der Nullpunkt in negativem Sinne umkreist wird, so also, dafs derselbe rechts liegt.

Siebente Vorlesung.

Fortsetzung eines Funktionenelementes $u(\mathfrak{p})$ auf der zerschnittenen Horizontalebene $\overline{\mathfrak{H}}$ und auf der zerschnittenen Kugelfläche $\overline{\mathfrak{K}}$. — Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktionen u für diese Bereiche. — Fortsetzung der n konjugierten Elemente $u_h(\mathfrak{P})$ auf den n zerschnittenen Kugelflächen $\overline{\mathfrak{K}}_h$. — Die zugehörigen Elemente in den kritischen Punkten. — Über den Wert der n Funktionen $u_h(\mathfrak{P})$ am Rande der Kugelflächen $\overline{\mathfrak{K}}_h$. — Vereinigung der n Flächen $\overline{\mathfrak{K}}_h$ zu einer Riemannschen Kugelfläche. — Die regulären und die Verzweigungspunkte der Riemannschen Kugelfläche.

§ 1.

Die in der vorigen Vorlesung gefundenen Resultate benutzen wir jetzt dazu, ein zu einer regulären Stelle $\overline{\mathfrak{p}}$ der Horizontalebene gehöriges Funktionenelement $u(\overline{\mathfrak{p}})$ über die ganze Horizontalebene $\mathfrak{H}$ oder, was dasselbe ist, über die ganze Kugelfläche $\mathfrak{K}$ auszubreiten. Dabei sollen aber die für die Fortsetzung gestatteten Wege so beschränkt werden, dafs wir sicher sind, nunmehr bei j e d e m der gestatteten Wege in einem beliebigen Punkte $\overline{\mathfrak{p}}'$ nur ein einziges zugehöriges Funktionenelement $u(\overline{\mathfrak{p}}')$ zu erhalten, so dafs also bei dieser Einschränkung $u(\mathfrak{p})$ eine e i n d e u t i g e Funktion des Ortes ist. Diese Überlegungen wollen wir der Anschaulichkeit wegen zunächst für die unendlich ausgedehnte Horizontalebene durchführen; die so erlangten Resultate können dann durch Abbildung sofort auf die Kugelfläche übertragen werden.

Es sei $\overline{\mathfrak{p}}$ eine beliebige reguläre Stelle der Horizontalebene, $u(\overline{\mathfrak{p}})$ eine der zugehörigen Potenzreihen. Beschränken wir nun für die Fortsetzung den Bereich der unabhängigen Variabeln oder also die Wege für den Punkt $\overline{\mathfrak{p}}$ so, dafs eine Umkreisung einer kritischen Stelle durch ihn unmöglich gemacht wird und bezeichnen wir mit $u(\mathfrak{p}')$ das durch Fortsetzung sich ergebende Element in einem beliebigen Punkte $\overline{\mathfrak{p}}'$, so ist innerhalb des so sich ergebenden beschränkten Gebietes $u(\overline{\mathfrak{p}}')$ eine eindeutige Funktion der Stelle $\overline{\mathfrak{p}}'$; denn zwei verschiedene Fortsetzungen jener Reihe von dem Punkte $\overline{\mathfrak{p}}$ zu einem anderen beliebigen Punkte $\overline{\mathfrak{p}}'$ müssen immer denselben Endwert $u(\mathfrak{p}')$ ergeben, weil ihre Wege zusammengenommen niemals einen der singulären Punkte umschliefsen können.

Wir können nun jene Beschränkung für den Bereich der unabhängigen Variabeln leicht folgendermafsen ausführen. Wir umgeben, falls der unendlich ferne Punkt ein kritischer sein sollte, zunächst den Nullpunkt durch einen Kreis k_∞ von beliebig grofsem Radius R, und umschliefsen alsdann die sämtlichen noch übrigen kritischen Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_h$ durch beliebig klein gewählte Kreise $k_1, k_2, \ldots, k_h$. Wir wählen alsdann einen anderen ganz beliebigen, aber ein für allemal fest angenommenen regulären Punkt $\mathfrak{B}_0$, umgeben auch ihn mit einem beliebig kleinen Kreise k_0 und verbinden diesen mit allen jenen Kreisen

$$k_1, \quad k_2, \ldots, k_h, \quad k_\infty$$

durch $h+1$ beliebig geführte, unendlich dünne Schnitte

$$s_1, \quad s_2, \ldots, s_h, \quad s_\infty,$$

welche einander nicht durchsetzen sollen. Wir betrachten alsdann nur denjenigen auf allen Seiten begrenzten Teil $\bar{\mathfrak{H}}$ der Ebene $\mathfrak{H}$, welcher nach aufsen durch den Kreis k_∞, nach innen durch die Kreise $k_0, k_1, \ldots, k_h$, sowie durch die zugehörigen Verbindungsschnitte

$$s_1, \ s_2, \ldots, s_h, \ s_\infty$$

begrenzt wird.

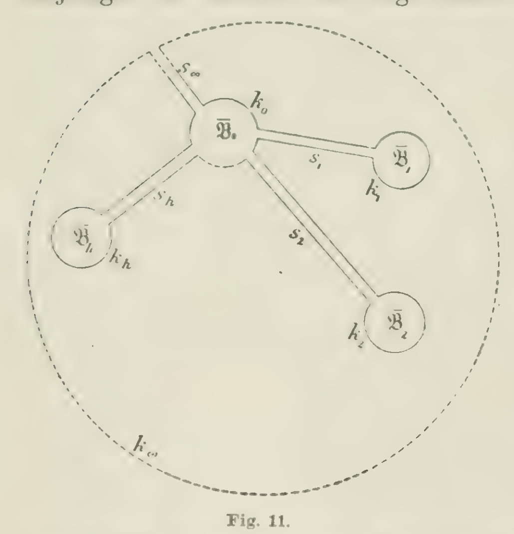


Fig. 11.

Beschränken wir den Lauf des Punktes $\bar{\mathfrak{p}}$ auf diesen Teil $\bar{\mathfrak{H}}$ der Ebene $\mathfrak{H}$, so erkennen wir ohne weiteres, dafs irgend eine der n zu $\bar{\mathfrak{p}}$ gehörenden Potenzreihen $u_1(\bar{\mathfrak{p}}), \ldots, u_n(\bar{\mathfrak{p}})$ nebst allen ihren Fortsetzungen innerhalb $\bar{\mathfrak{H}}$ eine eindeutige Funktion von z ist. Denn irgend zwei von $\bar{\mathfrak{p}}$ aus nach einem anderen Punkte $\bar{\mathfrak{p}}'$ innerhalb $\bar{\mathfrak{H}}$ gezogene Wege s und s' können niemals einen der kritischen Punkte einschliefsen; es sind daher die Fortsetzungen etwa von $u_1(\bar{\mathfrak{p}})$ längs eines beliebigen Weges s von diesem Wege vollständig unabhängig, und zu jedem Punkte $\bar{\mathfrak{p}}'$ von $\bar{\mathfrak{H}}$ gehört eine und nur eine Fortsetzung $u_1(\bar{\mathfrak{p}}')$ von $u_1(\bar{\mathfrak{p}})$. Dies gilt, wie grofs auch der Kreis k_∞ und wie klein die Begrenzungskreise $k_0, k_1, \ldots, k_h$ gewählt sein mögen.

Ist der unendlich ferne Punkt dagegen regulär, liegen also alle kritischen Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_h$ im Endlichen, so umgeben wir alle diese und den im Endlichen liegenden Punkt $\mathfrak{B}_0$ wiederum mit kleinen Kreisen $k_0, k_1, \ldots, k_h$ und verbinden die h letzteren mit k_0 durch die h sich nicht durchsetzenden Verbindungsschnitte $s_1, s_2, \ldots, s_h$; dann gelten die vorher gemachten Bemerkungen wörtlich ebenso für den jetzt sich ergebenden unendlich ausgedehnten Bereich $\bar{\mathfrak{H}}$, welcher durch die Kreise $k_0, k_1, \ldots, k_h$ und die Schnitte $s_1, s_2, \ldots, s_h$ begrenzt wird.

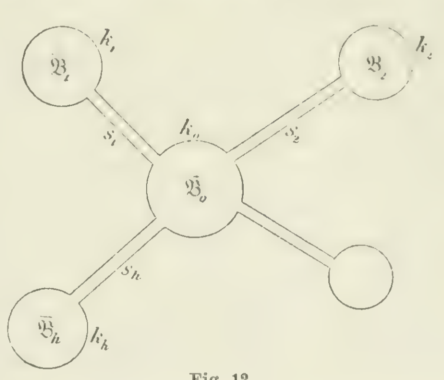


Fig. 12.

Denken wir uns nun die Werte, welche eine der n Reihen, z. B. $u_1(\bar{\mathfrak{p}})$, nebst allen ihren Fortsetzungen innerhalb $\bar{\mathfrak{H}}$ in allen Punkten $\bar{\mathfrak{p}}$ des Bereiches $\bar{\mathfrak{H}}$ besitzt, jenen Punkten $\bar{\mathfrak{p}}$ zugeordnet, so erhalten wir zu jedem Punkte einen eindeutig bestimmten Wert, und alle so sich ergebenden Werte sind dann in der Weise auf dem Bereiche $\bar{\mathfrak{H}}$ ausgebreitet, dafs sie stetig miteinander zusammenhängen, d. h. dafs die zu benachbarten Punkten $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{p}}'$ gehörenden Funktionenwerte $u_1(\bar{\mathfrak{p}})$ und $u_1(\bar{\mathfrak{p}}')$ sich um so wenig voneinander unterscheiden, wie man nur immer will, wenn nur $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{p}}'$ einander genügend nahe liegen. Hierbei sind aber zwei durch einen Schnitt s getrennte Punkte für den Bereich $\bar{\mathfrak{H}}$ nicht als benachbart anzusehen, weil es innerhalb jenes Bereiches $\bar{\mathfrak{H}}$ nicht möglich ist, sie durch eine unendlich kleine Kurve zu verbinden.

Wir können endlich noch leicht angeben, welche der n zu dem Punkte $\bar{\mathfrak{p}}$ gehörenden Potenzreihen für $u_1(\mathfrak{p})$ zu wählen ist, wenn $\bar{\mathfrak{p}}$ mit einer der im Endlichen liegenden kritischen Stellen, etwa mit $\mathfrak{B}_1$, koincidiert. Wählen wir nämlich, was stets möglich ist, den Kreis k_1 so klein, dafs die Konvergenzkreise der n zu $\bar{\mathfrak{B}}_1$ gehörenden Potenzreihen $u_1(\mathfrak{B}_1), \ldots, u_n(\bar{\mathfrak{B}}_1)$ sämtlich gröfser sind als k_1, so giebt es eine und auch nur eine unter jenen Reihen, deren Werte innerhalb des durch k_1 einerseits und durch ihren Konvergenzkreis C_1' andererseits begrenzten Kreisringes mit den zu $u_1(\bar{\mathfrak{B}}_1)$ innerhalb $\bar{\mathfrak{H}}$ gehörenden Funktionswerten übereinstimmen. Bezeichnen wir diese Potenzreihe ebenfalls mit $u_1(\mathfrak{B}_1)$, so ist damit die Funktion $u_1(\bar{\mathfrak{p}})$ jetzt für alle regulären Stellen ausser $\mathfrak{B}_0$ und auch für die im Endlichen liegen-

den singulären Stellen eindeutig bestimmt. Genau ebenso werden wir aber auf S. 101 auch zur Feststellung derjenigen Potenzreihe $u_1(\mathfrak{B}_0)$ verfahren, welche zu dem bisher noch ausgeschlossenen regulären Punkte $\mathfrak{B}_0$ gehört.

§ 2.

Um die entsprechende Bestimmung auch für die Stelle $z = \infty$ bequem durchführen zu können, denken wir uns nunmehr die ganze unendlich ausgedehnte Ebene $\mathfrak{H}$ zugleich mit dem auf ihr liegenden begrenzten Gebiete $\mathfrak{H}$ in der im Anfange angegebenen Weise auf eine Kugel $\mathfrak{K}$ mit dem Durchmesser 1 so abgebildet, dafs wiederum der Nordpol O der Stelle $z = 0$, der Südpol O' der Stelle $z = \infty$ entspricht. Alsdann gehören, falls die kritischen Stellen $\overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{B}}_h$ sämtlich im Endlichen liegen, zu dem Punkte $\overline{\mathfrak{B}}_0$ und jenen h kritischen Stellen $h + 1$ Punkte der Kugel $\mathfrak{K}$,

$$\mathfrak{B}_0, \quad \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_h.$$

Diese werden durch kleine Kreise $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_h$, die Bilder von $k_0, k_1, \ldots, k_h$, umschlossen, von denen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_h$ durch die einander nicht durchsetzenden Schnitte $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_h$ mit $\mathfrak{k}_0$ zusammenhängen. Ist dagegen der Südpol selbst ein kritischer Punkt, so ist das Bild des um den Anfangspunkt beschriebenen, beliebig grofsen Kreises jetzt ein beliebig kleiner, O' umgebender Kreis, welcher ebenfalls mit dem Kreise um $\mathfrak{B}_0$ durch den Schnitt $\mathfrak{s}_\infty$, das Bild von s_∞, zusammenhängt. Wir können nun den zu O' gehörenden Kreis $\mathfrak{k}_\infty$ auch hier so klein wählen, dafs die endlichen Konvergenzbereiche $\mathfrak{C}_1^{(\infty)}, \mathfrak{C}_2^{(\infty)}, \ldots, \mathfrak{C}_n^{(\infty)}$ aller n zu O' gehörenden Potenzreihen $u_1(\mathfrak{p}_\infty), \ldots, u_n(\mathfrak{p}_\infty)$ gröfser als $\mathfrak{k}_\infty$ sind. Dann giebt es wieder ein und auch nur ein Element, etwa $u_1(\mathfrak{p}_\infty)$, von der Art, dafs dasselbe innerhalb des durch $\mathfrak{k}_\infty$ und $\mathfrak{C}_1^{(\infty)}$ begrenzten Kreisringes mit $u_1(\mathfrak{p})$ koincidiert. Wird nun diese Reihe für $u_1(\mathfrak{p}_\infty)$ gewählt, so sind nunmehr die Werte von $u_1(\mathfrak{p})$ für alle Punkte der Kugel ausser für $\mathfrak{B}_0$ wohl definiert, und es lassen sich die Werte von $u_1(\mathfrak{p})$ auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ stetig ausbreiten, mit einziger Ausnahme natürlich derjenigen Punkte, für welche $u_1(\mathfrak{p})$ unendlich grofs wird. Vermöge dieser Übertragung auf die Kugel verschwindet also bei der Behandlung des unendlich fernen Punktes jede Besonderheit, und wir können demnach jetzt, wenn wir uns von vornherein auf die Kugelfläche beziehen, folgende einfache Vorschrift für die eindeutige Ausbreitung der zu $u_1(\mathfrak{p})$ gehörenden Werte geben:

Es seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_h$ die den sämtlichen kritischen Stellen entsprechenden Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, von denen

auch einer mit dem Südpole O' zusammenfallen kann, und es bedeute $\mathfrak{B}_0$ einen beliebigen, aber ein für allemale fest angenommenen regulären Punkt. Jeden von diesen $h+1$ Punkten denken wir uns durch einen beliebig klein zu wählenden Kreis $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_h$ umgeben und jeden der h letzteren Kreise durch einen solchen Schnitt $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_h$ mit $\mathfrak{k}_0$ verbunden, dafs keiner von ihnen sich selbst oder einen anderen durchschneidet. Wird die so veränderte und begrenzte Kugelfläche mit $\bar{\mathfrak{K}}$ bezeichnet, ist ferner $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt von $\bar{\mathfrak{K}}$ und $u_1(\mathfrak{p})$ eine der n zugehörigen Potenzreihen für u, so kann $u_1(\mathfrak{p})$ auf $\bar{\mathfrak{K}}$ in vollständig eindeutig bestimmter Weise fortgesetzt werden, in der Art, dafs $u_1(\mathfrak{p})$ in jedem Punkte von $\bar{\mathfrak{K}}$ einen und nur einen Wert besitzt und dafs alle diese Werte innerhalb $\bar{\mathfrak{K}}$ stetig zusammenhängen, während die zu einem und demselben Punkte $\mathfrak{p}$ gehörenden Werte von $u_2(\mathfrak{p}), \ldots, u_n(\mathfrak{p})$ untereinander und von $u_1(\mathfrak{p})$ um eine endliche Gröfse verschieden sind. Für die ausgeschlossenen kritischen Punkte $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_h$ giebt es dann je eine Potenzreihe $u_1(\mathfrak{B}_1), \ldots, u_1(\mathfrak{B}_h)$, durch welche alle Werte jener Funktion innerhalb der zugehörigen Kreise $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_h$ geliefert werden, und auch diese setzen sich aus den Werten für die Punkte innerhalb des Bereiches $\bar{\mathfrak{K}}$ stetig fort.

§ 3.

In genau derselben Weise, wie wir soeben die Potenzreihe u_1 auf der ganzen zerschnittenen Horizontalebene $\bar{\mathfrak{H}}$ oder auf der ganzen zerschnittenen Kugelfläche $\bar{\mathfrak{K}}$ eindeutig fortgesetzt und ihre Werte in stetiger Folge aneinander gereiht haben, wollen wir jetzt mit den anderen Potenzreihen verfahren.

Wir denken uns also n in unendlich kleinem Abstande übereinander liegende Zahlenebenen,

$$\mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n,$$

so gegeben, dafs ihre Anfangspunkte und ihre Achsen übereinander fallen und dafs jede folgende Ebene unter der vorhergehenden liegt. Auf allen diesen Ebenen denken wir uns die Bereiche

$$\bar{\mathfrak{H}}_1, \quad \bar{\mathfrak{H}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{H}}_n$$

genau wie vorher abgegrenzt, so dafs die beliebig kleinen Kreise $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_h$ und die Schnitte $s_1, s_2, \ldots, s_h$ einander ebenfalls decken. Zu jedem Werte $\alpha = \xi + \eta i$ der komplexen Variabeln z gehören dann n untereinander liegende Punkte $\bar{\mathfrak{P}}_1, \bar{\mathfrak{P}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{P}}_n$, welche in den verschie-

denen Ebenen die Koordinaten ξ, η besitzen und welche die zu α gehörenden n Punkte jener n Ebenen genannt werden können. Es sei nun $(z = \alpha_0)$ eine beliebige reguläre Stelle, welcher die n Punkte $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}, \ldots \mathfrak{P}_n^{(0)}$ in den n Horizontalebenen $\overline{\mathfrak{H}}_i$ entsprechen. Wir ordnen diesen dann in einer beliebigen, aber ein für allemale bestimmten Weise die n zugehörigen Funktionenelemente zu, und bezeichnen sie dann durch $u(\overline{\mathfrak{P}}_1^{(0)}), u(\overline{\mathfrak{P}}_2^{(0)}), \ldots u(\overline{\mathfrak{P}}_n^{(0)})$. Auf diese Weise erhalten wir zu jedem der n zu $(z = \alpha_0)$ gehörigen regulären Punkte $\overline{\mathfrak{P}}_i^{(0)}$ in der i^{ten} Horizontalebene $\overline{\mathfrak{H}}_i$ ein eindeutig bestimmtes Funktionenelement $u(\overline{\mathfrak{P}}_i^{(0)})$ und diese sind sämtlich von einander verschieden. Wir denken uns nun jedes der n Funktionenelemente $u(\overline{\mathfrak{P}}_1^{(0)}), \ldots u(\overline{\mathfrak{P}}_n^{(0)})$ auf den zugehörigen Horizontalebenen $\overline{\mathfrak{H}}_1, \ldots \overline{\mathfrak{H}}_n$ fortgesetzt; dann erhalten wir auf jeder dieser Ebenen ein eindeutig bestimmtes System von Funktionszweigen; in jeder Ebene $\overline{\mathfrak{H}}_i$ hängen die Funktionswerte $u(\overline{\mathfrak{P}}_i)$ stetig zusammen. Sind ferner $\overline{\mathfrak{P}}_1, \overline{\mathfrak{P}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{P}}_n$ die zu irgend einem Werte $(z = \alpha)$ gehörigen Punkte der n Ebenen $\overline{\mathfrak{H}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{H}}_n$, und sind $u(\overline{\mathfrak{P}}_1), \ldots, u(\overline{\mathfrak{P}}_n)$ die n durch Fortsetzung von $u(\overline{\mathfrak{P}}_1^{(0)}), \ldots, u(\overline{\mathfrak{P}}_n^{(0)})$ hervorgehenden Funktionenelemente, so sind diese ebenfalls sämtlich von einander verschiedene reguläre Potenzreihen, und jede von ihnen stellt je eine der n von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(u, z) = 0$ in der Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ der unabhängigen Variabeln dar. Dafs nämlich z. B. $u(\overline{\mathfrak{P}}_1)$ und $u(\overline{\mathfrak{P}}_2)$ zwei von jenen Wurzeln in der Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ darstellen, folgt daraus, dafs jene Elemente aus den Wurzeln $u(\overline{\mathfrak{P}}_1^{(0)})$ und $u(\overline{\mathfrak{P}}_2^{(0)})$ derselben Gleichung für die Stelle $(z = \alpha_0)$ hervorgehen. Nähme man aber an, dafs beide Reihen nunmehr gleich seien, so würde man, indem nun beide identische Reihen auf demselben Wege nach $\overline{\mathfrak{P}}_1^{(0)}$ und $\overline{\mathfrak{P}}_2^{(0)}$ zurückgingen, notwendig auch hier zu gleichen Anfangselementen $u(\overline{\mathfrak{P}}_1^{(0)}), u(\overline{\mathfrak{P}}_2^{(0)})$ gelangen, während diese nach der Voraussetzung verschieden sind. — In genau derselben Weise sind auch jedem der h kritischen Punkte die je n zugehörigen Funktionenelemente eindeutig zugeordnet.

Auch hier ziehen wir es nun vor, jene Ausbreitung nicht auf n unendlich ausgedehnten Horizontalebenen, sondern auf n ineinander liegenden Kugelflächen zu machen. Wir denken uns also n Kugeln

$$\mathfrak{K}_1, \quad \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n,$$

von denen jede folgende in unendlich kleinem Abstande von der vorhergehenden innerhalb derselben gelegen ist. Da der Abstand der

Kugeln wieder unendlich klein angenommen wird, so können ihre Durchmesser als gleich angesehen werden, und zwar möge die Länge derselben $= 1$ sein. Jedem Punkte $\mathfrak{P}_1$ der obersten Kugelfläche $\mathfrak{K}_1$ ordnen wir dann ebenfalls wieder die auf den anderen Kugelflächen entsprechenden, also genau unter ihm auf demselben Kugelradius gelegenen Punkte $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots, \mathfrak{P}_n$ der übrigen Kugeln ebenso zu, wie dies vorher bei den Punkten der Ebene geschah; und nun setzen wir die Punkte der Kugel $\mathfrak{K}_1$ zu den Punkten der Ebene $\mathfrak{H}_1$ durch die schon mehrfach angewandte Konstruktion in Beziehung. Dann entsprechen jedem endlichen oder unendlichen Werte $\alpha = \xi + \eta i$ von z stets genau n untereinander liegende Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ jener n Kugeln; beschreibt der zu z gehörende Punkt $\overline{\mathfrak{P}}$ in der Horizontalebene eine beliebige Kurve, so entsprechen dieser genau n übereinander liegende und einander kongruente Kurven auf jenen n Kugeln.

Wir fixieren nun auf jeder der n Kugelschalen die h kritischen Stellen $\mathfrak{B}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(h)}$, den regulären Punkt $\mathfrak{B}^{(0)}$ sowie die sie umgebenden unbegrenzt kleinen Kreise $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_h$ und $\mathfrak{k}_0$ und verbinden die ersteren mit $\mathfrak{k}_0$ durch die jedesmal durch alle Kugeln geführten Schnitte $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_h$. Dann erhalten wir genau n kongruente zerschnittene Kugelschalen

$$\overline{\mathfrak{K}}_1, \quad \overline{\mathfrak{K}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_n,$$

auf denen wir nunmehr die Werte der n zu einem beliebigen regulären Punkte $\mathfrak{P}$ gehörenden Potenzreihen,

$$u_1(\mathfrak{P}), \quad u_2(\mathfrak{P}), \ldots, u_n(\mathfrak{P}),$$

in genau derselben Weise eindeutig ausbreiten können, wie dies vorher mit dem einen Elemente $u_1(\mathfrak{P})$ auf der einen Kugelfläche $\overline{\mathfrak{K}}$ geschah. Auch hier wollen wir die n zu einem regulären Werte ($z = \alpha_0$) der unabhängigen Variabeln zugehörigen untereinander liegenden Punkte der Kugelfläche durch $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}, \ldots, \mathfrak{P}_n^{(0)}$, und die willkürlich aber fest zugeordneten Funktionenelemente durch

$$u(\mathfrak{P}_1^{(0)}), \quad u(\mathfrak{P}_2^{(0)}), \ldots, u(\mathfrak{P}_n^{(0)})$$

bezeichnen, und $u(\mathfrak{P}_1^{(0)})$ z.B. das zu dem Punkt $\mathfrak{P}_1^{(0)}$ gehörige Funktionenelement nennen; denken wir uns dann diese Elemente sämtlich über alle jene einzelnen zerschnittenen Kugelflächen $\overline{\mathfrak{K}}_1, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_n$ fortgesetzt, so entspricht jedem regulären Punkte $\mathfrak{P}$ auf einer bestimmten Kugelfläche eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $u(\mathfrak{P})$ für u, so dafs nun der ganze Wertevorrat der n-deutigen Funktion u für alle endlichen und unendlichen regulären Werte von z eindeutig und in stetiger Aufeinanderfolge auf jenen n zerschnittenen Kugelflächen $\overline{\mathfrak{K}}_1, \overline{\mathfrak{K}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_n$ ausgebreitet ist.

Endlich können wir aber auch die n Reihen

$$u_1(\mathfrak{B}),\quad u_2(\mathfrak{B}), \ldots, u_n(\mathfrak{B})$$

in einem der kritischen Punkte $\mathfrak{B}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(h)}$ von vornherein so bezeichnen, dafs allgemein $u_i(\mathfrak{B})$ in einer endlichen Umgebung von $\mathfrak{B}$ mit den entsprechenden Werten von u in $\overline{\mathfrak{K}}_i$ koincidiert. Diesen kritischen Punkten $(z = \beta_i)$ selbst entsprechen vorläufig noch keine Punkte der Kugelflächen $\overline{\mathfrak{K}}_1$, weil diese bis jetzt noch ausgeschlossen waren. Im folgenden Abschnitte werden wir auch sie mit hineinziehen.

§ 4.

Wir haben schon hervorgehoben, dafs sich die Funktionen u auf jeder der n zerschnittenen Kugelflächen $\overline{\mathfrak{K}}_1, \overline{\mathfrak{K}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_n$ stetig ändern, dafs dies aber im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht, wenn die Schnitte $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_h$ überschritten werden. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Bedingungen sich $u(\mathfrak{P})$ auch bei einem solchen Übergange über einen Schnitt $\mathfrak{s}$ stetig ändert.

Es sei also $\overline{\mathfrak{K}}_g$ irgend eine jener n zerschnittenen Kugelflächen und $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{B}^{(i)}\mathfrak{B}^{(0)}$ einer der h auf ihr ausgeführten Schnitte. Im folgenden wollen wir uns jeden solchen Schnitt von $\mathfrak{B}^{(i)}$ als Anfangspunkt nach $\mathfrak{B}^{(0)}$ als dem gemeinsamen Endpunkte hin gezogen denken, so dafs auch seine positive Richtung durch $\mathfrak{B}^{(i)}\mathfrak{B}^{(0)}$ bezeichnet wird, und wollen als rechtes bzw. linkes Ufer dieses Schnittes dasjenige bezeichnen, welches sich beim Fortgange in positiver Richtung auf der rechten bzw. linken Seite befindet. Wir wollen dann, genauer gesprochen, untersuchen, ob bzw. wie sich die Funktion $u_g(\mathfrak{P})$ auf dem g^{ten} Blatte ändert, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ den Schnitt $\mathfrak{s}_i$ in der Richtung vom linken nach dem rechten Ufer überschreitet.

Es sei nun zunächst $\mathfrak{B}^{(i)}$ so gewählt, dafs die zugehörige Potenzreihe $u_g(\mathfrak{B}^{(i)})$ nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors fortschreitet. Ist dann $\mathfrak{C}_i$ der Konvergenzkreis von $u_g(\mathfrak{B}^{(i)})$, $\mathfrak{k}_i$ der um $\mathfrak{B}^{(i)}$ beschriebene, innerhalb $\mathfrak{C}_i$ liegende beliebig kleine Begrenzungskreis, und bezeichnet man zunächst mit λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer von $\mathfrak{s}_i$ einander gegenüber liegende Punkte von $\mathfrak{K}_g$ innerhalb des durch $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{k}_i$ begrenzten Kreisringes, so ist $u_g(\lambda) = u_g(\varrho)$, weil ja nach dem oben geführten Beweise die Potenzreihe $u_g(\mathfrak{P})$ nach einem Umlaufe um den Punkt $\mathfrak{B}^{(i)}$ in ihren Anfangswert zurückkehrt. Also gehören zu allen links und rechts von $\mathfrak{s}_i$ einander gegenüberliegenden Punkten λ und ϱ stets die gleichen Werte

von $u_g(\mathfrak{P})$, d. h. innerhalb jenes Kreisringes ($\mathfrak{k}_i$, $\mathfrak{C}_i$) ändert sich $u_g(\mathfrak{P})$ auch beim Übergange über $\mathfrak{S}_i$ ebenfalls stetig.

Sind also $u_g(\lambda)$ und $u_g(\varrho)$ die den beiden benachbarten Punkten λ und ϱ zugehörigen Funktionenelemente von u_g, so sind diese beiden regulären Potenzreihen identisch, wenn λ und ϱ einander unendlich nahe angenommen werden.

Es seien nun λ_1 und ϱ_1 irgend zwei andere unendlich benachbarte Gegenpunkte, welche irgendwo aufserhalb von $\mathfrak{C}_i$ auf der linken und rechten Seite desselben Schnittes $\mathfrak{S}_i$ liegen. Setzt man dann die einander gleichen Potenzreihen $u_g(\lambda)$ und $u_g(\varrho)$ längs der Ufer von $\mathfrak{S}_i$ nach λ_1 bzw. ϱ_1 fort, so bleiben jene beiden Reihen bei der Fortsetzung immer gleich, d. h. es ist für je zwei solche Gegenpunkte von $\mathfrak{S}_i$ $u_g(\lambda_1) = u_g(\varrho_1)$, und hieraus folgt, dafs sich $u_g(\mathfrak{P})$ stetig ändert, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ den Schnitt $\mathfrak{S}_i$ in dem Blatte $\overline{\mathfrak{K}}_g$ an irgend einer beliebigen Stelle überschreitet. Wir können also diesen Schnitt $\mathfrak{S}_i$ in dem Blatte $\overline{\mathfrak{K}}_g$ einfach wieder schliefsen und den zugehörigen Begrenzungskreis $\mathfrak{k}_i$ unendlich klein werden lassen, und das Gleiche können wir mit allen denjenigen Schnitten $\mathfrak{B}^{(i)}\mathfrak{B}^{(0)}$ in einem Blatte $\overline{\mathfrak{K}}_{g_1}$ thun, für welche das zugehörige Element $u_{g_1}(\mathfrak{B}^{(i)})$ nach ganzen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors fortschreitet, mag die Entwickelung nur positive Potenzen desselben enthalten oder mag sie mit negativen Potenzen beginnen.

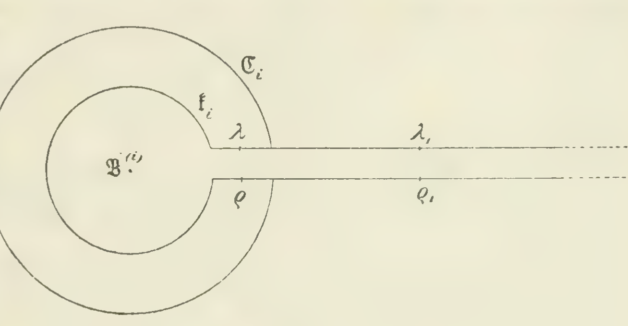


Fig. 13.

Ist $\mathfrak{B}$ der Anfangspunkt eines solchen nachher geschlossenen Schnittes $\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{(0)}$, so wird $\mathfrak{B}$ nachher ein gewöhnlicher Punkt einer der n Kugelflächen, und er besitzt höchstens die Besonderheit, dafs das zugehörige Funktionenelement:

$$u(\mathfrak{B}) = \frac{A_{-h}}{(z-\alpha)^h} + \cdots + \frac{A_{-1}}{z-\alpha} + A_0 + A_1(z-\alpha) + \cdots$$

von negativer Ordnung ist, d. h. mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen beginnt.

Ist ferner $\mathfrak{P}$ ein innerer Punkt des nachher geschlossenen Schnittes, so wird er nachher ebenfalls ein gewöhnlicher Punkt einer jener

n Kugelflächen, und die Umgebung des zugehörigen regulären Funktionenelementes $u(\mathfrak{P})$ liegt zur einen Hälfte auf der linken, zur anderen Hälfte auf der rechten Seite jenes nunmehr geschlossenen Schnittes.

Wir denken uns die Schliefsung eines solchen Schnittes $\mathfrak{S}_i$ in einem Blatte $\mathfrak{K}_g$ der Kugelfläche ein für allemal so ausgeführt, dafs wir jeden Punkt λ desselben mit seinem Gegenpunkte ϱ durch einen unendlich dünnen Faden verbinden und festsetzen, dafs der Übergang von λ nach ϱ oder umgekehrt auf diesem Faden zu geschehen habe. Wir erhalten auf diese Weise ein neues System von n Kugelschalen, in welchen alle und nur die Schnitte $\mathfrak{B}^{(i)}\mathfrak{B}^{(0)}$ noch offen sind, für welche die zugehörigen Entwickelungen $u_g(\mathfrak{B}^{(i)})$ nicht nach ganzen, sondern nach gebrochenen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors fortschreiten.

Es sei nun etwa die kritische Stelle $\mathfrak{B}^{(1)}(z = \alpha_0)$ so beschaffen, dafs zu ihr a konjugierte Entwickelungen gehören, welche nach Potenzen von $(z - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$ fortschreiten, und der Einfachheit halber sei die Zuordnung der Reihen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zu den Blättern $\overline{\mathfrak{K}}_1, \overline{\mathfrak{K}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_n$ so gemacht, dafs die a ersten Potenzreihen $u_1(\mathfrak{B}^{(1)}), u_2(\mathfrak{B}^{(1)}), \ldots, u_a(\mathfrak{B}^{(1)})$ jene a konjugierten Reihen sind, und dafs von ihnen allgemein $u_i(\mathfrak{B}^{(1)})$ in $u_{i+1}(\mathfrak{B}^{(1)})$ übergeht, wenn $(z - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$ durch $\omega(z - \alpha_0)^{\frac{1}{a}}$ ersetzt wird. Ist dann wieder $\mathfrak{k}_1$ die zu $\mathfrak{B}^{(1)}$ für alle n Blätter gehörende beliebig klein anzunehmende Begrenzung und $\mathfrak{S}_1$ der ihnen allen zugehörige Schnitt $\mathfrak{B}^{(1)}\mathfrak{B}^{(0)}$, so ist dieser für die a ersten Blätter noch nicht beseitigt, da hier die Entwickelungen nicht nach ganzen Potenzen von $z - \alpha_0$ fortschreiten, und wir wollen untersuchen, in welcher Weise sich jetzt $u_1(\mathfrak{P})$ ändert, wenn der Punkt $\mathfrak{P}$ im ersten Blatte jenen Schnitt von einem Punkte λ auf der linken Seite desselben nach einem gegenüberliegenden Punkte ϱ auf der rechten Seite überschreitet.

Es sei wieder $\mathfrak{C}_1$ ein den Punkt $\mathfrak{B}^{(1)}$ und den Begrenzungskreis $\mathfrak{k}_1$ umgebender Kreis, innerhalb dessen alle a Reihen $u_1(\mathfrak{B}^{(1)}), \ldots, u_a(\mathfrak{B}^{(1)})$ konvergieren. Wählen wir dann wieder jene beiden Gegenpunkte innerhalb des durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{k}_1$ gebildeten Ringes, so multipliziert sich, wie oben bewiesen, bei einer Umkreisung des Punktes $\mathfrak{B}^{(1)}$ von λ nach ϱ, also in positivem Sinne, jedes Glied $b_r(z - \alpha_0)^{\frac{r}{a}}$ allgemein mit ω^r, jene Reihe $u_1(\lambda)$ geht daher in die Reihe $u_2(\lambda)$ über, es wird also für alle innerhalb jenes Kreises gelegenen Gegenpunkte $u_1(\varrho) = u_2(\lambda)$, und genau ebenso wie vorher beweist man, dafs dasselbe für alle Punkte des ganzen Schnittes $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{B}^{(1)}\mathfrak{B}^{(0)}$ der Fall ist. Ebenso beweist

man, dafs in dem zweiten Blatte $u_2(\varrho) = u_3(\lambda)$ wird u. s. w., und dafs endlich in dem a^{ten} Blatte die Funktionswerte $u_a(\varrho)$ für alle auf der rechten Seite von $\mathfrak{S}_1$ liegenden Punkte identisch sind mit den Werten $u_1(\lambda)$, welche $u_1(\mathfrak{P})$ auf der linken Seite jenes Schnittes annimmt. Es ist also für je zwei Gegenpunkte λ und ϱ an den a kongruenten Schnitten $\mathfrak{S}_1$ in den Blättern $\overline{\mathfrak{K}}_1, \overline{\mathfrak{K}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_a$:

$$\begin{aligned}
u_1(\varrho) &= u_2(\lambda), \\
u_2(\varrho) &= u_3(\lambda), \\
&\cdots\cdots \\
u_{a-1}(\varrho) &= u_a(\lambda), \\
u_a(\varrho) &= u_1(\lambda).
\end{aligned}$$

Um also einen stetigen Zusammenhang der zu $u(\mathfrak{P})$ gehörenden Funktionswerte beim Übergange über diesen Schnitt $\mathfrak{S}_1$ zu erhalten, müssen wir jetzt nicht den Schnitt $\mathfrak{S}_1$ im ersten Blatte wieder aufheben, indem wir jeden Punkt ϱ desselben mit seinem Gegenpunkte λ in demselben Blatte durch einen unendlich dünnen Faden verbinden, sondern wir verbinden jeden Punkt ϱ des ersten Blattes mit seinem Gegenpunkte λ im zweiten Blatte durch einen unendlich dünnen Faden; ebenso verbinden wir jeden Punkt ϱ auf der rechten Seite von $\mathfrak{S}_1$ im zweiten Blatte mit seinem Gegenpunkte λ auf der linken Seite von $\mathfrak{S}_1$ im dritten Blatte, und fahren in derselben Weise fort, bis wir alle Punkte ϱ des Schnittes $\mathfrak{S}_1$ im $(a-1)^{\text{ten}}$ Blatte mit ihren Gegenpunkten λ im a^{ten} Blatte durch Fäden verbunden haben. Alsdann müssen wir endlich alle Punkte ϱ auf dem rechten Ufer von $\mathfrak{S}_1$ im letzten, dem a^{ten} Blatte, mit ihren Gegenpunkten λ auf dem linken Ufer des ersten Blattes durch unendlich dünne Fäden verbinden. Diese letzte Verbindung durchsetzt allerdings die früher gemachten Verbindungsfäden der vorigen Blätter; wir denken uns aber jene Verbindung ein für alle Male so gemacht, dafs eine solche Durchsetzung immer möglich ist, dafs also jene letzten Fäden an den vorher gezogenen vorübergeführt werden, und wir setzen auch hier fest, dafs ein Übergang von einem Punkte ϱ des einen Blattes zu einem Punkte λ eines anderen Blattes nur dann möglich ist, wenn man sie auf einem der Verbindungsfäden bewerkstelligen kann. Alsdann kann man von jedem Punkte ϱ von $\overline{\mathfrak{K}}_i$ nur zu einem Gegenpunkte λ von $\mathfrak{K}_{i+1}$ und ebenso von jedem Punkte λ von $\mathfrak{K}_i$ zu dem Gegenpunkte ϱ von $\mathfrak{K}_{i-1}$ übergehen, während in gleicher Weise der einzige mögliche Übergang von dem rechten Ufer von $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{K}_a$ nur zu dem linken Ufer von $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{K}_1$ möglich ist. Denkt man sich jene a Blätter nun in dieser Weise zu-

sammengeheftet, und werden die Funktionswerte von $u_1(\mathfrak{P}), \ldots, u_n(\mathfrak{P})$ auf ihnen ausgebreitet, so erkennt man, dafs sich nunmehr diese Werte auch über den Schnitt $\mathfrak{S}_1$ in stetiger Weise fortsetzen, dafs man jetzt also auch diesen Schnitt wieder beseitigen kann, nachdem man die n Blätter in der angegebenen Weise zusammengeheftet hat.

Es seien nun jene n wie vorher zerschnittenen Kugelflächen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ gegeben; dann können wir jeden der $h \cdot n$ Schnitte $\mathfrak{S}$ in jenen Blättern fortlassen, nachdem wir längs derselben die Flächen in der richtigen Weise zusammengeheftet haben. In der That gehört jeder solche Schnitt $\mathfrak{S}_i$ in einem Blatte $\mathfrak{K}_g$ zu einer Reihe $u_g(\mathfrak{B}^{(i)})$; schreitet nun diese Reihe nach ganzen Potenzen fort, so heften wir jeden Punkt ϱ auf der rechten Seite jenes Schnittes mit dem Gegenpunkte λ auf dem linken Ufer desselben Schnittes durch einen unendlich dünnen Faden zusammen und lassen alsdann den Schnitt fort. Schreitet dagegen $u_g(\mathfrak{B}^{(i)})$ nach Potenzen von $(z - a_0)^{\frac{1}{a}}$ fort, so koincidieren die Funktionswerte $u_g(\varrho)$ in allen Punkten auf der rechten Seite des Schnittes $\mathfrak{S}_i$ mit den Werten $u_{g'}(\lambda)$ für die entsprechenden Gegenpunkte auf der linken Seite jenes Schnittes in einem ganz bestimmten anderen Blatte $\bar{\mathfrak{K}}_{g'}$, und alsdann denken wir uns jeden Punkt ϱ von $\bar{\mathfrak{K}}_g$ mit seinem Gegenpunkte λ von $\bar{\mathfrak{K}}_{g'}$ in gleicher Weise unter Durchsetzung der die dazwischen liegenden Kugelschalen verbindenden Fäden durch unendlich dünne Fäden verbunden. In dieser Weise erhalten wir für jeden Schnitt in jedem Blatte eine Zusammenheftung längs desselben, so dafs nun über ihn hinaus stets ein kontinuierlicher Übergang in dasselbe oder in ein eindeutig bestimmtes anderes Blatt sich ergiebt, mag man nun jenen Übergang vom rechten zum linken oder vom linken zum rechten Ufer machen. Die Punkte $\mathfrak{P}_0$ auf einer solchen Übergangslinie, längs deren z. B. das rechte Ufer von $\mathfrak{K}_i$ mit dem linken von $\bar{\mathfrak{K}}_{i+1}$ zusammengeheftet sein möge, unterscheiden sich von den übrigen Punkten der einzelnen Kugelflächen nur durch den unwesentlichen Umstand, dafs von ihrer Umgebung die eine Hälfte zu der Kugelfläche $\mathfrak{K}_i$, die andere zu der darunter liegenden Fläche $\bar{\mathfrak{K}}_{i+1}$ gehört.

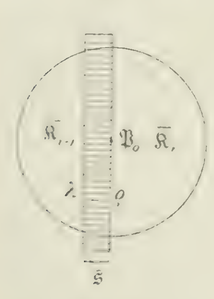


Fig. 14.

Sind die Blätter dann längs der nh Übergangslinien $\mathfrak{S}$ aneinander geheftet, so erhält man eine kugelförmige, aus n Blättern bestehende Fläche, deren Blätter nun aber nicht mehr getrennt verlaufen, sondern

eben längs jener Übergangslinien $\mathfrak{s}$ miteinander zusammenhängen können; und zwar hängen für jede Potenzreihe $u(\mathfrak{P})$, welche nach Potenzen von $(z-a_0)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, genau a und nur a jener Blätter, $\overline{\mathfrak{K}}_{i_1}, \overline{\mathfrak{K}}_{i_2}, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_{i_a}$, in der Weise zusammen, dafs man bei fortgesetzter Umkreisung des Punktes $\mathfrak{P}$ im positiven Sinne der Reihe nach aus $\overline{\mathfrak{K}}_{i_1}$ nach $\overline{\mathfrak{K}}_{i_2}$, $\overline{\mathfrak{K}}_{i_3}, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_{i_a}$ und erst nach a-maliger Umkreisung wieder nach $\overline{\mathfrak{K}}_{i_1}$ zurückgelangt. Ein solches Aggregat von n Kugelflächen, welche nach diesem durch die Natur der Funktion u und in zweiter Linie auch durch die Wahl der Schnitte $\mathfrak{s}$ vollständig bestimmten Gesetze zusammengeheftet sind, nennt man eine „Riemannsche Kugelfläche“, und sie möge im folgenden einfach mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden. Auf ihr läfst sich, wie eben bewiesen wurde, die analytische Funktion u in der Weise fortsetzen, dafs die sämtlichen Werte, die u für alle endlichen oder unendlichen Werte von z annimmt, eindeutig ausgebreitet sind und sich überall stetig aneinander schliefsen, mit Ausnahme derjenigen in endlicher Anzahl auftretenden Punkte, für welche u unendlich grofs wird.

§ 5.

Im vorigen Abschnitte haben wir gezeigt, dafs alle bis jetzt betrachteten Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ in Bezug auf ihre nächste genügend kleine Umgebung genau denselben Charakter haben, wie die Punkte einer einfachen Kugelfläche. Dieselbe besteht nämlich stets aus allen Punkten einer kleinen Kugelcalotte, deren Mittelpunkt $\mathfrak{P}$ ist, und welche sich im allgemeinen ganz in einem der n Blätter befindet; nur für die Punkte der Übergangslinien liegt jene Calotte zur Hälfte in einem, zur Hälfte in dem mit ihm verbundenen Blatte; dies ist aber für das Weitere völlig gleichgiltig.

Etwas anders gestaltet sich aber die Umgebung derjenigen Punkte, welche am Anfang und am Ende einer solchen Übergangslinie liegen, und diese müssen wir noch etwas genauer betrachten. Es sei $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{s}$ ein solcher Schnitt, längs dessen Rändern nach der Zusammenheftung a Blätter, etwa $\overline{\mathfrak{K}}_1, \overline{\mathfrak{K}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{K}}_a$, zusammenhängen. Es seien von vornherein die beliebig klein zu machenden Begrenzungskreise $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_0$ um $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_0$ in allen jenen Blättern unendlich klein gemacht, und dann das rechte Ufer von $\overline{\mathfrak{K}}_1$ mit dem linken von $\overline{\mathfrak{K}}_2$ längs des ganzen Schnittes von $\mathfrak{B}$ bis $\mathfrak{B}_0$ zusammengeheftet, und das Entsprechende für die übrigen Blätter durchgeführt. Dann sieht man leicht, dafs die Umgebung von $\mathfrak{B}$, d. h. die Gesamtheit aller Punkte von $\mathfrak{R}$, deren

auf $\mathfrak{K}$ gemessene Entfernung von $\mathfrak{B}$ beliebig klein ist, in diesem Falle keineswegs eine einblättrige einfache Kugelcalotte ist. Sie ist vielmehr offenbar eine kleine Schraubenfläche von sehr kleiner Steigung, welche sich in a vollen Gängen um $\mathfrak{B}$ herum windet, und deren Ende dann unter Durchsetzung aller anderen Windungen in den Anfang zurückkehrt.

Denken wir uns auf dem kleinen Kreiscylinder in Fig. 15 eine Spirale gezogen, welche nach a Windungen wieder in ihren Anfang zurückläuft, und projizieren wir sie von einem Punkte $\mathfrak{B}$ der Cylinderachse aus, so wird durch die Bewegung des Projektionsstrahles eine Fläche beschrieben, welche, falls der Cylinder klein ist und die a Windungen einander sehr nahe liegen, ein Bild der Umgebung eines solchen Punktes $\mathfrak{B}$ auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{K}$ ergiebt. Der einzige Unterschied besteht darin, dafs es nicht eine kleine Spirale von a Windungen, sondern ein System von a sehr nahen Kreisen ist, von denen jeder mit dem folgenden durch kleine Übergangslinien verbunden ist, und welche von einem Punkte $\mathfrak{B}$ der Achse projiziert werden (s. d. Fig. 16). Jedoch erkennt man sofort, dafs die erste kleine Fläche in die zweite durch eine ganz einfache Deformation übergeführt werden kann.

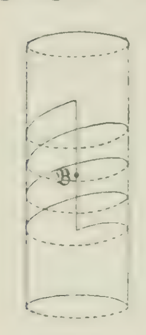


Fig. 15.

Einen solchen Punkt der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, dessen Umgebung keine einfache Calotte, sondern eine mehrblättrige Schraubenfläche ist, wollen wir einen Windungspunkt oder Verzweigungspunkt der Fläche $\mathfrak{K}$ nennen und im folgenden durch $\mathfrak{B}$ bezeichnen; und zwar soll $\mathfrak{B}$ ein a-blättriger Verzweigungspunkt oder ein Verzweigungspunkt der $(a-1)^{\text{ten}}$ Ordnung heifsen, wenn die Umgebung eine Schraubenfläche von a Gängen ist, wenn also in $\mathfrak{B}$ a unter den n Blättern von $\mathfrak{K}$ zusammenhängen. Bei einem Verzweigungspunkte $(a-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{B}$ kehrt ein Punkt seiner Umgebung erst nach a-maliger Umkreisung von $\mathfrak{B}$ in seine Anfangslage zurück. Nach dieser Definition kann ein gewöhnlicher Punkt $\mathfrak{P}_0$ der Kugelfläche auch als ein Verzweigungspunkt nullter Ordnung angesehen werden, da hier ein Punkt $\mathfrak{P}$ der Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ schon nach einmaliger Umkreisung von $\mathfrak{P}_0$ in seine Anfangslage zurückkehrt.

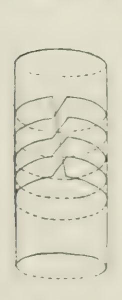


Fig. 16.

Wir müssen endlich noch die Endpunkte $\mathfrak{B}^{(0)}$ dieser Schnitte $\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{(0)}$ untersuchen, welche alle dem willkürlich aber fest angenommenen regulären Werte $(z=\beta_0)$ entsprachen. Ich behaupte nun, dafs diesem

Werte n einfache reguläre Punkte $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}, \ldots, \mathfrak{P}_n^{(0)}$ von $\mathfrak{R}$ entsprechen, deren Umgebungen sämtlich kleine Kugelcalotten sind. Der einzige, aber ganz unwesentliche Unterschied ist der, dafs eine solche Umgebung nicht in einem einzigen Blatte oder in zwei Blättern zu liegen braucht, sondern auch sehr wohl mehreren verschiedenen Blättern angehören kann, je nach der Natur der Schnitte, welche ihren gemeinsamen Endpunkt gerade in diesem Punkte $\mathfrak{P}^{(0)}$ haben. In der That, es sei $\mathfrak{B}^{(0)}$ einer der zu $(z = \beta_0)$ gehörigen regulären Punkte von $\mathfrak{R}$, und $\mathfrak{P}$ sei ein beliebiger Punkt seiner Umgebung. Da $(z = \beta_0)$ eine reguläre Stelle ist, so ändern sich die Werte von $u(\mathfrak{P})$ in der Umgebung von $\mathfrak{B}^{(0)}$ stetig und sind von den $(n-1)$ konjugierten Werten um endliche Gröfsen verschieden, welche den genau unter bzw. über $\mathfrak{P}$ liegenden Punkten entsprechen. Denkt man sich nun den Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{R}$ einmal um $\mathfrak{P}_0$ herumgeführt, so tritt jener Punkt jedesmal in ein neues Blatt ein, wenn er einen der vorher betrachteten Schnitte $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_0$ überschreitet, welcher seinen Endpunkt gerade in diesem Punkte $\mathfrak{B}_0$ hat. So wird $\mathfrak{P}$ bei seiner Umkreisung im allgemeinen in mehrere Blätter ein- und wieder aus ihnen heraustreten, aber bei dem ganzen unendlich kleinen Wege um $\mathfrak{B}^{(0)}$ herum unterscheidet sich $u(\mathfrak{P})$ von $u(\mathfrak{B}^{(0)})$ um unendlich wenig, d. h. bei jener ganzen Umkreisung ändert sich der Wert von $u(\mathfrak{P})$ um unendlich wenig, während er sich von allen $(n-1)$ konjugierten Wurzeln um endliche Gröfsen unterscheidet. Nach einer einmaligen Umkreisung von $\mathfrak{B}^{(0)}$ mufs also $\mathfrak{P}$ notwendig in seine Anfangslage zurückkehren, denn $u(\mathfrak{P})$ kann nur einen der n konjugierten Werte annehmen, darf sich aber andererseits nur um unendlich wenig bei jenem Umlaufe ändern, und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\mathfrak{P}$ nach einem einmaligen Umlaufe in seine Anfangslage zurückkehrt, wenn also $\mathfrak{B}^{(0)}$ ein regulärer Punkt der Fläche $\mathfrak{R}$ ist.

So hat sich gezeigt, dafs die ganze Fläche $\mathfrak{R}$ aus lauter regulären Punkten besteht, mit einziger Ausnahme einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten

$$\mathfrak{B}^{(1)}, \quad \mathfrak{B}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{B}^{(r)},$$

in deren jedem gewisse Blätter der Kugelfläche zusammenhängen. Zu jeder endlichen oder der unendlich fernen Stelle $(z = \alpha)$ gehört jetzt nicht ein Punkt, sondern im allgemeinen n sogenannte konjugierte Punkte

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$$

der Riemannschen Fläche, welche genau unter einander liegen, und ebenso wie früher durch Projektion des Punktes $(z = \alpha)$ auf der Horizontalebene vom Südpole der Kugelfläche aus gefunden werden.

Nur in dem Falle ist die Anzahl der untereinander liegenden konjugierten Punkte kleiner als n, wenn einer oder mehrere unter ihnen Verzweigungspunkte sind. Gehören, um gleich den allgemeinsten Fall zu nehmen, zu einem Werte $(z = \alpha)$ ν verschiedene Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_\nu$ der Kugelfläche, in denen bzw. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ Blätter derselben zusammenhängen, so ist stets

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu = n.$$

Zu jedem regulären Punkte $\mathfrak{P}_0$ von $\mathfrak{K}$ gehört ein eindeutig bestimmtes Funktionenelement

$$u(\mathfrak{P}_0) = \Sigma e_i (z - \alpha_0)^i,$$

welches nach g a n z e n Potenzen des zugehörigen Linearfaktors $(z - \alpha_0)$ fortschreitet und eine der Wurzeln u für alle Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}$ in endlicher Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ darstellt. Nur für gewisse unter diesen Punkten beginnt $u(\mathfrak{P}_0)$ mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von $(z - \alpha_0)$.

Ist dagegen $\mathfrak{V}(z = \beta)$ ein Verzweigungspunkt der $(a - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung oder ein a-blättriger Verzweigungspunkt, so gehört zu ihm eine Potenzreihe:

$$u_1(\mathfrak{V}) = \Sigma e_i (z - \beta)^{\frac{i}{a}},$$

welche nach ganzen Potenzen von $(z - \beta)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, und ihr entsprechen genau a konjugierte Reihen

$$u_1(\mathfrak{V}), \quad u_2(\mathfrak{V}), \ldots, u_a(\mathfrak{V}),$$

welche aus $u_1(\mathfrak{V})$ dadurch hervorgehen, dafs man $(z - \beta)^{\frac{1}{a}}$ durch seine a konjugierten Werte

$$(z - \beta)^{\frac{1}{a}}, \quad \omega (z - \beta)^{\frac{1}{a}}, \quad \omega^2 (z - \beta)^{\frac{1}{a}}, \ldots, \omega^{a-1} (z - \beta)^{\frac{1}{a}}$$

ersetzt, oder welche aus $u_1(\mathfrak{V})$ dadurch hervorgehen, dafs der betrachtete Nachbarpunkt den Punkt $\mathfrak{V}$ einmal, zweimal, ..., $(a - 1)$ mal umkreist. Jene a Reihen stellen hier also zusammengenommen die a-blättrige Umgebung von $\mathfrak{V}$ in genau derselben Weise dar, wie für einen regulären Punkt die Funktionswerte der einblättrigen Umgebung durch ein einziges Funktionenelement dargestellt werden.

Achte Vorlesung.

Die rationalen Funktionen $\Re(u_1, \ldots, u_n)$ der n Gleichungswurzeln. — Umläufe und Substitutionen. — Die Substitutionsgruppen. — Die Bedingungen dafür, dafs eine Funktion $R(u_1, \ldots, u_n)$ eine rationale Funktion von z ist. — Zusammenhängende und nicht zusammenhängende Riemannsche Kugelflächen. Irreduktible und reduktible Gleichungen. — Durch eine irreduktible Gleichung wird eine einzige analytische Funktion definiert. — Der Körper $K(z, u)$. — Die auf der Riemannschen Fläche regulären analytischen Funktionen sind die Funktionen des Körpers $K(z, u)$ und keine anderen.

§ 1.

Die Ergebnisse der siebenten Vorlesung zeigten, dafs die Potenzreihen

$$u_1, \quad u_2, \ldots, u_n,$$

welche die n Wurzeln der Gleichung $f(u, z) = 0$ in der Umgebung einer beliebigen regulären Stelle $(z = \alpha_0)$ darstellen, bzw. über die n Blätter

$$\overline{\mathfrak{K}}_1, \quad \overline{\mathfrak{K}}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$$

der Riemannschen Kugelfläche $\Re$ eindeutig fortgesetzt werden können, so dafs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ für jede reguläre und kritische Stelle $(z = \alpha)$ eindeutig bestimmte Reihen sind, die nach ganzen bzw. nach gebrochenen Potenzen von $z - \alpha$ fortschreiten, und alle für einen endlichen Bereich

$$|z - \alpha| < \varrho$$

konvergieren. Dasselbe gilt also auch von jeder beliebigen rationalen Funktion

$$R(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

der n Wurzeln. Wir haben auf S. 26 bereits spezielle Funktionen dieser Art, nämlich die symmetrischen Funktionen der n Wurzeln, untersucht und nachgewiesen, dafs sie rationale Funktionen von z sind. Damit aber eine rationale Funktion der Gleichungswurzeln eine rationale Funktion von z sei, ist im allgemeinen keineswegs erforderlich, dafs sie symmetrisch sei, d. h. durch keine Permutation der Wurzeln eine Änderung erfahre; es ist vielmehr nur nötig, dafs sie bei gewissen, von der Natur der Fläche $\Re$ abhängigen Permutationen ungeändert

bleibe. Zu der allgemeinen Lösung dieser Aufgabe führen die folgenden Betrachtungen:

Läfst man die unabhängige Variable z von der Stelle $(z = \alpha_0)$ zu einer Stelle $(z = \alpha)$ einen beliebigen Weg s beschreiben, welcher aber durch keinen kritischen Punkt hindurchgehen soll, und setzt man auf ihm die n Funktionenelemente $u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}$ simultan fort, so entsprechen dem Wege s von z n kongruente, genau untereinander liegende Wege $s_1, s_2, \ldots, s_n$, die von den n Anfangspunkten $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{P}_n^{(0)}$ aus bis zu den n ebenfalls genau untereinander liegenden Endpunkten gehen, welche zu dem Endwerte $(z = \alpha)$ gehören. Um die Beziehung zwischen den $(n+1)$ Wegen $s, s_1, \ldots, s_n$ deutlicher zu übersehen, umgeben wir die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ mit einer konzentrischen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$, deren Durchmesser nur wenig gröfser ist, als der von $\mathfrak{R}$, und bilden auf ihr die sämtlichen Punkte von z ab. Dann liegen die zu jedem Punkte $\mathfrak{p}^{(0)}$ $(z = \alpha_0)$ von $\mathfrak{K}$ gehörigen konjugierten Punkte $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}, \ldots, \mathfrak{P}_n^{(0)}$ von $\mathfrak{R}$ genau unter diesem Punkte $\mathfrak{p}^{(0)}$. Läfst man ferner z einen beliebigen Weg s auf $\mathfrak{K}$ beschreiben, so entsprechen ihm die n zu s kongruenten, genau unter s liegenden Wege $s_1, s_2, \ldots, s_n$, welche in den n Blättern von $\mathfrak{R}$ in eindeutig bestimmter Weise verlaufen. Betrachten wir speziell einen, etwa den ersten dieser Wege s_1, so wird dieser zuerst von $\mathfrak{P}_1^{(0)}$ aus ein Stück in dem ersten Blatte $\overline{\mathfrak{K}}_1$ verlaufen, kann aber dann in ein bestimmtes anderes Blatt übergehen, wenn er nämlich im ersten Blatte an eine Übergangslinie kommt. Dann kann er, eine weitere Übergangslinie überschreitend, in ein drittes Blatt eintreten u. s. w., bis er in einem bestimmten Punkte $\mathfrak{P}_{i_1}$ des i_1^{ten} Blattes endigt, welcher zu dem Endwerte $(z = \alpha)$ gehört, so dafs also bei direkter Fortsetzung das Anfangselement $u_1^{(0)}$ in das Endelement u_{i_1} übergeführt wird. In gleicher Weise mögen bei dieser Fortsetzung die zu $(z = \alpha_0)$ gehörenden Anfangselemente

$$u_1^{(0)}, \quad u_2^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}$$

in die Endelemente

$$u_{i_1}, \quad u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$$

übergehen, welche sämtlich zu $(z = \alpha)$ gehören und alle voneinander verschieden sind, da, falls z. B. $u_{i_1} = u_{i_2}$ wäre, ein und dasselbe Endelement u_{i_1} bei Durchlaufung des umgekehrten Weges in zwei verschiedene Anfangselemente $u_1^{(0)}$ und $u_2^{(0)}$ überginge, was offenbar unmöglich ist.

Besteht zwischen den n Funktionenelementen $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}$ irgend eine rationale Gleichung

$$R(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}) = 0$$

mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten, so bleibt sie erfüllt, wenn man diese n Elemente auf irgend einem Wege fortsetzt; aus ihr folgt also sofort die Richtigkeit der allgemeineren Gleichung

$$R(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}) = 0,$$

wenn dieses wie vorher die Endelemente sind, welche zu den n kongruenten Fortsetzungsbahnen gehören.

Es sei speziell der Weg s auf $\mathfrak{K}$ eine geschlossene, von einer beliebigen Stelle $(z = a)$ ausgehende und wieder dahin zurücklaufende Kurve. Dann gehen die n Elemente $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in die Reihen $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$ über, welche, abgesehen von der Reihenfolge, mit jenen übereinstimmen. Bei jenem Umlauf s der unabhängigen Variabeln erfahren also die n Wurzeln $u_1, \ldots, u_n$ eine ganz bestimmte Substitution S, welche in leicht verständlicher Bezeichnung durch die Gleichung

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \end{pmatrix} \quad \text{oder kürzer durch} \quad S = \begin{pmatrix} k \\ i_k \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden kann. In derselben Weise geht offenbar eine beliebige rationale Funktion $R(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ bei jenem Umlaufe in $R(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$ über.

Umkreist z. B. die Variable z einen Punkt $(z = a_0)$, dem auf der Fläche $\mathfrak{R}$ ein α-blättriger Verzweigungspunkt $\mathfrak{B}_\alpha$ und sonst lauter reguläre Punkte entsprechen, und wo etwa die α ersten Blätter $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_\alpha$ in dieser Reihenfolge in $\mathfrak{B}_\alpha$ zusammenhängen, so geht bei dieser Umkreisung

$$u_1, u_2, \ldots, u_{\alpha-1}, u_\alpha \quad \text{bzw. in} \quad u_2, u_3, \ldots, u_\alpha, u_1$$

über, während alle anderen Wurzeln ungeändert bleiben; die zugehörige Permutation ist also die folgende:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & \alpha - 1, & \alpha, & \alpha + 1, & \ldots, & n \\ 2, & 3, & \ldots, & \alpha, & 1, & \alpha + 1, & \ldots, & n \end{pmatrix};$$

eine solche Vertauschung $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & \alpha \\ 2, & 3, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}$ von α Elementen wird bekanntlich eine cyklische Substitution derselben genannt. Jedem von $(z = a)$ ausgehenden geschlossenen Wege s entspricht so eine eindeutig bestimmte Substitution S für die n Wurzeln, welche aus der Natur der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ unmittelbar gefunden werden kann. Stellt man sich also vor, dafs z von jenem Anfangspunkte aus der Reihe nach alle geschlossenen Wege beschreibt, so wird nur eine endliche Anzahl

von ihnen voneinander verschiedene Substitutionen der n Wurzeln ergeben, da zwei Umläufe, zwischen denen kein kritischer Punkt enthalten ist, dieselbe Substitution hervorbringen. Es seien

1) $$S_1, \quad S_2, \ldots, S_\nu$$

alle voneinander verschiedenen Substitutionen der Wurzeln, welche durch die Umläufe von z hervorgebracht werden können, und

1a) $$s_1, \quad s_2, \ldots, s_\nu$$

die zugehörigen Wege von z auf der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$. Läfst man dann die Variable z zuerst den Weg s_1 und hierauf den Weg s_2 beschreiben, so erhält man einen ebenfalls geschlossenen Weg, der durch $s_1 s_2$ bezeichnet werde, und ihm entspricht eine Substitution, welche ebenfalls durch $S_1 S_2$ bezeichnet und das Produkt von S_1 und S_2 genannt werden soll; sie entsteht offenbar, wenn man zuerst die Substitution S_1 und nach ihr die Substitution S_2 anwendet. So ist z. B.:

$$S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

denn es geht z. B. durch S_1 1 in 2, durch S_2 2 in 4, also durch $S_1 S_2$ 1 in 4 über, ebenso geht durch S_1 2 in 4, durch S_2 4 in 2 über, also geht durch $S_1 S_2$ 2 in 2 über, bleibt also ungeändert u. s. w. Selbstverständlich ist bei dem hier definierten Produkte zweier oder mehrerer Substitutionen die Reihenfolge der Faktoren im allgemeinen nicht gleichgiltig, wie aus der Vergleichung des obigen Produktes mit dem anderen:

$$S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

hervorgeht. Da aber zu jedem Umlaufe $s_1 s_2$ das Produkt $S_1 S_2$ gehört, so mufs dieses auch in der vollständigen Tabelle (1) aller zu irgend einem Umlaufe gehörigen Substitutionen auftreten. Man erhält also den folgenden, für die Algebra grundlegenden Satz, den wir hier wenigstens kurz hervorheben wollen:

Das zu allen Umläufen gehörige vollständige Substitutionensystem $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ bildet in dem Sinne eine sogenannte Gruppe, dafs das Produkt von zwei oder mehreren unter diesen Substitutionen ebenfalls in der Gruppe enthalten ist.

Wir beweisen nun den folgenden allgemeinen Satz:

Eine rationale Funktion $R(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ der n Wurzeln u_i gehört dann und nur dann zu dem Körper $K(z)$ der rationalen Funktionen von z, wenn sie bei jedem Umlaufe von z ungeändert bleibt.

Jede rationale Funktion der n Wurzeln kann ja in endlicher Umgebung einer beliebigen Stelle $(z = \alpha)$ in eine konvergente Reihe entwickelt werden, welche nach Potenzen von $z - \alpha$ fortschreitet und höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von $z - \alpha$ enthält; endlich kann R höchstens eine endlich vieldeutige Funktion von z sein, in der That kommen ja dieselben Eigenschaften den n Wurzeln, also auch jeder rationalen Funktion derselben zu. Eine solche Funktion R ist aber nach einem auf S. 23 bewiesenen allgemeinen Satze dann und nur dann rational in z, wenn sie eine eindeutige Funktion des Ortes ist, deren Entwickelung in der Umgebung jeder Stelle $(z = \alpha)$ nach ganzen Potenzen von $z - \alpha$ fortschreitet. Damit nun diese erste Bedingung erfüllt sei, ist notwendig und hinreichend, dafs sich R bei keinem Umlaufe von z ändere. Ist diese erste Bedingung erfüllt, so gilt aber das Gleiche auch von der zweiten; in der That kann die Entwickelung von R nur dann überhaupt gebrochene Potenzen von $z - \alpha$ enthalten, wenn zu dem Werte $(z = \alpha)$ mindestens ein Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ gehört. Ist das aber der Fall, und enthält die Entwickelung von R auch nur eine gebrochene Potenz

$$e_i (z - \alpha)^{\frac{i}{\mu}},$$

deren Exponent $\frac{i}{\mu}$ ein reduzierter rationaler Bruch ist, so würde bei einem Umlaufe um den Punkt $(z = \alpha)$ dieses Glied in das konjugierte

$$e_i \omega^i (z - \alpha)^{\frac{i}{\mu}} \qquad \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}\right)$$

übergehen, d. h. die Reihe R würde sich gegen unsere Voraussetzung in mindestens einem ihrer Glieder bei jenem Umlaufe ändern. Also müssen bei allen jenen Entwickelungen alle gebrochenen Potenzen von $z - \alpha$ notwendig fehlen; ist dies aber der Fall, so ist $\mathfrak{R}$ wirklich rational von z abhängig, was zu beweisen war.

Eine unmittelbare Folge dieses allgemeinen Satzes ist das oben erwähnte Theorem, dafs jede symmetrische Funktion der n Gleichungswurzeln eine rationale Funktion von z ist. Dieser Satz geht aber viel weiter: Da jeder Umlauf um eine Stelle $(z = \alpha_0)$, der einer oder mehrere der Verzweigungspunkte entsprechen, nur cyklische Vertauschungen bei denjenigen Wurzeln hervorbringt, welche dort ineinander übergehen, so findet man leicht ein vollständiges System von Substitutionen

$$(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu),$$

bei welchen eine rationale Funktion $R(u_1, \ldots, u_n)$ ungeändert bleiben mufs, damit sie rational von z abhänge; auch dieses System bildet, wie leicht zu sehen, eine Gruppe, die sogenannte G r u p p e d e r G l e i c h u n g

$f(u, z) = 0$, und damit ist dann eine vollständige Grundlage für die algebraische Behandlung dieser Gleichung gegeben. Wir wollen jedoch auf diese Fragen hier nicht näher eingehen.

§ 2.

Wir wollen dieses Resultat benutzen, um auf Grund der zugehörigen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ die Frage nach der Zerlegbarkeit der Funktion $f(u, z)$ in rationale Faktoren vollständig zu entscheiden. Die Fläche $\mathfrak{R}$ kann entweder zusammenhängend, d. h. so beschaffen sein, daſs man auf ihr fortgehend von jedem ihrer Punkte $\mathfrak{P}^{(0)}$ zu jedem anderen Punkte $\mathfrak{P}$ gelangen kann, oder sie kann in mehrere zusammenhängende Teile zerfallen, welche aber untereinander keine Verbindung haben. Da die einzelnen Blätter nur durch eine endliche Anzahl von Verzweigungsschnitten miteinander verbunden sind, so ist die Frage, welche Blätter miteinander zusammenhängen, welche nicht, in jedem Falle leicht zu entscheiden. Zwei solche völlig getrennte Teile können aber sehr wohl so ineinander liegen, daſs sie nicht voneinander entfernt werden können. Besteht z. B. die ganze Fläche aus drei Kugelschalen, deren erste und dritte längs eines oder mehrerer Verzweigungsschnitte aneinander geheftet sind, während die zweite zwischen beiden liegt, also nicht mit ihnen zusammenhängt, so durchsetzen zwar die Schalen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ die mittlere Schale $\mathfrak{K}_2$ längs jener Schnitte, aber da kein Übergangsfaden von $\mathfrak{K}_1$ bezw. $\mathfrak{K}_3$ zu $\mathfrak{K}_2$ hinführt, so bilden $\mathfrak{K}_2$ und $(\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_3)$ zwei getrennte Teile von $\mathfrak{R}$.

Es möge nun $\mathfrak{R}$ einen zusammenhängenden Teil $\mathfrak{R}_1$ besitzen, welcher aus μ Kugelschalen besteht, und es sei die Bezeichnung der Schalen der Einfachheit wegen so gewählt, daſs dies die μ ersten Schalen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_\mu$ sind. Sind dann $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ die jenen Schalen entsprechenden μ Wurzeln, so ist jede symmetrische Funktion derselben

$$S(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)$$

eine Funktion von z, welche bei keinem einzigen Umlauf der Variablen geändert wird. Es sei nämlich $(z = \alpha)$ eine beliebige reguläre Stelle auf der einblättrigen, $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mu, \mathfrak{P}_{\mu+1}, \ldots, \mathfrak{P}_n$ die zugehörigen Punkte der n-blättrigen Kugelfläche; dann entsprechen jedem Umlaufe der Variablen z von jener Stelle aus auf $\mathfrak{R}_1$ μ kongruente, von $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mu$ ausgehende Wege, welche zu μ voneinander verschiedenen Punkten $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_\mu}$ zurückkehren, die auch zu $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mu, \ldots, \mathfrak{P}_n$ gehören; da aber die $n - \mu$ letzten Punkte $\mathfrak{P}_{\mu+1}, \ldots, \mathfrak{P}_n$ von $\mathfrak{R}_1$ aus nicht erreichbar sind, so sind $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_\mu}$ abgesehen von der Ordnung mit $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_\mu$ identisch. Eine symmetrische Funktion von $u_1, \ldots, u_\mu$ bleibt also in der That bei jedem Umlaufe von z ungeändert und ist demnach notwendig eine rationale Funktion von z.

Bildet man nun die Gleichung:

$$\mathfrak{f}(u) = (u - u_1) \ldots (u - u_\mu) = u^\mu + c_{\mu-1}(z) u^{\mu-1} + \cdots + c_0(z) = 0,$$

welcher nur diese ersten μ Wurzeln von $f(u, z) = 0$ genügen, so sind auch ihre Koeffizienten $c_i(z)$ als symmetrische Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ rationale Funktionen von z; es sind also diese μ ersten Wurzeln, welche dem zusammenhängenden Teile von $\mathfrak{R}$ entsprechen, für sich die Wurzeln einer Gleichung des μ^{ten} Grades mit rationalen Koeffizienten.

Dies ist aber auch die Gleichung niedrigsten Grades mit rationalen Koeffizienten, der eine dieser μ Reihen $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ genügen kann. Es besteht nämlich der folgende Satz:

> Eine Gleichung $F(u, z) = 0$ hat dann und nur dann mit der Gleichung $\mathfrak{f}(u, z) = 0$ eine Wurzel gemeinsam, wenn sie alle anderen Wurzeln jener Gleichung ebenfalls besitzt, d. h. wenn $F(u, z)$ durch $\mathfrak{f}(u, z)$ teilbar ist.

In der That, ist $u = u_1$ eine Wurzel von $F(u, z) = 0$, so ist nach dem auf S. 61 bewiesenen Satze

$$F(u, z) = (u - u_1) F_1(u, u_1, z),$$

wo die Koeffizienten von $F_1(u)$ ebenfalls für eine endliche Umgebung der Stelle $(z = a_0)$ konvergieren. Setzt man nun die rechte Seite auf $\mathfrak{R}_1$ von $\mathfrak{P}_1$ etwa nach $\mathfrak{P}_2$ fort, so bleibt jene Gleichung giltig und sie geht über in die andere

$$F(u, z) = (u - u_2) F_1(u, u_2, z),$$

welche zeigt, dafs auch die von u_1 verschiedene Reihe u_2 eine Wurzel der obigen Gleichung ist, und das Gleiche gilt von $u_3, \ldots, u_\mu$. Genau nach der auf S. 62 benutzten Methode folgt aber daraus, dafs $F(u, z)$ durch das Produkt der μ zugehörigen Linearfaktoren $(u - u_i)$ teilbar, d. h. dafs

$$F(u, z) = (u - u_1) \ldots (u - u_\mu) \overline{F}(u, z) = \mathfrak{f}(u, z) F(u, z)$$

ist, und der zweite Faktor ist notwendig eine rationale Funktion von z, weil dasselbe von dem ersten gilt.

Hieraus ergiebt sich sofort der wichtige Satz:

> Eine Gleichung $F(u_1, z) = 0$, welche für eine Wurzel u_1 der Gleichung $\mathfrak{f}(u, z) = 0$ erfüllt ist, bleibt bestehen, wenn man u_1 durch die anderen Wurzeln $u_2, u_3, \ldots, u_\mu$ jener Gleichung ersetzt.

Ist die Funktion $F(u, z)$ von niedrigerem als dem μ^{ten} Grade, so kann sie nicht durch $\mathfrak{f}(u)$ teilbar sein, wenn sie nicht identisch verschwindet; also ergiebt sich als Korollar:

> Ist u_1 die Wurzel der Gleichung μ^{ten} Grades $\mathfrak{f}(u) = 0$, so genügt sie keiner Gleichung von niedrigerem als dem μ^{ten} Grade, es sei denn, dafs alle ihre Koeffizienten identisch verschwinden.

Eine Funktion von u heifst irreduktibel oder unzerlegbar, wenn sie, wie die Funktion $\mathfrak{f}(u, z)$ nicht in zwei Faktoren niedrigerer Grade mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten zerlegt werden kann; sie heifst reduktibel oder zerlegbar, wenn sie in Faktoren niedrigerer Grade zerfällt. Aus unserer Untersuchung ergiebt sich also der von Puiseux herrührende Satz:

> Eine Funktion $f(u, z)$ ist dann und nur dann irreduktibel, wenn die zugehörige Riemannsche Fläche zusammenhängend ist.

Diesem stellt sich der allgemeinere Satz an die Seite:

> Eine Funktion $f(u, z)$ besitzt genau ebensoviele irreduktible Faktoren, wie die Anzahl der zusammenhängenden Teile beträgt, aus denen die zugehörige Riemannsche Fläche besteht, und die Blätterzahl eines jeden solchen Teiles ist gleich dem Grade des zugehörigen irreduktibeln Faktors.

Da wir nun in den Stand gesetzt sind, auf rationalem Wege die zu einer Gleichung $f(u) = 0$ gehörende Riemannsche Fläche zu konstruieren und zu bestimmen, ob sie zusammenhängend ist oder nicht, so sind wir auch imstande zu erkennen, ob eine vorgelegte Funktion irreduktibel ist oder nicht, und im letzteren Falle ihre Zerlegung in irreduktible Faktoren sofort anzugeben. Wir können daher im folgenden auch stets voraussetzen, dafs die gegebene Gleichung $f(u) = 0$ irreduktibel ist, dafs also die algebraische Funktion u keiner Gleichung von niedrigerem als dem n^{ten} Grade mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten genügt, und diese Voraussetzung wollen wir für die Folge machen. Sollte sie für eine vorgelegte Gleichung nicht erfüllt sein, so wählen wir an Stelle der letzteren der Reihe nach jeden einzelnen ihrer irreduktibeln Faktoren und führen für diese die weiteren Untersuchungen durch.

Wir hatten bis jetzt die n Wurzeln $u(\mathfrak{P}_1), u(\mathfrak{P}_2), \ldots, u(\mathfrak{P}_n)$ einer Gleichung n^{ten} Grades als Elemente analytischer Funktionen betrachtet, aber noch nicht untersucht, ob sie untereinander zusammenhängende Elemente einer einzigen analytischen Funktion sind, oder ob sie etwa zu verschiedenen Funktionen gehören, ob also durch eine Gleichung $f(u, z) = 0$ eine oder mehrere monogene analytische Funktionen dargestellt werden. Die soeben durchgeführten Untersuchungen beweisen nun die Richtigkeit des folgenden Puiseuxschen Fundamentalsatzes:

Durch eine irreduktible Gleichung n^{ten} Grades $f(u,z)=0$ wird eine einzige analytische Funktion u von z definiert, und zwar für die ganze zugehörige n-blättrige Riemannsche Kugelfläche $\mathfrak{R}$. Durch eine reduktible Gleichung werden so viele verschiedene analytische Funktionen definiert, als die Anzahl ihrer irreduktibeln Faktoren beträgt.

In der That gehört zu einer irreduktibeln Gleichung n^{ten} Grades eine zusammenhängende n-blättrige Riemannsche Kugelfläche, in der Weise, daſs jedem regulären oder Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}$ derselben ein Funktionenelement $u(\mathfrak{P})$ eindeutig entspricht. Denkt man sich also für einen beliebigen regulären Punkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ das Element $u(\mathfrak{P}^{(0)})$ gebildet, und dann analytisch fortgesetzt, und beachtet man, daſs man von $\mathfrak{P}^{(0)}$ aus jeden anderen regulären Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{R}$ erreichen und für jeden kritischen Punkt alsdann das zugehörige Element eindeutig bestimmen kann, so ergiebt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung.

§ 3.

Ist die Gleichung n^{ten} Grades $f(u,z)=0$ irreduktibel, so ist die analytische Funktion u auf der zugehörigen Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen auch stetig. An diesen Stellen $\mathfrak{P}$ beginnt die Entwickelung des zugehörigen Funktionenelementes nach ganzen oder (falls $\mathfrak{P}$ ein Verzweigungspunkt sein sollte) nach gebrochenen Potenzen von $(z-a)$ wieder nur mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen. Wir wollen daher diese Stellen wieder als Pole der Funktion u bezeichnen.

Zu jeder Stelle $\mathfrak{P}^{(0)}$, mag sie nun eine reguläre oder eine Verzweigungsstelle sein, gehört ein einziges Funktionenelement:

$$u(\mathfrak{P}^{(0)}) = c_h (z-\alpha_0)^{\frac{h}{a}} + c_{h+1}(z-\alpha_0)^{\frac{h+1}{a}} + \cdots,$$

welches den Wert von u für alle Nachbarpunkte $\mathfrak{P}$ einer genügend kleinen Umgebung von $\mathfrak{P}^{(0)}$ eindeutig definiert. Ist $\mathfrak{P}^{(0)}$ regulär, also die Umgebung ein einblättriger kleiner Kreis, so ist $a=1$, die Entwickelung schreitet nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha_0)$ fort. Ist dagegen $\mathfrak{P}^{(0)}$ ein a-blättriger Verzweigungspunkt, so schreitet die Entwickelung nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fort, und stellt $u(\mathfrak{P})$ für alle Nachbarpunkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{P}^{(0)}$ dar, welche auf der kleinen a-blättrigen Schraubenfläche liegen, die in diesem Falle die Umgebung von $\mathfrak{P}^{(0)}$ bildet. Soll ferner umgekehrt ein Element $v(\mathfrak{P})$ irgend einer analytischen

Funktion v in der Umgebung eines a-blättrigen Verzweigungspunktes $\mathfrak{P}^{(0)}$ eine eindeutige Funktion des Ortes $\mathfrak{P}$ sein, so mufs in der zugehörigen Entwickelung:

$$v(\mathfrak{P}^{(0)}) = \mathfrak{k}_k (z - \alpha_0)^{\frac{k}{b}} + \mathfrak{k}_{k+1} (z - \alpha_0)^{\frac{k+1}{b}} + \cdots$$

der Generalnenner b aller Exponenten notwendig gleich a oder ein Teiler von a sein. Läfst man nämlich den Punkt $\mathfrak{P}$ den Mittelpunkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ a-mal umkreisen, und beachtet dabei, dafs er dadurch wieder in seine Anfangslage zurückkehrt, so folgt:

$$v(\mathfrak{P}^{(0)}) = \Sigma \mathfrak{k}_r (z - \alpha)^{\frac{r}{b}} = \Sigma \mathfrak{k}_r \omega^{ar} (z - \alpha)^{\frac{r}{b}},$$

wenn $\omega = e^{\frac{2\pi i}{b}}$ ist; also mufs für jeden der auftretenden Exponenten r

$$e^{\frac{2\pi a r}{b} \cdot i} = 1,$$

also wirklich a ein Vielfaches von b sein.

Wir stellen uns jetzt die umgekehrte Aufgabe:

> Es sei u eine beliebig gegebene algebraische Funktion, $\mathfrak{R}$ die zugehörige zusammenhängende Kugelfläche. Es sollen alle analytischen Funktionen gefunden werden, welche auf $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf eine endliche Anzahl von Polen auch stetig sind.

Wir fanden früher, dafs die Gesamtheit aller analytischen Funktionen Z, welche auf der einblättrigen Kugelfläche eindeutig und bis auf endliche Anzahl von Polen auch stetig sind, mit dem Körper $K(z)$ aller rationalen Funktionen von Z identisch ist. Wir werden jetzt einen Fundamentalsatz beweisen, welcher eine direkte Erweiterung jenes Theorems auf die algebraischen Funktionen ist. Zu dem Zwecke erweitern wir den früher benutzten Begriff des Körpers folgendermafsen:

> Es sei u eine gegebene algebraische Funktion von z, welche durch die Gleichung
>
> $$f(u, z) = u^n + a_{n-1}(z) u^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0$$
>
> definiert sein möge. Dann bildet die Gesamtheit aller rationalen Funktionen
>
> $$U = \varphi(u, z)$$
>
> von u und z einen Bereich, welcher der zu (z, u) gehörige Funktionenkörper genannt und durch $K(z, u)$ bezeichnet werden soll; jede solche Funktion U soll ein Element des Körpers

heifsen. Diese Definition und alle zunächst zu ziehenden Folgerungen gelten auch, wenn die Definitionsgleichung für u reduktibel ist. Wir werden aber im folgenden nur den Fall einer irreduktiblen Gleichung in Betracht ziehen.

Der hier definierte Körper $K(z, u)$ hat wieder die Eigenschaft, dafs man ihn niemals verläfst, wenn man irgend welche von seinen Elementen durch die elementaren Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division verbindet, denn die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient von zwei rationalen Funktionen

$$U = \varphi(u, z), \quad V = \psi(u, z),$$

von u und z ist ja wieder eine solche, gehört also ebenfalls dem Körper $K(z, u)$ an, und umgekehrt kann jedes Element des Körpers aus den beiden Elementen z und u durch genügend oft wiederholte Anwendung jener vier Rechenoperationen gebildet werden.

Alle Elemente des Körpers $K(z, u)$ sind auf der zu u gehörigen Riemannschen Kugelfläche eindeutige und bis auf eine endliche Anzahl von Polen daselbst stetige analytische Funktionen.

Dies ist für u bereits bewiesen und für z selbstverständlich. Nimmt man aber an, dafs zwei Funktionen U und V des Körpers jene Eigenschaften besitzen, so gilt dasselbe auch von den vier analytischen Funktionen

$$U + V, \quad U - V, \quad UV, \quad \frac{U}{V}$$

(wobei natürlich der Quotient nur dann eingeführt werden darf, wenn der Nenner nicht identisch Null ist). Da nun jede Funktion des Körpers $K(u, z)$ auf diesem Wege entsteht, so ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Die soeben gefundene Eigenschaft der Funktionen des Körpers ist aber für sie charakteristisch; es besteht nämlich der folgende Fundamentalsatz, durch welchen zugleich die oben gestellte Aufgabe vollständig gelöst wird.

Eine analytische Funktion U ist dann und nur dann auf der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Polen auch stetig, wenn sie dem Körper $K(z, u)$ angehört.

Dafs diese Bedingung notwendig ist, damit U zu $K(z, u)$ gehöre, folgt aus der soeben bewiesenen Eigenschaft des Körpers $K(z, u)$. Um zu zeigen, dafs sie auch hinreichend ist, verfahren wir folgendermafsen:

Es sei U eine auf $\mathfrak{R}$ eindeutige analytische Funktion, welche nur eine endliche Anzahl von Polen besitzt; dann zeigen wir direkt, dafs man stets n solche rationale Funktionen

$$A_0(z), \quad A_1(z), \ldots, A_{n-1}(z)$$

bestimmen kann, dafs identisch:

$$U = A_0(z) + A_1(z)u + \cdots + A_{n-1}(z)u^{n-1}$$

ist; damit ist offenbar der verlangte Beweis vollständig erbracht.

Es seien wieder $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die n Reihen für u, welche zu irgend welchen n übereinander liegenden Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ von $\mathfrak{R}$ gehören und die dem Werte $(z = a)$ der unabhängigen Variabeln entsprechen mögen. Soll dann die angegebene Darstellung für U möglich sein, und sind $U_1, U_2, \ldots, U_n$ die n Reihen, die U in der Umgebung jener n Punkte darstellen, so müssen die zugehörigen Werte der Koeffizienten A_i den n Gleichungen genügen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} U_1 &= A_0 + A_1 u_1 + \cdots + A_{n-1} u_1^{n-1} \\ U_2 &= A_0 + A_1 u_2 + \cdots + A_{n-1} u_2^{n-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_n &= A_0 + A_1 u_n + \cdots + A_{n-1} u_n^{n-1}, \end{aligned}$$

da sie sich als rationale Funktionen nicht ändern dürfen, wenn man z. B. U_1 und u_1 simultan in U_2 und u_2 überführt. Durch diese n Gleichungen sind die Koeffizienten $A_i(z)$ eindeutig bestimmt, denn die Determinante

$$\left| 1 \quad u_i \quad u_i^2 \ldots u_i^{n-1} \right|$$

ist ja gleich der Quadratwurzel aus der Diskriminante der Gleichung $f(u) = 0$, also sicher nicht identisch Null, und hieraus folgt, dafs diese Darstellung auch nur auf eine einzige Weise möglich ist. Die Gröfsen $A_i(z)$ bestimmen sich aus (1) als homogene, lineare Funktionen von $U_1, U_2, \ldots, U_n$, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sind; sie ergeben sich also als Funktionen von z, welche in der Umgebung jeder Stelle der n-blättrigen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutige analytische Funktionen des Ortes $\mathfrak{P}$ sind und nur eine endliche Anzahl von Polen haben. Man zeigt aber leicht, dafs sie auch eindeutige Funktionen von z selbst d. h. auch auf der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ eindeutig sein müssen. Man denke sich in der That die Koeffizienten A_i aus jenen Gleichungen bestimmt und lasse hierauf z einen beliebigen Umlauf beschreiben. Werden durch diesen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ bzw. in $\mathfrak{P}_{i_1}, \mathfrak{P}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_n}$ übergeführt, so stimmen diese, abgesehen von der Reihenfolge, mit den ursprünglichen n Punkten überein; dasselbe gilt

also auch von den Reihen $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$ und $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$, in welche $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und $U_1, U_2, \ldots, U_n$ durch jenen Umlauf übergeführt werden. Angenommen nun, die n Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ gehen bei jenem Umlaufe in $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ über, so sind diese durch die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} U_{i_1} &= A'_0 + A'_1 u_{i_1} + \cdots + A'_{n-1} u_{i_1}^{n-1}, \\ U_{i_2} &= A'_0 + A'_1 u_{i_2} + \cdots + A'_{n-1} u_{i_2}^{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{i_n} &= A'_0 + A'_1 u_{i_n} + \cdots + A_{n-1} u_{i_n}^{n-1} \end{aligned}$$

ebenfalls eindeutig bestimmt. Da diese aber, abgesehen von der Reihenfolge, mit den vorigen Gleichungen für $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ übereinstimmen, so können auch die aus ihnen sich ergebenden Werte $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{n-1}$ von den vorigen nicht verschieden sein. Es sind demnach jene Gröfsen eindeutige analytische Funktionen von z allein, da sie durch einen beliebigen Umlauf dieser Variabeln nicht geändert werden, und da sie nur eine endliche Anzahl von Polen besitzen, so sind sie rationale Funktionen von z, was zu beweisen war.

Mit denselben Hilfsmitteln können wir, wie beiläufig bemerkt werde, eine wesentliche Erweiterung unseres Satzes beweisen: Es sei $K(Z)$ die Gesamtheit oder der Körper aller analytischen Funktionen, welche auf der ganzen einblättrigen Kugelfläche eindeutig sind und nur eine endliche Anzahl von aufserwesentlich oder wesentlich singulären Stellen haben, deren Funktionenelemente also auch für eine endliche Anzahl von Stellen $(z = \alpha)$ unendlich viele negative Potenzen von $(z - \alpha)$ enthalten können. Dann zeigt man genau ebenso wie vorher, dafs alle und nur die analytischen Funktionen

$$U = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots + A_{n-1} u^{n-1},$$

für welche die n Koeffizienten A_i dem Körper $K(Z)$ angehören, auf der n-blättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ eindeutig sind und nur eine endliche Anzahl wesentlich oder aufserwesentlich singuläre Stellen besitzen.

Neunte Vorlesung.

Untersuchung der Gröfsen des Körpers $K(z, u)$. — Norm und Spur. — Darstellung aller Gröfsen von $K(z, u)$ durch eine Basis. — Die zu einem Systeme $(\eta^{(1)}, \dots \eta^{(n)})$ gehörige Matrix und ihre Determinante. — Systeme mit der Determinante Null. — Theorie der Matrizen; Addition und Multiplikation derselben. — Die Elementarsysteme. — Hauptsätze über die reciproken, die konjugierten und die komplementären Systeme. — Beziehung zwischen zwei Basissystemen für den Körper $K(z, u)$. — Die Unterkörper von $K(z, u)$, die zugehörigen Riemannschen Kugelflächen und ihre Verzweigungspunkte.

§ 1.

Nachdem wir uns in der vorigen Vorlesung überzeugt haben, dafs die algebraischen Funktionen des Körpers $K(z, u)$ in Bezug auf die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ genau dieselben Eigenschaften besitzen, wie die rationalen Funktionen des Körpers $K(z)$ in Bezug auf die einfache Kugelfläche $\mathfrak{K}$, wollen wir nun die Gröfsen dieses Körpers $K(z, u)$ eingehend untersuchen, genau ebenso, wie das in der ersten Vorlesung für den Körper $K(z)$ geschah.

Es sei $U = \varphi(z, u)$ eine beliebige Gröfse dieses Körpers, dann entsprechen den n irgend einer regulären Stelle $(z = \alpha)$ zugehörigen konjugierten Punkten

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \dots, \quad \mathfrak{P}_n$$

der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ auch hier n konjugierte Funktionenelemente

$$U(\mathfrak{P}_1), \quad U(\mathfrak{P}_2), \dots, U(\mathfrak{P}_n),$$

welche den Wert von U für eine endliche Umgebung des betreffenden Punktes darstellen, und zwar ist allgemein:

$$U(\mathfrak{P}_i) = \varphi\big(z, u(\mathfrak{P}_i)\big).$$

Wir wollen auch diese konjugierten Funktionenelemente kürzer durch

$$U_1, \quad U_2, \dots, U_n$$

bezeichnen. Dieselben sind wiederum die n konjugierten Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades:

$$\begin{aligned} F(U, z) &= (U - U_1)(U - U_2) \dots (U - U_n) \\ &= U^n + A_{n-1}(z) U^{n-1} + \dots + A_0(z) = 0, \end{aligned}$$

deren Koeffizienten $A_i(z)$ offenbar rationale Funktionen von z sind; in der That sind sie ja die elementaren symmetrischen Funktionen der n konjugierten Wurzeln U_i mit abwechselnden Zeichen, also symmetrische Funktionen von $u_1, \dots, u_n$.

Unter diesen n symmetrischen Funktionen heben wir besonders die letzte, das Produkt aller Wurzeln U_i hervor, welche wir die Norm von U nennen wollen; wir bezeichnen sie durch $N(U)$ und definieren sie durch die Gleichung:

$$N(U) = U_1 U_2 \ldots U_n = (-1)^n A_0(z).$$

Aus dieser Definition der Norm ergeben sich sofort für zwei Funktionen U und V des Körpers die Gleichungen:

$$N(U \cdot V) = N(U) \cdot N(V);$$

$$N\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{N(U)}{N(V)},$$

sowie der Satz, dafs die Funktion 0 die einzige Funktion des Körpers ist, deren Norm verschwindet. — Ferner wollen wir die Summe der konjugierten Wurzeln U_i die Spur von U nennen und durch $S(U)$ bezeichnen, so dafs also

$$S(U) = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = -A_{n-1}(z)$$

ist.

Jede Funktion U des Körpers $K(z, u)$ genügt also ebenso, wie u selbst einer Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten. Jedoch braucht diese keineswegs ebenfalls irreduktibel zu sein. Wählt man z. B. speziell für U eine rationale Funktion von z allein, setzt also $U = \varphi(z)$, so sind alle konjugierten Funktionen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ einander gleich, und die Gleichung n^{ten} Grades für U wird einfach:

$$F(U, z) = \big(U - \varphi(z)\big)^n = 0,$$

d. h. ihre linke Seite ist die n^{te} Potenz eines Linearfaktors. Ganz analog zeigen wir allgemeiner, dafs diese Gleichung für ein beliebiges U des Körpers sehr wohl in Faktoren niedrigeren Grades zerfallen kann, dafs diese aber immer einander gleich sein müssen.

Es sei nämlich U eine beliebige Funktion des Körpers $K(z, u)$ und

$$F(U) = F_1(U)\, F_2(U) \ldots F_h(U) = 0$$

die Gleichung für U, in ihre irreduktibeln Faktoren zerlegt. Wir können diese Zerlegung immer wirklich ausführen, da wir ja die Gleichung $F(U, z) = 0$ genau ebenso auflösen können, wie die ursprüngliche Gleichung $f(u, z) = 0$, und da wir aus dem Zusammenhange der zugehörigen Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}(U)$ direkt jene irreduktibeln Faktoren zu finden imstande sind. Die n konjugierten Entwickelungen $U_1, U_2, \ldots, U_n$, welche U für eine beliebige Stelle $(z = a)$ der unabhängigen Variabeln zukommen, müssen sich dann als Wurzeln auf jene h irreduktibeln Faktoren verteilen. Es sei nun die zu dem Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Fläche $\mathfrak{R}(u)$ gehörende Wurzel U_1 eine der Wurzeln der irreduktibeln Gleichung $F_1(U) = 0$, und es bedeute U_2 die zu

irgend einem anderen konjugierten Punkte $\mathfrak{P}_2$ gehörige Wurzel der Gleichung $F(U)=0$. Dann zeigt man leicht, daſs auch U_2 eine Wurzel derselben Gleichung $F_1(U)=0$ sein muſs, daſs also jener eine irreduktible Faktor durch jede der n Entwickelungen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ befriedigt wird. In der That, denkt man sich den Punkt $\mathfrak{P}_1$ mit dem unter ihm liegenden Punkte $\mathfrak{P}_2$ durch einen ganz auf der Riemannschen Fläche verlaufenden Weg verbunden, was ja stets möglich ist, und führt auf diesem u_1 in u_2, also auch U_1 in U_2 über, so bleiben bei dieser Fortsetzung die in z rationalen Koeffizienten von $F_1(U)$ ungeändert, da ja die unabhängige Variable z einen geschlossenen Umlauf von $(z=a)$ aus ausführt. Bei jenem Umlaufe geht also aus der Gleichung $F_1(U_1)=0$ die andere $F_1(U_2)=0$ hervor, d. h. U_2 ist auch eine Wurzel jener irreduktibeln Gleichung. Hieraus folgt aber, daſs alle Wurzeln irgend eines anderen irreduktibeln Faktors $F_2(U)=0$ auch Wurzeln von $F_1(U)=0$ sind und umgekehrt, d. h. daſs für die Funktion n^{ten} Grades $F(U)$, wenn sie nicht selbst irreduktibel ist, stets eine Zerlegung von folgender Form besteht:

$$F(U)=\big(F_1(U)\big)^f,$$

wo $F_1(U)$ eine irreduktible Funktion von U mit rationalen Koeffizienten ist, deren Grad e mit n offenbar durch die Gleichung

$$ef=n$$

verbunden ist. Es ergiebt sich so der Satz:

> Jede Gröſse U des Körpers $K(z,u)$ genügt einer irreduktibeln Gleichung, deren Grad entweder gleich n oder gleich einem Teiler e von n ist.

§ 2.

Wir gehen jetzt zu der Darstellung aller Gröſsen η des Körpers $K(z,u)$ über. Wir hatten bereits auf S. 114 gezeigt, daſs jede dieser Gröſsen auf eine einzige Weise in der Form

$$\eta = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots + c_{n-1}u^{n-1} \tag{1}$$

dargestellt werden kann, in welcher $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ rationale Funktionen von z sind. Die Koeffizienten hatten wir damals durch die Auflösung von n linearen Gleichungen bestimmt. Durch Anwendung der Lagrangeschen Interpolationsformel kann man aber auch jene Darstellung direkt hinschreiben. Ist nämlich η in (1) eine ganze Funktion des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von u, welche allgemein für $u=u_i$ den Wert η_i besitzt, so ist nach der Lagrangeschen Formel identisch:

$$\eta = \frac{f(u)}{u-u_1}\cdot\frac{\eta_1}{f'(u_1)} + \frac{f(u)}{u-u_2}\cdot\frac{\eta_2}{f'(u_2)} + \cdots + \frac{f(u)}{u-u_n}\cdot\frac{\eta_n}{f'(u_n)}\,. \tag{1a}$$

Die rechte Seite ist aber eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in u, deren Koeffizienten symmetrische Funktionen von $(u_1, \ldots, u_n), (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, also rational in z sind, und damit ist unsere Aufgabe vollständig gelöst.

Wir wollen zuerst noch einen anderen Beweis dieses Satzes geben, welcher nicht die Kenntnis der n Wurzeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ der Gleichung $f(u, z) = 0$ voraussetzt. Ist zunächst η eine ganze Funktion $g(u)$ von u, aber von höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, so erhält man durch einfache Division von $g(u)$ durch $f(u)$ eine Gleichung:

$$g(u) = \bar{g}(u) f(u) + r(u),$$

in welcher der Rest $r(u)$ der Division eine ganze Funktion von niedrigerem als dem n^{ten} Grade mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten ist. Ist also u eine Wurzel der Gleichung $f(u) = 0$, so ist wirklich

$$g(u) = r(u) = c_0 + c_1 u + \cdots + c_{n-1} u^{n-1},$$

und hiermit ist der Satz für alle ganzen Funktionen von u bewiesen.

Ist die Funktion η eine beliebige rationale Funktion von u, so kann sie stets als Quotient

$$\eta = \frac{g(u)}{h(u)}$$

zweier ganzen Funktionen von u mit rationalen Koeffizienten in z dargestellt werden, und wir können zweitens voraussetzen, dafs $h(u)$ durch die irreduktible Funktion $f(u)$ nicht teilbar ist, denn andernfalls würde ja der Nenner identisch Null, η also für jede Wurzel von $f(u) = 0$ unendlich grofs sein. Dann besitzt aber der Nenner mit der irreduktibeln Funktion $f(u)$ überhaupt keinen gemeinsamen Teiler; man kann also mit Hilfe des sogenannten Euklidischen Verfahrens, durch successive Division zwei andere ganze Funktionen von u so bestimmen, dafs

$$f(u)\,\bar{f}(u) + h(u)\,\bar{h}(u) = 1$$

ist, dafs also für jede Wurzel von $f(u) = 0$

$$\bar{h}(u) = \frac{1}{h(u)}$$

ist. Also ergiebt sich für unsere Funktion η die Darstellung

$$\eta = \frac{g(u)}{h(u)} = g(u)\,\bar{h}(u)$$

als ganze Funktion von u, und diese kann wieder durch Division mit $f(u)$ als ganze Funktion $r(u)$ von niedrigerem als dem n^{ten} Grade dargestellt werden, und damit ist jener Satz vollständig bewiesen.

Wir können dieses Resultat in einer Form aussprechen, in welcher es sofort zu einer wichtigen Verallgemeinerung überleitet:

Jede Funktion η des Körpers $K(z, u)$ kann auf eine und auch nur auf eine Weise als homogene lineare Funktion der n folgenden Gröfsen desselben Körpers

$$1, \quad u, \quad u^2, \ldots, u^{n-1}$$

mit rationalen Funktionen c_i von z als Koeffizienten dargestellt werden.

Aus diesem Grunde nennt man die n Gröfsen $(1, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$, welche zur Darstellung aller übrigen Gröfsen jenes Bereiches ausreichen, nach Dedekind eine Basis jenes Körpers.

Durch die Gleichung (1) ist die oben gestellte Aufgabe in gewissem Sinne erledigt. Aber für die Erkenntnis der Eigenschaften der Funktionen des Körpers $K(z, u)$ ist es von grofser Wichtigkeit, möglichst viele verschiedene Darstellungen derselben zu kennen, um aus ihnen die für den jedesmaligen Zweck geeignetste auszuwählen. Wir werden sofort zeigen, dafs man zur Darstellung aller Gröfsen η aufser dem Systeme $(1, u, \ldots, u^{n-1})$ unendlich viele andere Basissysteme finden kann, und bei jeder speziellen Aufgabe über die Gröfsen des Bereiches $K(z, u)$ spielt die geeignete Wahl der Basis etwa dieselbe Rolle, wie die günstigste Wahl des Koordinatensystems bei einem Probleme der analytischen Geometrie.

Es seien nun

$$\eta^{(1)}, \quad \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)} \tag{2}$$

n beliebige rationale Funktionen von u und z, also n beliebige Gröfsen des Körpers, dann gehört jede homogene lineare Funktion derselben:

$$\eta = c_1 \eta^{(1)} + c_2 \eta^{(2)} + \cdots + c_n \eta^{(n)} \tag{2a}$$

mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten offenbar demselben Körper an, aber im allgemeinen wird es nicht möglich sein, jede Gröfse η des Körpers in dieser Form darzustellen. Man kann aber leicht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, dafs in der Form (2a) alle Gröfsen des Körpers $K(z, u)$ enthalten sind, dafs also $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ebenso wie das System $(1, u, \ldots, u^{n-1})$ eine Basis von $K(z, u)$ ist. Hierzu führen die folgenden allgemeinen Betrachtungen:

Es sei wieder $(z = a)$ eine beliebige reguläre Stelle von z auf der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ und

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$$

die zugehörigen konjugierten, d. h. genau untereinander liegenden Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{R}$; ferner seien allgemein:

$$\eta_1^{(k)}, \quad \eta_2^{(k)}, \ldots, \eta_n^{(k)}$$

die n Potenzreihen, welche die algebraischen Funktionen $\eta^{(k)}$ in der Umgebung jener Stelle darstellen. Wir bilden dann das System oder die sogenannte Matrix aus den folgenden n^2 Elementen:

$$\text{(3)} \qquad \begin{Bmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \dots & \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} & \dots & \eta_2^{(n)} \\ \vdots & & & \\ \eta_n^{(1)} & \eta_n^{(2)} & \dots & \eta_n^{(n)} \end{Bmatrix},$$

deren Zeilen diejenigen Werte sind, welche die n Funktionen $(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)})$ in den n konjugierten Punkten der Fläche $\mathfrak{R}$ annehmen. Diese Matrix, welche für jeden Wert $(z = \alpha)$ wohldefiniert ist, wollen wir die zu $(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)})$ gehörige Matrix nennen. Bilden wir nun die Determinante dieser Matrix

$$\text{(3a)} \qquad |\eta_h^{(k)}| = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \dots & \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} & \dots & \eta_2^{(n)} \\ \vdots & & & \\ \eta_n^{(1)} & \eta_n^{(2)} & \dots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

deren Zeilen die zu $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)}$ gehörigen konjugierten Werte in den n Blättern der Kugelfläche sind, so ist sie eine algebraische Funktion von z, welche ebenfalls auf der ganzen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und bis auf eine endliche Anzahl von Polen auch stetig ist. Läſst man nun die Variable z auf $\mathfrak{K}$ einen beliebigen Umlauf machen, so erfahren die n konjugierten Punkte $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_n)$ auf $\mathfrak{R}$ nur eine gewisse Permutation $(\mathfrak{P}_{i_1}, \dots, \mathfrak{P}_{i_n})$, und die n Horizontalreihen unserer Determinante werden also nur in gewisser Weise untereinander vertauscht. Durch eine solche Vertauschung kann aber nur das Vorzeichen der Determinante geändert werden. Das Quadrat derselben, also die Funktion

$$|\eta_h^{(k)}|^2$$

ist mithin eine algebraische Funktion von z, welche auf $\mathfrak{R}$ nur eine endliche Anzahl von Polen besitzt, und die auſserdem bei keinem Umlaufe der Variabeln geändert wird; sie ist also eine rationale Funktion von z.

Zu jedem Systeme von n beliebigen Funktionen des Körpers $K(z, u)$

$$\text{4)} \qquad \eta^{(1)}, \quad \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(n)}$$

gehört also ein System oder eine Matrix von n^2 Elementen

$$\text{(4a)} \qquad (\eta_h^{(1)}, \eta_h^{(2)}, \dots, \eta_h^{(n)}) \qquad (h = 1, 2, \dots, n),$$

welche für jeden Wert $(z = a)$ vollständig definiert ist, und deren Determinante

(4b) $$|\eta_h^{(k)}|$$

die Quadratwurzel aus einer bestimmten rationalen Funktion von z ist. Das System (4a) soll die zu $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ gehörige Matrix, die Determinante $|\eta_h^{(k)}|$ die zu dieser Matrix gehörige Determinante genannt werden.

So gehört z. B. zu der vorher betrachteten Basis $(1, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \ldots & u_1^{n-1} \\ 1 & u_2 & u_2^2 \ldots & u_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & u_n & u_n^2 \ldots & u_n^{n-1} \end{pmatrix} = (u_h^{k-1}) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

und die Determinante derselben ist einfach die Quadratwurzel aus der Gleichungsdiskriminante

$$|u_h^{k-1}|^2 = \prod_{g \gtrless k} (u_g - u_k),$$

welche in der That eine rationale Funktion von z allein ist.

Nun besteht der folgende Fundamentalsatz, durch den unsere Aufgabe in ihrem weitesten Umfange gelöst wird:

(I) Ein System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ist dann und nur dann eine Basis für den Körper $K(z, u)$, wenn seine Determinante $|\eta_h^{(k)}|$ nicht identisch verschwindet.

Ist nämlich $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ ein System von nicht verschwindender Determinante, und η eine beliebige Funktion des Körpers, so kann man genau durch das auf S. 114 angewandte Verfahren n rationale Funktionen $c_k(z)$ von z eindeutig so bestimmen, dafs:

(5) $$\eta = c_1\eta^{(1)} + c_2\eta^{(2)} + \cdots + c_n\eta^{(n)}$$

ist. Sind nämlich wieder $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die n zu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ gehörigen Funktionenelemente von η, so ergeben sich aus (5) für $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ die Gleichungen:

(5a) $$\begin{aligned} \eta_1 &= c_1\eta_1^{(1)} + \cdots + c_n\eta_1^{(n)} \\ &\vdots \\ \eta_n &= c_1\eta_n^{(1)} + \cdots + c_n\eta_n^{(n)}, \end{aligned}$$

und aus ihnen bestimmen sich, da nach der Voraussetzung die Determinante $|\eta_h^{(k)}|$ von Null verschieden ist, die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$ ein-

deutig; dieselben ergeben sich aber als rationale Funktionen von z allein, weil man genau wie a. a. O. nachweisen kann, dafs durch einen beliebigen Umlauf der Variabeln z die obigen n Gleichungen nur in ihrer Reihenfolge vertauscht werden, so dafs also ihre Lösungen dieselben bleiben. Ist $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$ ein solches System, dessen Determinante von Null verschieden ist, so besitzt also auch die Gleichung

$$c_1 \eta^{(1)} + \cdots + c_n \eta^{(n)} = 0$$

eine und nur eine Lösung, es müssen nämlich die rationalen Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sämtlich gleich Null sein.

Sei nun zweitens die Determinante $|\eta_h^{(k)}| = 0$, so kann man dagegen n rationale, nicht sämtlich verschwindende Funktionen $c_i(z)$ so bestimmen, dafs:

$$c_1 \eta^{(1)} + c_2 \eta^{(2)} + \cdots + c_n \eta^{(n)} = 0 \tag{6}$$

ist. Bildet man nämlich diese Gleichung für die n konjugierten Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$, so erhält man die n linearen homogenen Gleichungen:

$$c_1 \eta_h^{(1)} + c_2 \eta_h^{(2)} + \cdots + c_n \eta_h^{(n)} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{6a}$$

welche, da ihre Determinante nach der Voraussetzung Null ist, stets durch nicht verschwindende Funktionenelemente befriedigt werden können. Auch in diesem Falle sind die c_i rational aus den Elementen $\eta_h^{(k)}$ zusammengesetzt, aber jene homogenen Gleichungen besitzen mehr als eine Lösung, und man kann daher nicht auf die frühere Weise zeigen, dafs jene Koeffizienten bei keinem Umlaufe der Variabeln eine Änderung erfahren, und in der That besitzen jene Gleichungen auch gewisse nicht rationale Lösungen. Jedoch kann man leicht zeigen, dafs man auch stets eine rationale Lösung jener n Gleichungen finden kann, wenn man nur irgend eine nicht rationale Lösung derselben kennt. Es sei $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ irgend eine Lösung jener n Gleichungen, und c_n sei sicher von Null verschieden. Dividiert man dann mit c_n durch und setzt zur Abkürzung

$$\frac{c_i}{c_n} = \gamma^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

so befriedigen die $n-1$ Funktionenelemente $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n-1)}$ die n Gleichungen:

$$\gamma^{(1)} \eta_h^{(1)} + \cdots + \gamma^{(n-1)} \eta_h^{(n-1)} + \eta_h^{(n)} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Angenommen nun, diese Elemente $\gamma^{(i)}$ gehörten nicht sämtlich zu rationalen Funktionen von z, so ändern sie sich bei gewissen Umläufen der Variabeln z, und es seien

$$\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_1^{(n-1)};\ \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_2^{(n-1)};\ \ldots \gamma_\nu^{(1)}, \ldots, \gamma_\nu^{(n-1)}$$

alle verschiedenen Elementensysteme, welche sich bei beliebigen Umläufen der Variabeln überhaupt ergeben. Dann befriedigen sie alle die n Gleichungen (6a), d. h. es ist allgemein für $l = 1, 2, \ldots, \nu$

$$\text{(7a)} \qquad \gamma_l^{(1)}\eta_h^{(1)} + \gamma_l^{(2)}\eta_h^{(2)} + \cdots + \gamma_l^{(n-1)}\eta_h^{(n-1)} + \eta_h^{(n)} = 0 \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix},$$

denn bei einem jeden solchen Umlaufe ändern sich ja die Elemente $(\eta_h^{(1)}, \ldots, \eta_h^{(n)})$ nur so, dafs die Reihenfolge der Gleichungen verändert wird. Summiert man also jede einzelne dieser n Gleichungen für alle Koeffizientensysteme γ_l von $l = 1, 2, \ldots, \nu$, so ergiebt sich

$$\Gamma_1 \eta_h^{(1)} + \Gamma_2 \eta_h^{(2)} + \cdots + \Gamma_{n-1} \eta_h^{(n-1)} + \nu \eta_h^{(n)} = 0,$$

wenn zur Abkürzung die $(n-1)$ Summen

$$\text{(7b)} \qquad \sum_{l=1}^{\nu} \gamma_l^{(1)} = \Gamma_1, \ldots, \sum_{1}^{\nu} \gamma_l^{(n-1)} = \Gamma_{n-1}$$

gesetzt werden. Also besitzen die n zu Grunde gelegten Gleichungen (6a) auch die Lösung

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}, \quad \nu,$$

und von diesen ist die letzte Gröfse ν sicher von Null verschieden, und alle anderen Elemente Γ_i sind rationale Funktionen von z allein. In der That ändern sich z. B. in der Summe (7b) für Γ_1 die ν konjugierten Summanden $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_\nu^{(1)}$ bei jedem Umlaufe von z höchstens so, dafs sie sich untereinander vertauschen, also bleibt ihre Summe Γ_1 bei jedem solchen Umlaufe ungeändert.

Es existieren also in der That stets n rationale, nicht sämtlich verschwindende Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$, für welche die Gleichung:

$$c_1 \eta^{(1)} + \cdots + c_n \eta^{(n)} = 0$$

befriedigt wird; ist also z. B. $c_n \gtrless 0$, so kann $\eta^{(n)}$ durch die $n-1$ übrigen Elemente $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n-1)}$ in der Form:

$$\eta^{(n)} = \bar{c}_1 \eta^{(1)} + \cdots + \bar{c}_{n-1} \eta^{(n-1)} \qquad \bar{c}_i = \frac{c_i}{c_n}$$

homogen und linear dargestellt werden. In diesem Falle ist also die Gesamtheit aller homogenen linearen Funktionen von $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ mit der Gesamtheit aller homogenen Funktionen von $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n-1)})$ identisch.

Ein Körper $K(z, u)$ von der n^{ten} Ordnung kann nun sicher nicht durch eine Basis von nur $(n-1)$ Elementen vollständig dargestellt werden. In der That, bilden wir die $(n-1)$ Produkte

$$u\eta^{(1)}, \quad u\eta^{(2)}, \ldots, u\eta^{(n-1)},$$

welche alle zu $K(z, u)$ gehören, so müfsten sie alle durch $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n-1)})$ homogen und linear darstellbar sein; es bestünden also $(n-1)$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
u\eta^{(1)} &= c_{11}\eta^{(1)} + c_{12}\eta^{(2)} + \cdots + c_{1\,n-1}\eta^{(n-1)} \\
u\eta^{(2)} &= c_{21}\eta^{(1)} + c_{22}\eta^{(2)} + \cdots + c_{2\,n-1}\eta^{(n-1)} \\
&\vdots \\
u\eta^{(n-1)} &= c_{n-1,1}\eta^{(1)} + c_{n-1,2}\eta^{(2)} + \cdots + c_{n-1,\,n-1}\,\eta^{(n-1)},
\end{aligned}$$

und wenn man die links stehenden Glieder auf die rechte Seite schafft, so erhielte man für die $(n-1)$ Elemente $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n-1)}$ die $(n-1)$ linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(c_{11} - u)\,\eta^{(1)} + c_{12}\eta^{(2)} + \cdots\cdots\cdots + c_{1\,n-1}\eta^{(n-1)} = 0 \\
&c_{21}\eta^{(1)} \qquad + (c_{22} - u)\,\eta^{(2)} + \cdots + c_{2,\,n-1}\,\eta^{(n-1)} = 0 \\
&\vdots \\
&c_{n-1,1}\eta^{(1)} \quad + c_{n-1,2}\,\eta^{(2)} + \cdots + (c_{n-1,\,n-1} - u)\,\eta^{(n-1)} = 0.
\end{aligned}$$

Diese können aber bekanntlich nur dann bestehen, wenn entweder alle Elemente $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n-1)}$ Null sind, was nicht der Fall ist, oder wenn die aus den $(n-1)^2$ Koeffizienten gebildete Determinante verschwindet. Es müfste also u die Eigenschaft haben, dafs:

$$\begin{vmatrix}
c_{11} - u, & c_{12}, & \ldots\, c_{1,n-1} \\
c_{21}, & c_{22} - u, & \ldots\, c_{2,n-1} \\
\vdots & & \\
c_{n-1,1}, & c_{n-1,2}, & \ldots\, c_{n-1,n-1} - u
\end{vmatrix} = 0$$

ist. Durch Entwickelung dieser Determinante ergiebt sich dann aber für u offenbar eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$u^{n-1} + C_{n-2}u^{n-2} + \cdots + C_0 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten, und dies ist unmöglich, weil u nach der Voraussetzung die Wurzel einer irreduktibeln Gleichung des n^{ten} Grades ist. Damit ist also unser Satz (I) in seinem vollen Umfange bewiesen.

§ 3.

Wir wollen jetzt die verschiedenen, zu einem und demselben Körper $K(z, u)$ gehörigen Basissysteme

$$(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)}), \quad (\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(n)}), \ldots$$

untersuchen und die Beziehungen aufdecken, welche zwischen ihren Elementen bestehen. Die hier sich ergebenden Resultate bilden die Grundlage für die weitere Untersuchung der algebraischen Funktionen

und der Abelschen Integrale. Sie können aber erst dann wirklich einfach ausgesprochen werden, wenn wir imstande sind, mit den oben eingeführten Systemen oder Matrizen $(\eta_i^{(k)})$ von n^2 Elementen ebenso leicht und einfach zu rechnen wie mit gewöhnlichen Zahlen. Aus diesem Grunde wollen wir in diesem Abschnitte auf die Systeme oder Matrizen

$$(c_{ik}) = \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \dots c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \dots c_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \dots c_{nn} \end{pmatrix}$$

von n^2 beliebigen Elementen und auf das Rechnen mit ihnen eingehen. Wir wollen mitunter die n Elemente $(c_{i1}, c_{i2}, \dots c_{in})$ einer i^{ten} Horizontalreihe oder Zeile zusammen durch H_i und analog die Elemente $(c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk})$ einer k^{ten} Vertikalreihe oder Kolonne zusammen durch V_k bezeichnen, so dafs ein solches System auch in einer der beiden folgenden Arten geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} (c_{ik}) &= (H_1, H_2, \dots H_n) = (V_1, V_2, \dots V_n) \\ &= (H_i) = (V_k) \qquad\qquad (i, k = 1, 2, \dots n) \end{aligned}$$

Wir können zwei solche Systeme (c_{ik}) und (d_{ik}) nun durch Operationen miteinander verbinden, welche mit denen der Addition und der Multiplikation sehr nahe verwandt sind, und welche wir daher auch als Addition und als Multiplikation oder Komposition der Systeme bezeichnen wollen.

Sind (c_{ik}) und (d_{ik}) zwei beliebige Systeme, so wollen wir unter ihrer Summe $(s_{ik}) = (c_{ik}) + (d_{ik})$ das System

$$(s_{ik}) = \begin{pmatrix} c_{11} + d_{11}, & c_{12} + d_{12}, & \dots c_{1n} + d_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} + d_{n1}, & c_{n2} + d_{n2}, & \dots c_{nn} + d_{nn} \end{pmatrix}$$

verstehen, dessen Elemente

$$s_{gh} = c_{gh} + d_{gh}$$

sind; die Systeme (c_{ik}) und (d_{ik}) nennen wir die Summanden. Offenbar ist die Reihenfolge der Summanden in einer Summe vertauschbar.

Unter dem Produkte zweier Systeme oder Matrizen von n^2 Elementen

$$(c_{ik}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots c_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots c_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (d_{ik}) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots d_{2n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots d_{nn} \end{pmatrix}$$

wollen wir dagegen dasjenige System (e_{ik}) verstehen, dessen n^2 Elemente mit den Elementen (c_{ik}) und (d_{ik}) durch die folgenden Gleichungen zusammenhängen:

$$(1) \qquad e_{gk} = \sum_{i=1}^{n} c_{gi} d_{ik} = c_{g1} d_{1k} + c_{g2} d_{2k} + \cdots + c_{gn} d_{nk}.$$

Man erhält also das Element e_{gk} des Produktes, wenn man die Elemente der g^{ten} Horizontalreihe des ersten Faktors (c_{ik}) mit den entsprechenden Elementen der k^{ten} Vertikalreihe des zweiten Faktors multipliziert, und diese n Produkte addiert; es kann daher ein Element e_{ik} als das symbolische Produkt $(H_i \cdot V_k')$ der Elemente der i^{ten} Zeile von (c_{ik}) und der k^{ten} Kolonne von (d_{ik}) bezeichnet werden. Wir wollen diese Beziehung durch die Gleichung

$$(1a) \qquad (c_{ik})(d_{ik}) = (e_{ik})$$

oder durch die Gleichung

$$(H_i)(V_k') = (H_i V_k')$$

ausdrücken.

Hier erkennt man, dafs bei dem Produkt zweier Matrizen die Reihenfolge der Faktoren nicht gleichgiltig ist, weil die Horizontalreihen des ersten Faktors mit den Vertikalreihen des zweiten verbunden werden; das Verfahren ist also unsymmetrisch in Bezug auf die beiden Faktoren. So ist z. B. für zwei Systeme von je 4 Elementen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma, & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma, & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta, & b\alpha + d\beta \\ a\gamma + c\delta, & b\gamma + d\delta \end{pmatrix};$$

die beiden Produkte sind also vollständig verschieden. Wir wollen daher die vordere und die hintere Komposition eines Systems (c_{ik}) mit einem anderen (d_{ik}) genau unterscheiden.

Bildet man die Determinante $|e_{ik}|$ dieses komponierten Systems, so ist sie nach dem Multiplikationssatze für die Determinanten gleich dem Produkte der Determinanten $|c_{ik}|$ und $|d_{ik}|$; die symbolische Gleichung (1a) zwischen den Matrizen (c_{ik}) und (d_{ik}) und ihrem Produkte (e_{ik}) bleibt also richtig, wenn man von den Systemen zu ihren Determinanten übergeht, d. h. es ist

$$(2) \qquad |c_{ik}| \cdot |d_{ik}| = |e_{ik}|.$$

Wir wollen die Multiplikation oder Komposition der Systeme zuerst an einigen einfachen Beispielen erläutern, von denen wir im folgenden Gebrauch machen werden. Das einfachste unter allen Systemen ist das sogenannte Einheitssystem

$$(1) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Bmatrix} = (\delta_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} \delta_{ik} = 0 \cdot (i \gtrless k) \\ \delta_{kk} = 1 \end{pmatrix},$$

dessen Diagonalelemente alle gleich Eins sind, während alle übrigen den Wert Null haben. Man überzeugt sich durch Ausführung der Komposition, dafs für ein beliebiges System (c_{ik})

$$(c_{ik})(1) = (1)(c_{ik}) = (c_{ik}),$$

dafs also ein beliebiges System (c_{ik}) ungeändert bleibt, wenn man es vorn oder hinten mit dem Einheitssysteme komponiert. Setzt man nämlich

$$(c_{ik})(\delta_{ik}) = (e_{ik}),$$

so ist für jedes Element

$$e_{gk} = c_{g1}\delta_{1k} + c_{g2}\delta_{2k} + \cdots + c_{gk}\delta_{kk} + \cdots + c_{gn}\delta_{nk} = c_{gk}$$

$q \cdot e \cdot d$, und das Entsprechende gilt für die vordere Komposition. Endlich zeigt eine einfache Überlegung, welche dem Leser überlassen bleibe, dafs auch umgekehrt ein System, durch dessen Komposition jedes andere System ungeändert bleibt, notwendig das Einheitssystem ist. Dieses System spielt also in der Theorie der Systeme vollständig die Rolle der Zahl Eins in der elementaren Arithmetik.

Wir vertauschen nun in dem Einheitssystem irgend zwei Vertikalreihen V_i und V_k, oder was hier dasselbe ist, zwei Horizontalreihen H_i und H_k, und erhalten so z. B. für $(i = 1,\ k = 2)$ ein zweites Elementarsystem

$$E_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Bmatrix},$$

welches von der dritten Zeile ab vollständig mit dem Einheitssysteme übereinstimmt. Ein solches System heifst ein Vertauschungssystem, weil für dieses, wie man sich durch die Ausführung leicht überzeugt, in unserem Beispiel die Kompositionsgleichungen bestehen:

$$(c_{ik})(E_1) = (V_2,\ V_1,\ V_3, \ldots V_n)$$
$$(E_1)(c_{ik}) = (H_2,\ H_1,\ H_3, \ldots H_n),$$

d. h. durch hintere Komposition mit E_1 werden zwei Vertikalreihen V_1 und V_2, durch vordere Komposition zwei Horizontalreihen H_1 und H_2

vertauscht, und das Entsprechende gilt für die allgemeineren Vertauschungssysteme.

Wir nehmen zweitens an, dafs aufser den Diagonalelementen in dem Einheitssysteme noch ein einziges anderes Element, etwa $d_{12} = g$, von Null verschieden ist. Dann erhalten wir ein neues Elementarsystem:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & g & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

und eine leichte Rechnung zeigt die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$(c_{ik})(E_2) = (V_1,\ V_2 + gV_1,\ V_3, \dots V_n)$$
$$(E_2)(c_{ik}) = (H_1 + gH_2,\ H_2,\ H_3, \dots H_n).$$

Also durch hintere Komposition mit einem Elementarsystem E_2 wird das g-fache einer Vertikalreihe zu einer anderen addiert, und das Entsprechende ist bei vorderer Komposition für die Horizontalreihen der Fall.

Wir betrachten endlich das System E_3, welches man aus dem Einheitssystem dadurch erhält, dafs man eins der Diagonalelemente, etwa das i^{te} Element, durch eine beliebige Gröfse λ ersetzt. Es ist also z. B. für $i = 1$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Komponiert man ein System (c_{ik}) hinten (oder vorn) mit einem solchen System, so ergiebt sich, dafs dadurch nur seine i^{te} Vertikalreihe (oder Horizontalreihe) mit λ multipliziert wird; es ist also

$$(c_{ik})(E_3) = (V_1, \dots \lambda V_i, \dots V_n)$$
$$(E_3)(c_{ik}) = (H_1, \dots \lambda H_i, \dots H_n).$$

Zu jedem Systeme (c_{ik}) mit nicht verschwindender Determinante gehört ein sogenanntes reciprokes System (c'_{ik}), welches mit jenem bekanntlich durch die n^2 Gleichungen verbunden ist:

$$c_{i1}c'_{1k} + c_{i2}c'_{2k} + \cdots + c_{in}c'_{nk} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

wo wieder $\delta_{ik} = 0$ für $i \gtrless k$, $\delta_{kk} = 1$ ist. Man findet dasselbe bekanntlich, wenn man die n^2 Unterdeterminanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung von (c_{ik}) bildet und jede durch die Determinante dividiert. Wir fassen diese n^2 Gleichungen jetzt in die eine ihnen offenbar äquivalente Gleichung zusammen:

(3) $$(c_{ik})(c'_{ik}) = (1),$$

d. h. das reciproke System zu (c_{ik}) ist dasjenige, welches mit (c_{ik}) vorn komponiert das Einheitssystem ergiebt.

Geht man in der Gleichung (3) zu den Determinanten über, so ergiebt sich der bekannte Satz:

$$|c_{ik}| \cdot |c'_{ik}| = 1,$$

die Determinante des reciproken Systems ist der reciproke Wert der Determinante des ursprünglichen Systems.

Da somit auch das System (c'_{ik}) eine von Null verschiedene Determinante hat, so gehört auch zu ihm ein reciprokes System; wir bezeichnen dasselbe vorläufig durch (c''_{ik}). Multipliziert man dann die obige Gleichung (3) hinten mit (c''_{ik}) und beachtet, dafs $(c'_{ik})(c''_{ik}) = (1)$ ist, so folgt aus ihr:

$$(c_{ik}) = (c''_{ik}),$$

das reciproke System des reciproken Systems ist also wieder das ursprüngliche System.

Ersetzt man daher in der Grundgleichung (3) (c_{ik}) durch (c'_{ik}) also (c'_{ik}) durch (c_{ik}), so folgt aus ihr

$$(c'_{ik})(c_{ik}) = (1) = (c_{ik})(c'_{ik}),$$

d. h. reciproke Systeme sind miteinander vertauschbar.

Sind (c_{ik}) und (d_{ik}) zwei beliebige Systeme von nicht verschwindender Determinante, so besitzt jedes von ihnen ein reciprokes System (c'_{ik}) und (d'_{ik}), aber dasselbe gilt auch von ihrem Produkte

$$(e_{ik}) = (c_{ik})(d_{ik}),$$

weil auch dessen Determinante einen von Null verschiedenen Wert hat. Ist (e'_{ik}) das zu (c_{ik}) reciproke System, so beweist man leicht, dafs

(4) $$(e'_{ik}) = (d'_{ik})(c'_{ik})$$

ist. In der That ist dann nämlich

$$(e_{ik})(e'_{ik}) = (c_{ik})(d_{ik})(d'_{ik})(c'_{ik}) = (c_{ik})(c'_{ik}) = (1),$$

und das Entsprechende gilt offenbar für das Produkt von beliebig vielen Faktoren. Es besteht also der Satz:

Ist ein System (e_{ik}) von nicht verschwindender Determinante aus mehreren anderen $(c_{ik}), (d_{ik}), \ldots$ komponiert, so ist

das reciproke System (c'_{ik}) aus den reciproken Systemen $(c'_{ik}), (d'_{ik}), \ldots$, aber in umgekehrter Reihenfolge, zusammengesetzt.

Die reciproken Systeme kann man benutzen, um eine lineare Gleichung für ein System vollständig aufzulösen. Soll nämlich ein System (x_{ik}) so bestimmt werden, dafs

$$(c_{ik})(x_{ik}) = (d_{ik})$$

ist, und ist $|c_{ik}| \gtrless 0$, so folgt durch vordere Komposition mit (c'_{ik}) die Auflösung

$$(x_{ik}) = (c'_{ik})(d_{ik}),$$

und durch sie ist jenes System (x_{ik}) eindeutig bestimmt, d. h. es giebt ein und nur ein System (x_{ik}), welches dieser Gleichung genügt. Speziell folgt hieraus für $(d_{ik}) = (1)$, dafs jedes System (c_{ik}) von nicht verschwindender Determinante ein und nur ein reciprokes System (c'_{ik}) besitzt.

Diese Thatsache benutzen wir zum Beweise eines letzten Satzes über reciproke Systeme, den wir im folgenden gebrauchen werden. Es zerfalle ein System in mehrere, z. B. in zwei Partialsysteme, d. h. es sei in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$(c_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1h} & 0 & \ldots 0 \\ \vdots & & \\ a_{h1} \ldots a_{hh} & 0 & \ldots 0 \\ 0 \quad \ldots 0 & b_{h+1,h+1} & \ldots b_{h+1,n} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 \quad \ldots 0 & b_{n,h+1} & \ldots b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

dann ist die Determinante desselben gleich $|A|\,|B|$; ist also die Determinante des ganzen Systems von Null verschieden, so gilt das Gleiche von den Determinanten seiner beiden Partialsysteme; zu jedem von diesen existiert also ein und nur ein reciprokes System (A') und (B'), welches man in der oben angegebenen Art findet; dann erkennt man leicht, dafs

$$\begin{pmatrix} A', & 0 \\ 0, & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} \ldots a'_{1h} & 0 & \ldots 0 \\ \vdots & & \\ a'_{h1} \ldots a'_{hh} & 0 & \ldots 0 \\ 0 \quad \ldots 0 & b'_{h+1,h+1} & \ldots b'_{h+1,n} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 \quad \ldots 0 & b'_{n,h+1} & \ldots b'_{nn} \end{pmatrix}$$

das zu $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ reciproke System ist, denn die Ausführung der Komposition ergiebt unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung:

$$\begin{pmatrix} A, & 0 \\ 0, & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A', & 0 \\ 0, & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1).$$

Zerfällt also ein System von nicht verschwindender Determinante in zwei oder mehrere Partialsysteme, so zerfällt das reciproke System in gleicher Weise, und zwar besteht es aus den reciproken Partialsystemen.

Zu jedem Systeme (c_{ik}) gehört ein anderes, das sogenannte **konjugierte System**

$$(\bar{c}_{ik}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

welches aus (c_{ik}) einfach dadurch hervorgeht, dafs man seine Horizontalreihen mit seinen Vertikalreihen vertauscht. Es ist also

$$\bar{c}_{gh} = c_{hg}.$$

Aus der Entstehungsart des konjugierten, aus dem ursprünglichen Systeme folgen unmittelbar die Sätze:

1) Die Determinante des konjugierten ist gleich der Determinante des ursprünglichen Systems,

denn die Determinante bleibt ja bei der Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen ungeändert.

2) Das konjugierte System zu dem konjugierten Systeme $(\bar{c}_{ik})$ ist wieder das ursprüngliche System.

Ist wieder
$$(e_{ik}) = (c_{ik})(d_{ik})$$
das Produkt zweier Systeme, so dafs also jedes Element

$$e_{gk} = \sum_{h=1}^{h=n} e_{gh} d_{hk} = H_g \cdot V_k'$$

ist, und sind $(\bar{c}_{ik}), (\bar{d}_{ik}), (\bar{e}_{ik})$ die konjugierten Systeme, so ist

$$\bar{e}_{gk} = e_{kg} = \sum_h c_{kh} d_{hg} = \sum_h \bar{d}_{gh} \bar{c}_{hk},$$

also ist

$$(\bar{e}_{ik}) = (\bar{d}_{ik})(\bar{c}_{ik}), \tag{5}$$

d. h. es besteht wieder der Satz:

3) Das konjugierte System eines Produktes ist gleich dem Produkte der konjugierten Systeme seiner Faktoren in umgekehrter Reihenfolge.

Ist endlich (c_{ik}) ein System mit nicht verschwindender Determinante, (c'_{ik}) das reciproke System, so wollen wir das konjugierte des reciproken Systems, also $(\bar{c}'_{ik})$ das komplementäre System zu (c_{ik}) nennen und kürzer durch $(\breve{c}_{ik})$ bezeichnen. Dasselbe entsteht also aus dem reciproken Systeme durch Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen, oder offenbar auch aus dem konjugierten Systeme $(\bar{c}_{ik})$ von (c_{ik}) durch Übergang zum reciproken Systeme. Komplementäre Systeme haben also reciproke Determinanten. Das komplementäre System zu $(\bar{c}'_{ik})$ ist offenbar wieder das ursprüngliche System. Ist

$$(e_{ik}) = (c_{ik})(d_{ik}),$$

so folgt zunächst durch Übergang zum reciproken Systeme nach (4)

$$(e'_{ik}) = (d'_{ik})(c'_{ik}),$$

und dann durch Übergang zu den konjugierten Systemen nach (5)

$$(\bar{e}'_{ik}) = (\bar{c}'_{ik})(\bar{d}'_{ik})$$

oder

$$(\breve{e}_{ik}) = (\breve{c}_{ik})(\breve{d}_{ik}); \tag{6}$$

es besteht also der Satz:

> 4) Das komplementäre System eines Produktes von zwei oder mehreren Faktoren ist gleich dem Produkte der komplementären Systeme in ungeänderter Reihenfolge.

§ 4.

Die im vorigen Abschnitt gefundenen Resultate benutzen wir jetzt, um die Beziehung zwischen zwei Basissystemen des Körpers $K(z, u)$ einfach auszusprechen. Es seien

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}) \quad \text{und} \quad (\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$$

zwei Systeme von je n Gröfsen des Körpers $K(z, u)$ und wir wollen annehmen, dafs die n Elemente $\zeta^{(g)}$ durch das erste System mit rationalen Koeffizienten darstellbar sind. Dann bestehen n homogene lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)} &= b_{11}\eta^{(1)} + b_{12}\eta^{(2)} + \cdots + b_{1n}\eta^{(n)} \\ \zeta^{(2)} &= b_{21}\eta^{(1)} + b_{22}\eta^{(2)} + \cdots + b_{2n}\eta^{(n)} \\ &\vdots \\ \zeta^{(n)} &= b_{n1}\eta^{(1)} + b_{n2}\eta^{(2)} + \cdots + b_{nn}\eta^{(n)}, \end{aligned} \tag{1}$$

oder kürzer geschrieben:

$$\zeta^{(g)} = \sum_h b_{gh}\,\eta^{(h)} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n), \tag{1a}$$

in denen die Substitutionskoeffizienten b_{gh} rationale Funktionen von z sind. Ist wieder $(z = \alpha)$ eine beliebige reguläre Stelle von z, sind

$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_n$ die zugehörigen konjugierten Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{R}$, und sind allgemein

$$\zeta_1^{(g)}, \zeta_2^{(g)}, \ldots \zeta_n^{(g)}; \quad \eta_1^{(h)}, \eta_2^{(h)}, \ldots \eta_n^{(h)}$$

die konjugierten Funktionenelemente von $\zeta^{(g)}$ und $\eta^{(h)}$ für jene Stelle, so gelten die Gleichungen (1a) für alle diese n Punkte, und man erhält so die n^2 Gleichungen:

$$\text{(1b)} \qquad \zeta_k^{(g)} = \sum_{h=1}^{n} b_{gh}\, \eta_k^{(h)}, \qquad (g, k = 1, 2, \ldots n)$$

durch welche die n^2 Elemente der Matrix $\left(\zeta_k^{(g)}\right)$ durch die n^2 Elemente der Matrix $\eta_k^{(h)}$ mit Hilfe der n^2 Elemente des Substitutionssystems

$$\text{(1c)} \qquad (b_{gh}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \vdots & & & \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden.

Unter Anwendung der im vorigen Paragraphen erklärten Bezeichnung können wir nun die in den Gleichungen (1b) ausgedrückte Beziehung zwischen den Elementen der Matrizen $\left(\zeta_k^{(g)}\right)$ und $\left(\eta_k^{(h)}\right)$ in sehr eleganter Form aussprechen. Sie können nämlich durch die eine Gleichung

$$\text{(2)} \qquad \left(\zeta_k^{(g)}\right) = \left(\eta_h^{(g)}\right)\left(b_{gh}\right)$$

ersetzt werden, wenn unter dem Substitutionssysteme (b_{gh}) ein für allemal das in (1c) ausführlich hingeschriebene System verstanden ist. Multipliziert man nämlich die Elemente der k^{ten} Horizontalreihe

$$(\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)}, \ldots \eta_k^{(n)})$$

der Matrix $(\eta_h^{(g)})$ mit den entsprechenden Elementen $(b_{g1}, b_{g2}, \ldots b_{gn})$ der g^{ten} Vertikalreihe des Substitutionssystems (b_{gh}) und addiert jene Produkte, so lehrt die Gleichung (1b), daſs man das Element $\zeta_k^{(g)}$ der Matrix $(\zeta_h^{(g)})$ erhält. Wir können also dieses Resultat in dem folgenden Satze einfach aussprechen:

Sind die Elemente $(\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(n)})$ durch das System $(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ darstellbar, so ist die zugehörige Matrix $(\zeta_h^{(g)})$ gleich der Matrix $(\eta_h^{(g)})$ multipliziert mit dem Substitutionssysteme (b_{gh}).

Geht man in der Kompositionsgleichung (2) zu den Determinanten über, so ergiebt sich:

$$(2a) \qquad \left|\zeta_k^{(g)}\right| = \left|\eta_k^{(g)}\right| \cdot \left|b_{gh}\right|,$$

d. h. die Determinante des Systems $(\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(n)})$ ist gleich der Determinante von $(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ multipliziert mit der Substitutionsdeterminante $|b_{gh}|$.

Wir ziehen aus diesem wichtigen Resultate zunächst einige Folgerungen: Bildet das System $(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ eine Basis für den Körper $K(z, u)$, so ist jedes andere System $(\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(n)})$ durch dasselbe darstellbar, und aufserdem ist, nach dem im vorigen Abschnitt bewiesenen Fundamentalsatze, seine Determinante $|\eta_k^{(g)}|$ stets von Null verschieden. Also ist die zu $(\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(n)})$ gehörige Determinante $|\zeta_k^{(g)}|$ dann und nur dann von Null verschieden, wenn dasselbe von der Substitutionsdeterminante $|b_{gh}|$ gilt. Nur in diesem Falle ist aber $(\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(n)})$ ebenfalls ein Fundamentalsystem für den Körper; es ergiebt sich also der Satz:

Man erhält alle Fundamentalsysteme aus einem von ihnen $(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ in der Form:

$$\zeta^{(i)} = b_{i1}\eta^{(1)} + b_{i2}\eta^{(2)} + \cdots + b_{in}\eta^{(n)},$$

wobei die rationalen Koeffizienten nur so zu wählen sind, dafs ihre Determinante nicht identisch Null ist.

Nimmt man z. B. für $(\eta^{(g)})$ das System $(1, u, \ldots u^{n-1})$, so findet man, dafs jedes System

$$\zeta^{(i)} = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} u + \cdots + b_{n-1}^{(i)} u^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

eine Basis des Körpers $K(z, u)$ ist, wenn die aus den n^2 Koeffizienten $b_k^{(i)}$ gebildete Determinante nicht identisch verschwindet.

§ 5.

Wir hatten bis jetzt bei der Betrachtung des Körpers $K(z, u)$ die algebraische Funktion u von z zu Grunde gelegt und $K(z, u)$ als die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von z und u definiert, unter der Voraussetzung, dafs u als Funktion von z durch die irreduktible Gleichung n^{ten} Grades $f(u, z) = 0$ definiert ist. Wir hatten aber gesehen, dafs jede andere Gröfse U des Körpers als Funktion von z ebenfalls durch eine irreduktible algebraische Gleichung

$$(1) \qquad F(U, z) = U^e + A_{e-1}(z) U^{e-1} + \cdots + A_0(z) = 0$$

definiert wird, deren Grad e entweder gleich n oder ein Teiler von n ist.

Es sei zunächst U so gewählt, dafs $e = n$ ist, dafs also U ebenso wie u einer irreduktibeln Gleichung n^{ten} Grades $F(U, z) = 0$ genügt. Sind dann

$$U_1, \quad U_2, \ldots U_n$$

die zu n konjugierten Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_n$ gehörigen Funktionenelemente, so sind sie sämtlich untereinander verschiedene Potenzreihen. Also bilden die n Funktionen des Körpers

$$1, \quad U, \quad U^2, \ldots U^{n-1}$$

genau ebenso eine Basis des Körpers $K(z, u)$, wie die n Potenzen $(1, u, \ldots u^{n-1})$, weil die zu diesem Systeme gehörige Determinante

$$|1, U_i, U_i^2, \ldots U_i^{n-1}| = \sqrt{\Pi(U_g - U_h)} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

nicht identisch verschwindet. Also ergiebt sich, dafs jede Gröfse η des Körpers $K(z, u)$ auf eine einzige Weise in der Form

$$(2) \qquad \eta = C_0 + C_1 U + \cdots + C_{n-1} U^{n-1} = \Phi(z, U)$$

mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten darstellbar ist.

Bilden wir also jetzt den Körper $K(z, U)$, d. h. die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von z und U, so gehört nach (2) jede Gröfse η des Körpers $K(z, u)$ auch diesem neuen Körper $K(z, U)$ an, und da auch umgekehrt jede Gröfse von $K(z, U)$, d. h. jede rationale Funktion von z und U, auch dem Körper $K(z, u)$ angehört, weil ja U selbst eine rationale Funktion von z und u ist, so folgt, dafs beide Körper identisch sind.

Wir hätten auch gleich die Definitionsgleichung

$$F(U, z) = U^n + A_{n-1}(z) U^{n-1} + \cdots + A_0(z) = 0$$

für eine reguläre Stelle $(z = \alpha)$ auflösen können, und wären so direkt zu den n Funktionenelementen $U_1, \ldots U_n$ gekommen; und durch die Ausbreitung derselben hätten wir eine n-blättrige Kugelfläche $\mathfrak{R}(U)$ erhalten, auf der dann wiederum alle Gröfsen des Körpers $K(z, U)$ eindeutig und bis auf eine endliche Anzahl von Polen stetig sind. Man erkennt aber leicht, dafs die beiden Flächen $\mathfrak{R}(u)$ und $\mathfrak{R}(U)$ identisch sind, wenn man die n Blätter beide Male gleich bezeichnet und die Schnitte übereinstimmend wählt. In der That entsprechen sich die Blätter beider Flächen eindeutig, und die Verzweigungspunkte liegen für beide an den gleichen Stellen; ist nämlich $\mathfrak{B}_a$ ein a-blättriger Verzweigungspunkt für $\mathfrak{R}(u)$, so schreitet auch die Entwickelung

von U in $\mathfrak{V}_a$ notwendig nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ und nicht etwa nach Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a_0}}$ fort, wenn a_0 ein Teiler von a ist, so daſs dem a-blättrigen Verzweigungspunkte von $\mathfrak{R}(u)$ ein a_0-blättriger Verzweigungspunkt von $\mathfrak{R}(U)$ entspräche. Wäre dies nämlich der Fall, so besäſsen ja auch alle Funktionen des Körpers $K(z, U)$ an dieser Stelle eine Entwickelung nach Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a_0}}$, und dies ist unmöglich, weil u selbst dem Körper $K(z, U)$ angehört. Die beiden Flächen $\mathfrak{R}(u)$ und $\mathfrak{R}(U)$ entsprechen also einander so, daſs jedem Blatte $\overline{\mathfrak{K}}_i(u)$ des einen ein Blatt $\overline{\mathfrak{K}}_i(U)$ des anderen Punkt für Punkt entspricht, jedem regulären Punkte von $\mathfrak{R}(u)$ ein regulärer Punkt von $\mathfrak{R}(U)$, und jedem a-blättrigen Verzweigungspunkt von $\mathfrak{R}(u)$ ein Verzweigungspunkt gleicher Ordnung von $\mathfrak{R}(U)$ entspricht, in dem die entsprechenden Blätter zusammenhängen. Also sind in der That die beiden Kugelflächen $\mathfrak{R}(u)$ und $\mathfrak{R}(U)$ identisch, wenn der Punkt $\mathfrak{V}_0$ und die Übergangslinien entsprechend gewählt werden. Es besteht also der Satz:

Ist U irgend eine Funktion des Körpers $K(z, u)$, welche einer irreduktibeln Gleichung n^{ten} Grades genügt, so ist

$$K(z, u) = K(z, U)$$

und die zugehörigen Kugelflächen sind identisch.

Es sei jetzt U eine dem Körper $K(z, u)$ angehörige Funktion, für welche der Grad e irgend ein eigentlicher Teiler von n ist, und sei (1) die irreduktible Gleichung, durch welche U als Funktion von z definiert wird. Denken wir uns aus (1) direkt die e zu einer Stelle $(z=\alpha)$ gehörigen Funktionenelemente $U_1, U_2, \ldots U_e$ bestimmt und die zugehörige zusammenhängende e-blättrige Kugelfläche $\mathfrak{R}(U)$ konstruiert, so zeigt sich genau ebenso, daſs jede rationale Funktion

$$\eta = \varphi(z, U)$$

von z und U eindeutig auf $\mathfrak{R}(U)$ ausgebreitet ist und auf eine einzige Art in der Form

$$\eta = c_0 + c_1 U + \cdots + c_{e-1} U^{e-1}$$

mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden kann. Alle diese Funktionen η und nur sie konstituieren wieder einen Körper $K(z, U)$ und verhalten sich auf $\mathfrak{R}(U)$ regulär, und jedes dieser Elemente η genügt wieder einer irreduktibeln Gleichung, deren Grad entweder gleich e oder gleich einem Teiler von e ist.

Jede Funktion $\eta = \varphi(z, U)$ des Körpers $K(z, U)$ gehört auch dem Körper $K(z, u)$ an, denn U selbst ist ja eine rationale Funktion

von z und u, also gilt dasselbe auch von jeder Funktion η; dagegen gilt nicht das Umgekehrte, denn sonst müſste ja auch u selbst als Element des Körpers $K(z, U)$ einer Gleichung des e^{ten} Grades mit rationalen Koeffizienten genügen, und die e Elemente

$$(1,\ U,\ U^2, \ldots U^{e-1})$$

bildeten eine Basis für den ganzen Körper $K(z, u)$, was, wie auf S. 124 bewiesen wurde, niemals der Fall sein kann, wenn $e < n$ ist.

Man nennt daher den so sich ergebenden Körper e^{ter} Ordnung $K(z, U)$ einen Teiler oder einen Unterkörper von $K(z, u)$, da alle seine Elemente zusammengenommen einen Teilbereich des Körpers $K(z, u)$ bilden. Es ergiebt sich so zunächst der Satz:

Die Ordnung e eines jeden Unterkörpers $K(z, U)$ des Körpers $K(z, u)$ ist stets ein Divisor der Ordnung von $K(z, u)$.

Jeder Körper n^{ter} Ordnung besitzt also im allgemeinen eine endliche Anzahl von Divisoren oder Unterkörpern, deren Ordnung stets ein Teiler von n ist und deren Untersuchung für die Erkenntnis des algebraischen Charakters der Gleichung $f(u, z) = 0$ von fundamentaler Bedeutung ist. Jeder Körper besitzt stets den Körper niedrigster Ordnung $K(z)$ der rationalen Funktionen von z allein als Divisor, und dieses ist der einzige Unterkörper, falls die Ordnung n desselben eine Primzahl ist, weil diese ja auſser der Einheit keinen kleineren Divisor enthält.

Für den zuletzt abgeleiteten Satz wollen wir auch noch einen Beweis angeben, welcher die Kenntnis der Wurzeln unserer Gleichung nicht voraussetzt: Wir hatten gesehen, daſs u nicht dem Körper $K(z, U)$ angehört; wohl aber wird eine Gleichung für u existieren:

$$\Phi(u) = u^f + c_{f-1}(U, z)\, u^{f-1} + \cdots + c_0(U, z) = 0, \tag{3}$$

deren Koeffizienten dem Körper $K(U, z)$ angehören. Daſs eine solche Gleichung für u besteht, ist klar, denn jedenfalls genügt u der Gleichung n^{ten} Grades $f(u, z) = 0$, deren Koeffizienten alle sogar in z rational sind, also dem Körper $K(z)$, mithin a fortiori dem Körper $K(z, U)$ angehören. Es möge nun (3) die Gleichung niedrigsten Grades sein, der u innerhalb des Körpers $K(z, U)$ genügt. Man könnte dieselbe auch auf rationalem Wege finden; jedoch genügt für den hier zu gebenden Beweis die selbstverständliche Bemerkung, daſs eine solche Gleichung niedrigsten Grades für u sicher existieren muſs. Alsdann bilden die ef Funktionen

$$1,\ U, \ldots U^{e-1};\quad u,\ uU, \ldots uU^{e-1}; \ldots;\ u^{f-1},\ u^{f-1}U, \ldots u^{f-1}U^{e-1} \tag{3a}$$

eine vollständige Basis für den Körper n^{ter} Ordnung $K(z, u)$. Denn erstens gehören alle diese ef Produkte zu $K(z, u)$; ferner sind sie alle rational unabhängig, denn bestände zwischen ihnen eine homogene lineare Gleichung mit rationalen Koeffizienten

$$\sum_{i=0}^{e-1} \sum_{k=0}^{f-1} a_{ik} U^i u^k = 0,$$

und schreiben wir sie in der Form:

$$d_0(z, U) + d_1(z, U)u + \cdots + d_{f-1}(z, U)u^{f-1} = 0, \tag{3b}$$

in der jetzt alle Koeffizienten $d_i(z, U)$ dem Körper $K(z, U)$ angehören, so wäre ja (3b) eine Gleichung von niedrigerem als dem f^{ten} Grade, gegen unsere über $\Phi(u) = 0$ gemachte Voraussetzung. Da man nun endlich jede Gröfse

$$\eta = c_0(z) + c_1(z)u + \cdots + c_{n-1}(z)u^{n-1}$$

des Körpers $K(z, u)$ durch einfache Division mit der Funktion des f^{ten} Grades $\Phi(u)$ stets auf den $(f-1)^{\text{ten}}$ Grad in u so reduzieren kann, dafs alle Koeffizienten ganze Funktionen von U von niedrigerem als dem e^{ten} Grade sind, da wir also jedes Element η durch die ef Funktionen (3a) wirklich darstellen können, so bilden sie wirklich eine Basis für den Körper n^{ter} Ordnung $K(z, u)$, es ist also $ef = n$, was zu beweisen war.

Zum Abschlufs dieser Untersuchungen beweisen wir den folgenden wichtigen Satz, welcher eine einfache Beziehung zwischen den Ordnungen der Verzweigungspunkte derjenigen Kugelflächen $\mathfrak{R}(u)$ und $\mathfrak{R}(U)$ angiebt, welche zu einem Körper $K(z, u)$ und einem seiner Unterkörper $K(z, U)$ gehören.

Es sei $\mathfrak{B}_a$ ein a-blättriger Verzweigungspunkt von $\mathfrak{R}(u)$; dann besitzt u für seine Umgebung die Entwickelung

$$u = e_h(z-\alpha)^{\frac{h}{a}} + e_{h+1}(z-\alpha)^{\frac{h+1}{a}} + \cdots.$$

Ist nun $U = c_0 + c_1 u + \cdots + c_{n-1}u^{n-1}$ irgend eine Gröfse des Körpers $K(z,u)$, so besteht für sie eine Entwickelung

$$U = E_k(z-\alpha)^{\frac{k}{\bar{a}}} + E_{k+1}(z-\alpha)^{\frac{k+1}{\bar{a}}} + \cdots,$$

wo offenbar $\bar{a}$ entweder gleich a oder ein Teiler von a sein mufs. Ist U ebenfalls von der n^{ten} Ordnung, so mufs, wie bereits oben hervorgehoben wurde, notwendig $\bar{a} = a$ sein, weil sonst nicht alle

a konjugierten Reihen in der Umgebung von $\mathfrak{B}_a$ verschieden wären; in diesem Falle entspricht also jedem a-blättrigen Verzweigungspunkte von $\mathfrak{R}(u)$ ein ebensolcher von $\mathfrak{R}(U)$.

Ist dagegen U von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung, so kann sehr wohl $\bar{a}$ ein Teiler von a sein; in diesem Falle entspricht also jedem Punkte $\mathfrak{B}_a$ von $\mathfrak{R}(u)$ ein Verzweigungspunkt $\mathfrak{B}_{\bar{a}}$ von $\mathfrak{R}(U)$, dessen Blätteranzahl $\bar{a}$ ein Divisor von a sein muſs. Es besteht also der Satz:

> Sind $\mathfrak{R}(u)$ und $\mathfrak{R}(U)$ die zu einem Körper und einem seiner Unterkörper gehörigen Riemannschen Flächen, so entspricht jedem Punkte von $\mathfrak{R}(u)$ eindeutig ein Punkt von $\mathfrak{R}(U)$; ist a bzw. $\bar{a}$ die Anzahl der in jenen beiden Punkten zusammenhängenden Blätter, so ist $\bar{a}$ stets ein Teiler von a.

Zehnte Vorlesung.

Die Ordnungszahlen. — Die Primdivisoren. — Die algebraischen Divisoren. — Die Grundregeln für das Rechnen mit Divisoren. — Die ganzen und gebrochenen Divisoren. — Der gröfste gemeinsame Teiler von Divisoren. — Die den Elementen von $K(z, u)$ zugeordneten Divisoren. — Die algebraischen Einheiten oder Konstanten. — Jede algebraische Funktion besitzt gleich viele Null- und Unendlichkeitsstellen.

§ 1.

In der ersten Vorlesung hatten wir die rationalen Funktionen

$$Z = \varphi(z)$$

in der Umgebung eines beliebigen Punktes $\mathfrak{p}$ der zugehörigen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ untersucht und gesagt, sie besitze in $\mathfrak{p}$ die Ordnungszahl ϱ, wenn sie in der Umgebung dieses Punktes in der Form

$$Z = (z - \alpha)^{\varrho} E(z \mid \alpha)$$

darstellbar ist, wo $E(z \mid \alpha)$ eine beliebige Einheitsfunktion für $\mathfrak{p}$ bedeutet.

Betrachten wir nun eine beliebige algebraische Funktion

$$\eta = \varphi(z, u)$$

des Körpers $K(z, u)$ in der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{P}$ der zugehörigen n-blättrigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ und nehmen dabei der Allgemeinheit wegen an, dafs jene Stelle eine a-blättrige Verzweigungsstelle ist; für eine reguläre Stelle braucht dann nur $a = 1$ gesetzt zu werden. Wie die vorausgeschickten Betrachtungen lehren, ist dann die algebraische Funktion η in der Umgebung jener Stelle stets in der Form darstellbar:

$$\eta = (z - \alpha)^{\frac{\varrho}{a}} E(z \mid \alpha), \tag{1}$$

wo wieder $z - \alpha$ den zu $\mathfrak{P}$ gehörenden Linearfaktor, $E(z \mid \alpha)$ eine Einheitsfunktion für jene Stelle, und ϱ eine positive oder negative ganze Zahl oder die Null bedeutet. Auch hier wollen wir jeder Funktion η des Körpers $K(z, u)$ eine Ordnungszahl für den beliebig angenommenen Punkt $\mathfrak{P}$ zuordnen, und zwar wollen wir wieder hierfür

den Exponenten ϱ derjenigen Potenz von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ wählen, mit welcher die Entwickelung von η in der Umgebung jener Stelle beginnt.

Untersuchen wir zunächst, welches die Ordnungszahl einer rationalen Funktion von z in einem Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ ist, wobei wir uns offenbar auf die Betrachtung eines Linearfaktors beschränken können. Betrachten wir z. B. eine Stelle $(z=\alpha)$ der unabhängigen Variablen, so gehören zu ihr n konjugierte Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_n$ der Riemannschen Fläche, falls unter ihnen kein Verzweigungspunkt vorhanden ist. Der zugehörige Linearfaktor $z-\alpha$ besitzt in jedem dieser Punkte die Ordnungszahl Eins, wie aus der Gleichung

$$z-\alpha=(z-\alpha)^1\cdot E(z\,|\,\alpha)$$

hervorgeht, wo in diesem speziellen Falle die Einheitsfunktion $E(z|\alpha)=1$ ist. Gehört dagegen zu jener Stelle $(z=\alpha)$ etwa ein a-blättriger Verzweigungspunkt, so ist für sie der Linearfaktor $z-\alpha$ genau von der a^{ten} Ordnung, denn die Entwickelung von $z-\alpha$ nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ beginnt erst mit dem Gliede $(z-\alpha)^{\frac{a}{a}}$. Entwickelt man ferner einen Linearfaktor $z-\alpha$ in der Umgebung der Stelle $(z=\infty)$, so gilt die Entwickelung

$$z-\alpha=\left(\frac{1}{z}\right)^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)$$

für die Umgebung eines jeden der Punkte von $\mathfrak{R}$, welche der Stelle $(z=\infty)$ entsprechen. Ist also einer dieser Punkte $\mathfrak{P}^{(\infty)}$ regulär, so besitzt für ihn $z-\alpha$ die Ordnungszahl -1; betrachten wir aber jenen Linearfaktor für einen am Südpol liegenden a-blättrigen Verzweigungspunkt, und schreiben wir die obige Gleichung in der Form

$$(z-\alpha)=\left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{a}{a}}\left(1-\frac{\alpha}{z}\right),$$

so erkennt man, dafs hier $(z-\alpha)$ die Ordnungszahl $-a$ besitzt.

Ist zweitens η eine beliebige algebraische Funktion von $K(z,u)$, so erkennt man zunächst, dafs die Stelle $\mathfrak{P}$ eine Nullstelle oder ein Pol für sie ist, je nachdem die soeben definierte Ordnungszahl positiv oder negativ ist, und dafs η an jener Stelle dann und nur dann einen endlichen, von Null verschiedenen Wert besitzt, wenn die Ordnungszahl Null ist. Haben ferner zwei Funktionen η und ζ in $\mathfrak{P}$ die Ordnungszahlen r und s, ist also für die Umgebung von $\mathfrak{P}$:

$$\eta=(z-\alpha)^{\frac{r}{a}}E(z\,|\,\alpha),\quad \zeta=(z-\alpha)^{\frac{s}{a}}E'(z\,|\,\alpha),$$

und berücksichtigen wir, dafs sowohl das Produkt als auch der Quotient zweier Einheitsfunktionen wiederum eine solche ist, so folgt durch Multiplikation und Division jener beiden Gleichungen:

$$\eta \zeta = (z - \alpha)^{\frac{r+s}{\alpha}} E(z \mid \alpha),$$

$$\frac{\eta}{\zeta} = (z - \alpha)^{\frac{r-s}{\alpha}} \overline{E}_1(z \mid \alpha),$$

d. h. es besteht hier ebenso wie für rationale Funktionen der Satz:

> Besitzen zwei Funktionen η und ζ in $\mathfrak{P}$ die Ordnungszahlen r und s, so besitzt ihr Produkt die Ordnungszahl $r + s$, ihr Quotient die Ordnungszahl $r - s$.

Für jeden regulären Punkt ist die hier gegebene Definition der Ordnungszahl einer algebraischen Funktion $\eta = (z - \alpha)^{\frac{\varrho}{a}} E(z \mid \alpha)$ vollständig identisch mit der für die rationalen Funktionen aufgestellten, weil in diesem Falle der Nenner $a = 1$ ist. Etwas anders scheint dies bei den Verzweigungspunkten zu sein, und man könnte zunächst versucht sein, für diese den gebrochenen Exponenten $\frac{\varrho}{a}$ als Ordnungszahl zu wählen, wenn für die Umgebung einer solchen Stelle η die obige Entwickelung (1) besitzt. Indessen überzeugt man sich durch die folgende einfache Überlegung davon, daſs die oben gegebene Definition der Ordnungszahl einer algebraischen Funktion für eine Verzweigungsstelle die richtige Verallgemeinerung für den Übergang von dem Körper $K(z)$ der rationalen zu dem Körper $K(z, u)$ der algebraischen Funktionen bildet.

Betrachten wir alle rationalen Funktionen von z, welche in dem Punkte $\mathfrak{p}$ der zugehörigen einblättrigen Kugelfläche verschwinden, und wählen wir aus ihnen eine solche aus, welche in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ unendlich klein von möglichst niedriger Ordnung ist, so erhalten wir entweder den Linearfaktor $z - \alpha$ selbst oder irgend eine rationale Funktion Z_0, deren Entwickelung ebenfalls mit der ersten Potenz von $z - \alpha$ beginnt, für welche also für die Umgebung von $\mathfrak{p}$ die Darstellung besteht:

$$Z_0 = (z - \alpha) E(z \mid \alpha).$$

Wählen wir nun eine solche Funktion Z_0 als Maſsstab für die übrigen rationalen Funktionen, legen wir ihr also die Ordnungszahl 1 bei und setzen dann fest, daſs eine andere Funktion Z desselben Körpers die Ordnungszahl ϱ besitzen soll, wenn Z in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ von derselben Ordnung unendlich klein bzw. unendlich groſs wird wie Z_0^{ϱ}, wenn sich also der Quotient $\frac{Z}{Z_0^{\varrho}}$ für $z = \alpha$ auf eine endliche, von Null verschiedene Konstante reduziert, so erkennen wir, daſs alle und nur

die Funktionen Z von der Ordnung ϱ sind, welche in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ in der Form

$$(z-\alpha)^{\varrho} E(z \mid \alpha)$$

darstellbar sind. Wir gelangen also von dieser Grundlage aus genau zu der oben gegebenen Charakterisierung der Ordnungszahl für die rationalen Funktionen.

Greifen wir nun in gleicher Weise unter den in dem a-blättrigen Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}$ der n-blättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ verschwindenden Funktionen des algebraischen Körpers $K(z, u)$ eine Funktion η_0 heraus, welche in der Umgebung dieses Punktes unendlich klein von möglichst niedriger Ordnung wird, so kann ihre Entwickelung mit keiner niedrigeren gebrochenen Potenz von $z-\alpha$ als mit $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ beginnen, d. h. sie mufs für die Umgebung von $\mathfrak{P}$ die Darstellung

$$\eta_0 = (z-\alpha)^{\frac{1}{a}} E(z \mid \alpha)$$

besitzen. Erst später werden wir zeigen, dafs für jeden Verzweigungspunkt $\mathfrak{P}$ wirklich eine solche Funktion des Körpers $K(z, u)$ gefunden werden kann, welche für $\mathfrak{P}$ von dieser niedrigsten Ordnung unendlich klein wird. Nehmen wir aber diese Thatsache schon jetzt als erwiesen an, so müssen wir auch hier diese Funktion η_0 als Mafsstab für die übrigen Funktionen wählen, d. h. ihr die Ordnungszahl 1 beilegen, und wir müssen einer beliebigen Funktion η dann die Ordnungszahl ϱ beilegen, wenn η_0^{ϱ} diejenige Potenz ist, für welche der Quotient $\frac{\eta}{\eta_0^{\varrho}}$ für $(z=\alpha)$ endlich und von Null verschieden ist. Thun wir dies, so erkennen wir, dafs alle und nur die Funktionen η des Körpers $K(z, u)$ die Ordnungszahl ϱ haben, für welche in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ die Darstellung

$$\eta = (z-\alpha)^{\frac{\varrho}{a}} E(z \mid \alpha)$$

besteht, dafs also die hier gegebene Definition der Ordnungszahl eine direkte Verallgemeinerung der für die rationalen Funktionen gegebenen ist. Wir erkennen so, dafs der Begriff der Ordnungszahl einer Funktion η von dem Körper $K(z, u)$ abhängig ist, als dessen Individuum η betrachtet wird, denn wir vergleichen eben η mit der Funktion niedrigster Ordnung η_0, welche in diesem Körper existiert. Steigt man z. B. von dem hier betrachteten Körper n^{ter} Ordnung zu einem anderen Körper $\overline{K}$ der $(mn)^{\text{ten}}$ Ordnung auf, in welchem $K(z, u)$ als Unterkörper enthalten ist, so kann die Ordnungszahl ϱ von η für den Punkt $\mathfrak{P}$ in ein Vielfaches $\overline{\varrho}$ von ϱ übergehen, und zwar wird dies

dann und nur dann der Fall sein, wenn dem a-blättrigen Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}$ in diesem höheren Körper ein $\bar{a}$-blättriger Verzweigungspunkt $\overline{\mathfrak{P}}$ entspricht, für welchen $\bar{a}$ ein Multiplum von a ist, denn in diesem Falle giebt es ja innerhalb $\mathfrak{K}$ ein Element

$$\bar{\eta}_0 = (z-\alpha)^{\frac{1}{\bar{a}}} \bar{E}(z \mid \alpha),$$

welches nun als Maſsstab zu wählen ist. Im folgenden bleiben wir aber stets innerhalb eines und desselben Körpers, und hier bleibt der Maſsstab für jeden einzelnen Punkt unveränderlich.

§ 2.

Wir wollen nun ebenso wie in der Theorie der rationalen Funktionen und der zugehörigen einblättrigen Kugelflächen jedem Punkte $\mathfrak{P}_0$ der n-blättrigen zu $K(z, u)$ gehörenden Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ einen Divisor zuordnen, welcher ebenfalls durch $\mathfrak{P}_0$ bezeichnet werden möge, und zwar soll die Teilbarkeit einer Funktion η in der Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ durch diesen Divisor wieder durch den folgenden Satz charakterisiert werden:

> Ist $\mathfrak{P}_0$ der zu dem a-blättrigen Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}_0$ gehörende Divisor, so enthält eine Funktion η im Bereiche jenes Punktes die ϱ^{te} Potenz von $\mathfrak{P}_0$ oder sie ist durch $\mathfrak{P}_0^{\varrho}$ teilbar, wenn sie im Punkte $\mathfrak{P}_0$ die Ordnungszahl ϱ besitzt oder, was dasselbe ist, wenn sie in der Umgebung von $\mathfrak{P}_0$ in der Form
>
> $$\eta = (z-\alpha)^{\frac{\varrho}{a}} E(z \mid \alpha)$$
>
> dargestellt werden kann, falls $z - \alpha$ den zugehörigen Linearfaktor bedeutet. Dabei soll es vorläufig gleichgiltig sein, wie sich η in den übrigen Punkten der Riemannschen Fläche verhält.

Diese Definition gilt, mag nun ϱ positiv, negativ oder Null sein. Man erkennt speziell, daſs eine algebraische Funktion dann und nur dann mindestens die erste Potenz des Divisors $\mathfrak{P}_0$ enthält, wenn sie in dem zugehörigen Punkte $\mathfrak{P}_0$ der Riemannschen Fläche verschwindet, und ebenso, daſs sie mindestens die Potenz $\mathfrak{P}_0^{-1}$ enthält, wenn sie an jener Stelle unendlich groſs ist. Ferner sieht man, daſs es genau ebenso viele Divisoren $\mathfrak{P}_0$ giebt, wie die zugehörige Riemannsche Fläche Punkte $\mathfrak{P}_0$ besitzt.

Auch diese Divisoren haben ebenso wie diejenigen der rationalen Funktionen von z die Eigenschaften der Primzahlen der Zahlentheorie.

Denn offenbar ist ein Produkt $\eta\zeta$ zweier Funktionen desselben Körpers nur dann durch einen Primfaktor $\mathfrak{P}_0$ teilbar, wenn mindestens einer den Faktor $\mathfrak{P}_0$ enthält; jenes Produkt kann ja nur dann in dem zugehörigen Punkte $\mathfrak{P}_0$ verschwinden, wenn dasselbe für mindestens einen der beiden Faktoren der Fall ist. Hiernach können die Divisoren auch als „Primfaktoren" bezeichnet werden.

Die im vorigen Abschnitte gefundenen Sätze können nunmehr in der folgenden Form ausgesprochen werden:

> Sind zwei Funktionen η und ζ bzw. durch die Divisoren $\mathfrak{P}_0^r$ und $\mathfrak{P}_0^s$ genau teilbar, so ist ihr Produkt $\eta\zeta$ genau durch die Potenz $\mathfrak{P}_0^{r+s}$, der Quotient $\frac{\eta}{\zeta}$ durch $\mathfrak{P}_0^{r-s}$ teilbar.

§ 3.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und betrachten statt eines einzigen Punktes ein System von Punkten

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\mu,$$

welche wir beliebig auf der n-blättrigen Kugelfläche annehmen. Bezeichnen wir nun die zugehörigen Primteiler durch dieselben Buchstaben, und sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$ beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder auch Null, so wollen wir das Produkt der Primteilerpotenzen

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\varrho_1} \mathfrak{P}_2^{\varrho_2} \ldots \mathfrak{P}_\mu^{\varrho_\mu} \tag{1}$$

wie auf S. 12 einen algebraischen Divisor nennen, und wir definieren die Teilbarkeit einer Funktion η durch diesen Divisor folgendermaſsen:

> Eine Funktion η des Körpers $K(z, u)$ ist für den Bereich der μ Punkte $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\mu)$ durch den Divisor
>
> $$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\varrho_1} \ldots \mathfrak{P}_\mu^{\varrho_\mu}$$
>
> teilbar, wenn sie allgemein in dem Punkte $\mathfrak{P}_i$ mindestens die Ordnungszahl ϱ_i besitzt.

Wir betrachten bei dieser Definition wiederum die Funktion η nur für den Bereich der μ Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\mu$; es kann sich daher η sehr wohl noch in anderen Punkten der Kugelfläche nicht regulär verhalten. Handelt es sich aber um das Verhalten der Funktion η auf der ganzen Kugelfläche, so ersetzen wir diese nur für den Bereich von $(\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_\mu)$ giltige Definition der Teilbarkeit durch die folgende:

> Eine Funktion η ist für ihren ganzen Bereich durch den Divisor $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\varrho_1} \mathfrak{P}_2^{\varrho_2} \dots \mathfrak{P}_\mu^{\varrho_\mu}$ teilbar, wenn sie in jedem der μ Punkte $\mathfrak{P}_i$ mindestens die Ordnungszahl ϱ_i besitzt, und im übrigen auf der ganzen Kugelfläche regulär ist.

Wir wollen jetzt aber nicht blofs die Teilbarkeit der Funktionen des Körpers durch die Divisoren untersuchen, sondern wir werden gleich von vornherein jene Divisoren als selbständige Gröfsen in unsere Betrachtung aufnehmen, wie wir dies in der zweiten Vorlesung bereits bei dem Körper der rationalen Funktionen von z gethan haben. Wir geben zuerst die Grundregeln über das Rechnen mit diesen Divisoren und bemerken dabei, dafs sie wörtlich mit den Vorschriften der elementaren Arithmetik über das Rechnen mit den in ihre Primfaktoren zerlegten ganzen und gebrochenen Zahlen übereinstimmen. Wir werden dann sehen, wie sehr sich die Resultate und Methoden dieser ganzen Theorie durch die Einführung der algebraischen Divisoren vereinfachen.

Jedem algebraischen Divisor

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

von beliebig vielen gleichen oder verschiedenen Primfaktoren entspricht ein bestimmtes Punktsystem $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_h)$ auf der Kugelfläche, und ein bestimmtes System zugehöriger Ordnungszahlen $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_h)$, welche positiv, negativ oder auch Null sein können. Unter der nullten Potenz eines Primdivisors wollen wir auch hier die Einheit verstehen, also $\mathfrak{P}^0 = 1$ setzen. Eine solche nullte Potenz eines Primteilers kann zu $\mathfrak{Q}$ hinzugefügt oder aus $\mathfrak{Q}$ fortgelassen werden, ohne jenen Divisor zu ändern.

Die Summe

$$l = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_h$$

aller Exponenten von $\mathfrak{Q}$ soll die Ordnung jenes Divisors genannt werden.

Es seien

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h} \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1^{\mu_1} \mathfrak{P}_2^{\mu_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\mu_h}$$

zwei beliebige Divisoren; wir können und wollen annehmen, dafs sie dieselben Primfaktoren $\mathfrak{P}_1, \dots \mathfrak{P}_h$ enthalten; sollte z. B. $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{Q}$ enthalten sein, in $\mathfrak{R}$ aber nicht, so wäre einfach $\mu_1 = 0$ anzunehmen u. s. w. Dann definieren wir genau wie in der elementaren Arithmetik ihr Produkt und ihren Quotienten durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1+\mu_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2+\mu_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h+\mu_h}; \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1-\mu_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2-\mu_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h-\mu_h}.$$

Sind $q = \Sigma\lambda_i$ und $r = \Sigma\mu_i$ die Ordnungszahlen von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, so sind also die Ordnungszahlen von $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ und $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}}$ bzw. gleich $q + r$ und $q - r$.

Ein Divisor
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1^{\gamma_1} \mathfrak{P}_2^{\gamma_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\gamma_h}$$
heifst ganz, wenn kein einziger von seinen Exponenten $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_h$ negativ ist; ist dagegen auch nur einer derselben negativ, so heifst er ein gebrochener Divisor. Jeder gebrochene Divisor $\mathfrak{Q}$ kann als der Quotient zweier ganzen Divisoren, nämlich in der Form
$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}_1^{\gamma_1} \dots \mathfrak{P}_h^{\gamma_h}}{\mathfrak{P}_1'^{\delta_1} \dots \mathfrak{P}_k'^{\delta_k}} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}}$$
geschrieben werden, wo der Zähler $\mathfrak{z}$ alle Primfaktoren mit positiven, der Nenner $\mathfrak{n}$ alle Primfaktoren mit negativen Exponenten enthält. Die Ordnungszahl eines solchen gebrochenen Divisors $\mathfrak{Q}$ ist also nach dem soeben bewiesenen Satze für die Ordnungszahl eines Quotienten gleich der Differenz der Ordnungszahlen von Zähler und Nenner.

Einen solchen Bruch $\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}}$ können wir uns in seiner reduzierten Form geschrieben denken, in welcher Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler enthalten, wo also die beiden ganzen Divisoren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{n}$ keinen einzigen Primteiler $\mathfrak{P}$ zugleich enthalten; aber $\mathfrak{Q}$ bleibt auch ungeändert, wenn man jenen Bruch mit einem beliebigen ganzen Divisor $\mathfrak{g}$ „erweitert“; es ist nämlich identisch:
$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{z}\mathfrak{g}}{\mathfrak{n}\mathfrak{g}};$$
in den meisten Fällen wollen wir uns aber einen solchen Bruch gehoben, d. h. in seiner reduzierten Form geschrieben denken.

Ein Divisor $\mathfrak{Q}$ heifst durch einen anderen $\mathfrak{R}$ teilbar, wenn der Quotient
$$\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{G}$$
ein ganzer Divisor ist, wenn also $\mathfrak{Q}$ jeden Primfaktor $\mathfrak{P}$ ebenso oft oder öfter enthält als $\mathfrak{R}$.

Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei beliebige ganze oder auch gebrochene Divisoren, so nennen wir den Divisor
$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$$
ihren gröfsten gemeinsamen Teiler, welcher jeden einzelnen Primfaktor $\mathfrak{P}$ so oft enthält, als er mindestens in $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ auftritt.

Ist $\mathfrak{D}$ so bestimmt, so sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ offenbar durch $\mathfrak{D}$ teilbar, d. h. es ist

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{D}\mathfrak{G}_2$$

wo $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ganze Divisoren sind, welche keinen einzigen Primteiler $\mathfrak{P}$ gemeinsam haben, und die daher teilerfremde oder relativ prime ganze Divisoren genannt werden können. Ist z. B.

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{\mathfrak{P}_1^7\mathfrak{P}_3^{11}\mathfrak{P}_6^2}{\mathfrak{P}_4^3\mathfrak{P}_5^8}, \quad \mathfrak{Q}_2 = \frac{\mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_4^8}{\mathfrak{P}_2^4\mathfrak{P}_3^6},$$

so ergiebt sich nach dieser Definition für den gröfsten gemeinsamen Teiler

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{P}_1^2}{\mathfrak{P}_2^4\mathfrak{P}_3^6\mathfrak{P}_4^3\mathfrak{P}_5^8},$$

und es ist

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{D}\cdot(\mathfrak{P}_1^5\mathfrak{P}_2^4\mathfrak{P}_3^{17}\mathfrak{P}_6^2), \quad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{D}\cdot(\mathfrak{P}_4^{11}\mathfrak{P}_5^8),$$

und man erkennt, dafs die beiden ganzen Divisoren

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{P}_1^5\mathfrak{P}_2^4\mathfrak{P}_3^{17}\mathfrak{P}_6^2, \quad \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{P}_4^{11}\mathfrak{P}_5^8$$

in der That teilerfremd sind.

In gleicher Weise erkennt man, dafs man analog auch den gröfsten gemeinsamen Teiler

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_\mu)$$

mehrerer Divisoren definieren und in jedem einzelnen Falle direkt hinschreiben kann. Sind die μ Divisoren $\mathfrak{Q}_i$ sämtlich ganz, also alle Exponenten der Primteiler $\mathfrak{P}_i$ positiv oder Null, so ist auch $\mathfrak{D}$ ein ganzer Divisor, da er jeden einzelnen Primteiler so oft enthält, als er mindestens in allen Divisoren $\mathfrak{Q}_h$ auftritt; sind dagegen nicht alle Divisoren $\mathfrak{Q}_h$ ganz, enthält also auch nur einer einen Primteiler $\mathfrak{P}_1$ in der negativen Potenz $\mathfrak{P}_1^{-\varrho}$, so besitzt $\mathfrak{D}$ ebenfalls einen Faktor $\mathfrak{P}_1^{-\bar{\varrho}}$, dessen Exponent $\bar{\varrho} \geq \varrho$ ist, d. h. auch $\mathfrak{D}$ ist ein gebrochener Divisor. Also gilt der Satz:

> Der gröfste gemeinsame Teiler beliebig vieler Divisoren ist dann und nur dann ganz, wenn das Gleiche für alle jene Divisoren gilt.

Wir wollen uns wieder die n-blättrige Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ von der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ umgeben denken und jedem Punkte $\mathfrak{p}$ der letzteren die konjugierten zuordnen, welche genau unter ihm liegen, d. h. zu derselben Stelle ($z = a$) gehören. Auf diese Weise ordnet sich einem jeden Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ ein einziger Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ zu; diese Zuordnung ist aber nicht eindeutig umkehrbar, denn zu jedem Punkte $\mathfrak{p}$ gehören ja im allgemeinen n konjugierte zugeordnete Punkte $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$, nämlich die, welche genau unter ihm liegen.

In gleicher Weise gehört zu jedem algebraischen Primteiler $\mathfrak{P}$ ein zugeordneter rationaler Primteiler $\mathfrak{p}$, welche bzw. den beiden zugeordneten Punkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{K}$ entsprechen. Wir wollen den rationalen Divisor $\mathfrak{p}$ die Norm des Primteilers $\mathfrak{P}$ nennen und diese Zuordnung durch die Gleichung

$$\mathfrak{p} = Nm(\mathfrak{P})$$

bezeichnen. Schon im nächsten Abschnitte werden wir sehen, dafs diese Definition die früher für die Norm einer algebraischen Funktion η gegebene als speziellen Fall enthält.

Ist allgemeiner

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_\mu}{\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' \ldots \mathfrak{P}_\nu'}$$

ein algebraischer Divisor, dessen Zähler und Nenner aus beliebig vielen gleichen oder verschiedenen Primteilern besteht und dessen Ordnung also $q = \mu - \nu$ ist, und ersetzt man jeden von diesen algebraischen Primteilern durch den zugeordneten rationalen Primteiler, so erhält man einen rationalen Divisor

$$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_\mu}{\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2' \ldots \mathfrak{p}_\nu'}$$

von derselben Ordnung $q = \mu - \nu$, welchen wir wieder die Norm von $\mathfrak{Q}$ nennen und diese Beziehung durch die Gleichung

$$\mathfrak{q} = Nm(\mathfrak{Q})$$

bezeichnen wollen. Jeder algebraische Divisor $\mathfrak{Q}$ besitzt also einen eindeutig bestimmten rationalen Divisor $\mathfrak{q}$ als Norm; dagegen gehören offenbar zu jedem rationalen Divisor $\mathfrak{q}$ mehrere Divisoren $\mathfrak{Q}$, deren Norm $\mathfrak{q}$ ist; denn jeden rationalen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{q}$ kann man ja jedem von den ihm entsprechenden konjugierten Primfaktoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ zuordnen.

Sind

$$\mathfrak{Q} \text{ und } \mathfrak{R}$$

zwei beliebige Divisoren,

$$\mathfrak{q} \text{ und } \mathfrak{r}$$

ihre Normen, so sind offenbar den beiden Divisoren

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R} \text{ und } \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}}$$

die Normen

$$\mathfrak{q}\mathfrak{r} \text{ und } \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$$

zugeordnet, d. h. es ist allgemein

$$N(\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{R}) = N(\mathfrak{Q})\, N(\mathfrak{R}); \quad N\left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}}\right) = \frac{N(\mathfrak{Q})}{N(\mathfrak{R})}. \tag{2}$$

Da die Ordnung eines algebraischen Divisors $\mathfrak{Q}$ mit der Ordnung des rationalen Divisors $Nm(\mathfrak{Q})$ übereinstimmt, so besitzen alle Divisoren von der Ordnung Null, deren Zähler und Nenner also gleiche Ordnung haben und nur diese eine Norm $\mathfrak{q}$, deren Ordnung ebenfalls Null ist, welche also äquivalent einer rationalen Funktion von z ist; man erhält also den Satz:

Die Norm eines algebraischen Divisors ist dann und nur dann einer rationalen Funktion von z äquivalent, wenn dieser die Ordnung Null hat.

§ 4.

Jede algebraische Funktion η des Körpers $K(z, u)$ besitzt nur eine endliche Anzahl von Nullstellen und eine endliche Anzahl von Polen, und in jedem von ihnen hat sie eine endliche positive oder negative Ordnungszahl. Es seien

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_h$$

jene Nullstellen und die Pole in beliebiger Reihenfolge, und

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_h$$

seien die zugehörigen positiven oder negativen Ordnungszahlen; ordnen wir dann der Funktion η den Divisor

$$\mathfrak{Q}_\eta = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

zu, so gehört zu jeder Gröfse des Körpers ein eindeutig bestimmter Divisor, durch den die Nullstellen und Pole von η ihrer Lage und ihrer Ordnungszahl nach bestimmt sind. Schreiben wir den Divisor $\mathfrak{Q}_\eta$ wieder als reduzierten Bruch

$$\mathfrak{Q}_\eta = \frac{\mathfrak{z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta},$$

so enthält der Zähler $\mathfrak{z}_\eta$ das Produkt aller und nur der Primdivisorenpotenzen, welche den Nullstellen, der Nenner das Produkt aller Potenzen, welche den Polen von η entsprechen. Ein beliebiger Linearfaktor $(z - \alpha)$ verschwindet z. B. an allen und nur den konjugierten Stellen, welche bei $(z = \alpha)$ untereinander liegen, und zwar besitzt er in einem dieser Punkte genau die a^{te} Ordnung, wenn er ein a-blättriger Verzweigungspunkt ist; ebenso wird $z - \alpha$ in allen und nur den am Südpol liegenden Punkten in entsprechender Ordnung unendlich. Also können wir jeden solchen Linearfaktor in der Form schreiben:

$$1)\qquad z - \alpha = \frac{\mathfrak{P}_1^{(\alpha)} \mathfrak{P}_2^{(\alpha)} \dots \mathfrak{P}_n^{(\alpha)}}{\mathfrak{P}_1^{(\infty)} \mathfrak{P}_2^{(\infty)} \dots \mathfrak{P}_n^{(\infty)}},$$

wenn wir festsetzen, dafs unter den im Zähler stehenden n Primfaktoren z. B. $\mathfrak{P}_1^{(\alpha)} = \mathfrak{P}_2^{(\alpha)} = \cdots = \mathfrak{P}_\alpha^{(\alpha)}$ sein soll, wenn dem Primfaktor $\mathfrak{P}_1^{(\alpha)}$ ein α-blättriger Verzweigungspunkt entspricht. Dann gilt diese Darstellung immer, mögen alle Punkte regulär sein oder mögen unter ihnen Verzweigungspunkte vorkommen.

Sind η und ζ zwei Funktionen des Körpers $K(z, u)$, $\mathfrak{Q}_\eta$ und $\mathfrak{Q}_\zeta$ die ihnen zugehörigen Divisoren, so folgt ohne weiteres aus den auf S. 146 angegebenen Betrachtungen, dafs dem Produkte $\eta \cdot \zeta$ und dem Quotienten $\frac{\eta}{\zeta}$ bzw. die Divisoren $\mathfrak{Q}_\eta \cdot \mathfrak{Q}_\zeta$ und $\frac{\mathfrak{Q}_\eta}{\mathfrak{Q}_\zeta}$ zugehören.

Die einfachsten Funktionen des Körpers sind diejenigen, welche weder Nullstellen noch Pole besitzen, für welche also der zugehörige Divisor $\mathfrak{Q} = 1$ ist; solche Funktionen wollen wir algebraische Einheiten nennen, genau ebenso, wie in der Zahlentheorie die beiden Zahlen $+1$ und -1, welche gar keinen Primteiler, weder im Zähler noch im Nenner haben, Einheiten genannt werden. Nach dem auf S. 75 und 76 gegebenen Beweise kann eine algebraische Gleichung nur dann eine solche Einheit definieren, wenn alle ihre Koeffizienten Konstanten sind, wenn also ihre n Wurzeln ebenfalls n Konstanten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ sind. Da aber nach unserer Annahme die zum Körper $K(z, u)$ gehörige Kugelfläche $\mathfrak{R}$ zusammenhängend ist, so mufs eine Funktion dieses Körpers, welche in der Umgebung eines regulären Punktes von $\mathfrak{R}(u)$ den konstanten Wert β hat, denselben Wert bei Fortsetzung über die ganze Kugelfläche beibehalten. Jene n Konstanten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ sind also sämtlich gleich und wir erhalten den Satz:

> Zu einer Funktion des Körpers gehört dann und nur dann der Divisor Eins, wenn dieselbe eine Konstante ist. Oder die algebraischen Einheiten sind mit den Konstanten identisch.

Hieraus folgt unmittelbar das weitere wichtige Theorem:

> Zwei Gröfsen des Körpers $K(z, u)$, zu welchen derselbe Divisor gehört, welche also dieselben Nullstellen und Pole in gleicher Ordnungszahl besitzen, unterscheiden sich nur durch eine multiplikative Konstante.

In der That, gehört zu η und η_0 derselbe Divisor $\mathfrak{Q}_\eta$, so gehört zu ihrem Quotienten $\frac{\eta}{\eta_0}$ der Divisor $\frac{\mathfrak{Q}_\eta}{\mathfrak{Q}_\eta} = 1$, jener Quotient ist also eine ganz bestimmte Konstante e, d. h. es ist

$$\eta = e \cdot \eta_0,$$

was zu beweisen war.

Sehen wir also von multiplikativen Konstanten oder algebraischen Einheiten ab, so könnten wir jede Funktion η äquivalent ihrem

Divisor $\mathfrak{Q}_\eta$ setzen; in der Folge wird es aber zuweilen bequemer sein, diese Einheiten zu den Divisoren hinzuzurechnen. Wir wollen daher mitunter unter einem Divisor $\mathfrak{Q}$ ein Produkt

$$e \cdot \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

verstehen, welches auſser den Primfaktoren noch eine Einheit enthält, deren Bestimmung wir uns vorbehalten wollen; es ist klar, daſs alle Definitionen und Sätze, welche wir vorher über die Divisoren ausgesprochen haben, auch giltig bleiben, wenn wir ihnen eine solche multiplikative Konstante zufügen.

Bei der Betrachtung des einer Funktion η zugehörigen Divisors $\mathfrak{Q}_\eta$ haben wir dann den Vorteil, daſs dieser Divisor vollständig bestimmt ist, sobald wir über die Einheit e richtig verfügen. Zu diesem Zwecke nehmen wir einen Punkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ der Riemannschen Fläche beliebig aber fest an, z. B. den zu $(z = 0)$ gehörigen Punkt im ersten Blatte von $\mathfrak{R}(u)$. Es sei dann

$$\eta_0 = \mathfrak{Q}_{\eta_0} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

speziell die zu $\mathfrak{Q}_\eta$ gehörige Funktion, deren Entwickelung in der Umgebung von $\mathfrak{P}^{(0)}$ den Anfangskoeffizienten Eins hat, mag jene Entwickelung mit der nullten Potenz von z anfangen oder nicht, mag also $\mathfrak{P}^{(0)}$ in $\mathfrak{Q}_\eta$ vorkommen oder nicht. In diesem Falle wollen wir dem Divisor die multiplikative Konstante 1 zuordnen, und wir wollen allgemein

$$\eta = e \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h} = \mathfrak{Q}_\eta$$

setzen, wenn jene Entwickelung mit dem Anfangskoeffizienten e beginnt. Alsdann gehört zu jeder Funktion η ein algebraischer Divisor $\mathfrak{Q}_\eta$, aber auch umgekehrt zu jedem mit einer Einheit versehenen Divisor eine einzige algebraische Funktion, so daſs wir hier nicht mehr eine Äquivalenz, sondern direkt eine Gleichung $\eta = \mathfrak{Q}_\eta$ haben, und daſs diese Divisoren $\mathfrak{Q}_\eta$ vollständig die Gröſsen des Körpers $K(z, u)$ vertreten.

Zu jedem einer algebraischen Funktion η zugeordneten Divisor $\mathfrak{Q}_\eta$ gehört ein rationaler Divisor

$$\mathfrak{q}_\eta = Nm(\mathfrak{Q}_\eta),$$

welchen man nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Vorschrift dadurch erhält, daſs man in $\mathfrak{Q}_\eta$ jeden algebraischen Primteiler $\mathfrak{P}$ durch den zugeordneten rationalen Primteiler $\mathfrak{p}$ ersetzt. Bildet man aber andererseits die Norm der algebraischen Funktion η nach der früher auf S. 117 gegebenen Definition, d. h. das Produkt

$$Nm(\eta) = \eta_1 \, \eta_2 \dots \eta_n$$

der n konjugierten Zweige von η, so ist diese eine rationale Funktion oder, als Divisor aufgefaſst, ein rationaler Divisor nullter Ordnung,

und man zeigt leicht, daſs derselbe mit $\mathfrak{q}_\eta$ identisch ist. Es besteht also der folgende Satz, durch den die oben aufgestellte Definition der Norm eines Divisors nachträglich motiviert wird:

> Ist η eine beliebige Gröſse des Körpers, $\mathfrak{Q}_\eta$ der zugehörige algebraische Divisor, so ist
>
> $$Nm(\eta) = \eta_1\,\eta_2\,\ldots\,\eta_n = Nm(\mathfrak{Q}_\eta).$$
>
> Man erhält also die Norm einer Gröſse des Körpers $K(z, u)$, indem man in dem zugehörigen Divisor $\mathfrak{Q}_\eta$ jeden algebraischen Primfaktor $\mathfrak{P}$ durch den zugeordneten rationalen Primfaktor $\mathfrak{p}$ ersetzt.

In der That, es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$, welcher der Stelle $(z = \alpha)$ entspricht, und ihm seien die Verzweigungspunkte

$$\mathfrak{P}_a,\quad \mathfrak{P}_b,\ \ldots\ \mathfrak{P}_d$$

der Fläche $\mathfrak{R}$ zugeordnet, in denen bzw. $a, b, \ldots d$ Blätter von $\mathfrak{R}$ zusammenhängen; und zwar sei die Bezeichnung so gewählt, daſs die ersten a Blätter in $\mathfrak{P}_a$ zusammenhängen, u. s. w. Es enthalte nun $\eta = \mathfrak{Q}_\eta$ die Potenzen $\mathfrak{P}_a^{r_a}\mathfrak{P}_b^{r_b}\ldots\mathfrak{P}_d^{r_d}$, deren Exponenten auch Null sein können, dann enthält $N(\mathfrak{Q}_\eta)$ den zu $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \ldots \mathfrak{P}_d$ gehörigen rationalen Divisor $\mathfrak{p}$ in der $(r_a + r_b + \cdots + r_d)^{\text{ten}}$ Potenz. Bildet man also das rationale Produkt

$$Nm(\eta) = \eta_1\,\eta_2\,\ldots\,\eta_n,$$

und ist dasselbe genau durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar, also von der Ordnung r für die Stelle $(z = \alpha)$, so braucht man nur zu zeigen, daſs stets

$$r = r_a + r_b + \cdots + r_d$$

ist. Dieser Beweis ist aber sehr leicht zu erbringen. Besitzt nämlich η in $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \ldots \mathfrak{P}_d$ bzw. die Ordnungszahlen $r_a, r_b, \ldots r_d$, so beginnen die konjugierten Entwickelungen der a ersten Zweige $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_a$ sämtlich mit $(z-\alpha)^{\frac{r_a}{a}}$, die Entwickelungen der b folgenden Potenzreihen $\eta_{a+1}, \eta_{a+2}, \ldots \eta_{a+b}$ mit $(z-\alpha)^{\frac{r_b}{b}}$, u. s. w.; endlich beginnen die letzten d Potenzreihen mit $(z-\alpha)^{\frac{r_d}{d}}$. Demnach beginnt die Entwickelung des Produktes $\eta_1\eta_2\ldots\eta_n$, also von $N(\eta)$ in der Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ mit der Potenz

$$(z-\alpha)^{a\frac{r_a}{a} + b\frac{r_b}{b} + \cdots + d\frac{r_d}{d}} = (z-\alpha)^{r_a + r_b + \cdots + r_d},$$

d. h. es ist für jede Stelle $(z = \alpha)$ in der That:

$$r = r_a + r_b + \cdots + r_d,$$

und damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Die algebraischen Divisoren $\mathfrak{Q}_\eta$, welche den Gröfsen η des Körpers entsprechen, bilden nur einen Teilbereich von allen Divisoren $\mathfrak{Q}$, genau ebenso wie dies im Körper $K(z)$ mit denjenigen Divisoren der Fall war, welche den Funktionen Z zugeordnet waren. Es wird später eine wichtige Aufgabe für uns sein, alle Divisoren $\mathfrak{Q}$ in Klassen einzuteilen, von denen die Divisoren $\mathfrak{Q}_\eta$ eine, die sogenannte Hauptklasse bilden. Aber wir können schon jetzt eine Fundamentaleigenschaft dieser Divisoren $\mathfrak{Q}_\eta$ in dem folgenden Satze aussprechen:

> Alle Divisoren $\mathfrak{Q}_\eta$ besitzen die Ordnungszahl Null, oder jede Gröfse des Körpers
> $$\eta = \mathfrak{Q}_\eta = \frac{\mathfrak{z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta}$$
> besitzt auf der Fläche $\mathfrak{R}$ genau gleich viele Null- und Unendlichkeitsstellen, wenn man auch hier übereinkommt, z. B. eine λ-fache Nullstelle für λ einfache Stellen zu rechnen.

Dieser Fundamentalsatz, welcher den auf S. 4 für die rationalen Funktionen bewiesenen als speziellen Fall enthält, ergiebt sich hier als einfache Folgerung aus dem soeben bewiesenen Theorem; in der That stimmt ja die Ordnungszahl eines Divisors $\mathfrak{Q}_\eta$ für die Fläche $\mathfrak{R}$ mit der Ordnungszahl von $\mathfrak{q}_\eta = Nm(\mathfrak{Q}_\eta)$ für die Kugelfläche überein; da aber dieser Divisor gleich $Nm(\eta)$, also gleich einer rationalen Funktion von z ist, so besitzt $\mathfrak{q}_\eta$, also auch $\mathfrak{Q}_\eta$, die Ordnung Null, was zu beweisen war.

In der Theorie der rationalen Funktionen Z von z allein ist diese Eigenschaft der Divisoren $\mathfrak{q}_Z$ charakteristisch für sie; wir zeigten auf S. 15 und 16, dafs man für jeden Divisor $\mathfrak{q}$ der Ordnung Null eine Funktion Z finden konnte, zu der $\mathfrak{q}$ gehört. Wir werden sehen, dafs dies für die algebraischen Körper im allgemeinen nicht der Fall ist; so ist es z. B. im allgemeinen nicht möglich, eine Funktion η zu einem Divisor nullter Ordnung

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'}$$

zu finden, d. h. es giebt im allgemeinen keine Funktion des Körpers, welche nur eine einfache Nullstelle und nur einen einfachen Pol besitzt*); hier bilden also die Funktionen des Körpers auch nur einen Teilbereich der algebraischen Divisoren von der Ordnung Null.

Jede Funktion η des Körpers kann auf eine einzige Art als reduzierter Bruch

$$\eta = e\frac{\mathfrak{z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta} = e\frac{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_\nu}{\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'\ldots\mathfrak{P}_\nu'}$$

*) Es existieren aber, wie später gezeigt werden wird, stets transcendente Funktionen, welchen diese Eigenschaft zukommt.

geschrieben werden, deren Zähler und Nenner teilerfremde ganze Divisoren gleicher Ordnung ν sind. Wir wollen die gemeinsame Ordnung von Zähler und Nenner den **Grad** der Funktion η nennen und durch n_η bezeichnen, so dafs also der zu η gehörige Divisor $\mathfrak{Q}_\eta$ aus $2n_\eta$ gleichen oder verschiedenen Primfaktoren besteht. Speziell folgt aus (1) a. S. 151, dafs für jeden Linearfaktor $z - \alpha$

$$z - \alpha = \frac{\mathfrak{z}_{z-\alpha}}{\mathfrak{n}_z} = \frac{\mathfrak{P}_1^{(\alpha)} \mathfrak{P}_2^{(\alpha)} \dots \mathfrak{P}_n^{(\alpha)}}{\mathfrak{P}_1^{(\infty)} \mathfrak{P}_2^{(\infty)} \dots \mathfrak{P}_n^{(\infty)}}$$

ist, wo $\mathfrak{z}_{z-\alpha}$ die n Primfaktoren $(\mathfrak{P}_1^{(\alpha)}, \dots \mathfrak{P}_n^{(\alpha)})$ enthält, welche der Stelle $(z = \alpha)$ entsprechen, und $\mathfrak{n}_z$ aus den Faktoren $(\mathfrak{P}_1^{(\infty)}, \dots \mathfrak{P}_n^{(\infty)})$ besteht, welche der Stelle $(z = \infty)$ angehören, aber mit der Mafsgabe, dafs z. B. die a ersten Primfaktoren $\mathfrak{P}_1^{(\alpha)}, \mathfrak{P}_2^{(\alpha)}, \dots \mathfrak{P}_a^{(\alpha)}$ einander gleich zu wählen sind, wenn dem Punkte $\mathfrak{P}_1^{(\alpha)}$ ein a-blättriger Verzweigungspunkt entspricht. Also besitzt jeder Linearfaktor $z - \alpha$, speziell auch z selbst, den Grad n, d. h. der Grad eines jeden solchen Linearfaktors ist gleich dem Grade der definierenden Gleichung für u oder gleich der Blätterzahl der zugehörigen Riemannschen Fläche.

Ist aber allgemeiner x eine beliebige Gröfse des Körpers, n_x ihr Grad, so dafs also

$$x = \frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x}$$

ist, wo Zähler und Nenner teilerfremde ganze Divisoren der n_x^{ten} Ordnung sind, so besteht für jeden Linearfaktor $x - \alpha$ ebenfalls die folgende Darstellung:

$$x - \alpha = \frac{\mathfrak{z}_{x-\alpha}}{\mathfrak{n}_x},$$

wo der Zähler wieder ein anderer ganzer Divisor der n_x^{ten} Ordnung ist, während der Nenner derselbe geblieben ist. Da nämlich der Quotient

$$\frac{x-\alpha}{x} = 1 - \frac{\alpha}{x}$$

für $x = \infty$ zu Eins wird, so erkennt man, dafs $x - \alpha$ in denselben Punkten von $\mathfrak{R}$ und von derselben Ordnung unendlich wird, wie x, dafs also ihre Nenner wirklich identisch sind. Hieraus folgt nach dem soeben bewiesenen Satze, dafs der Zähler $\mathfrak{z}_{x-\alpha}$ von derselben Ordnung n_x ist wie der Nenner, dafs also auch jeder Linearfaktor $x - \alpha$ eine Funktion des Körpers vom n_x^{ten} Grade ist. Hieraus ergiebt sich der folgende wichtige Satz:

Eine Funktion x des Körpers K nimmt einen beliebigen Wert α in genau n_x Punkten der Riemannschen Fläche an, wenn n_x den Grad von x bedeutet.

Dieser Satz gilt auch für den Wert $\alpha = \infty$, denn der Linearfaktor

$$\frac{1}{x} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{z}_x}$$

ist ja ebenfalls vom Grade n_x und verschwindet in den n_x zu $\mathfrak{n}_x$ zugehörigen Punkten.

Läfst man in der Gleichung

$$x - \alpha = \frac{\mathfrak{z}_{x-\alpha}}{\mathfrak{n}_x}$$

α der Reihe nach alle möglichen Werte durchlaufen, wobei wieder für $\alpha = \infty$ der Linearfaktor $x - \alpha$ durch

$$\frac{1}{x} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{z}_x}$$

zu ersetzen, also $\mathfrak{z}_{x-\infty} = \mathfrak{n}_x$ zu setzen ist, so durchläuft der Zähler $\mathfrak{z}_{x-\alpha}$ unendlich viele Produkte von je n_x gleichen oder verschiedenen Primfaktoren, und zwar so, dafs jeder Primfaktor in einem und nur einem der ganzen Divisoren $\mathfrak{z}_{x-\alpha}$ als Teiler vorkommt, denn in jedem Punkte $\mathfrak{P}$ nimmt ja die Gröfse x einen eindeutig bestimmten Wert α an. Wir wollen die n_x zu einem solchen Linearfaktor $x - \alpha$ gehörigen gleichen oder verschiedenen Primdivisoren für x konjugierte Primfaktoren, und die zugehörigen Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_{n_x}$ für x konjugierte Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ nennen. Ist x speziell die unabhängige Variable z, so sind die konjugierten Punkte einfach diejenigen, welche an einer Stelle $z = \alpha$ genau untereinander liegen; ihre Anzahl n_z ist stets gleich n, mit Ausnahme derjenigen nur in endlicher Anzahl vorhandenen Stellen, denen Verzweigungspunkte der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ entsprechen; läfst man sich hier α stetig ändern, so rücken jene n Punkte auch stetig auf $\mathfrak{R}$ fort. In unserem allgemeinen Falle liegen die zu einem Linearfaktor $x - \alpha$ gehörigen n_x konjugierten Punkte nicht untereinander, sondern irgendwie auf der Kugelfläche verteilt; wir werden aber auch zeigen, dafs nur für eine endliche Anzahl von Stellen $x = \alpha$ der zugehörige Linearfaktor $\mathfrak{z}_{x-\alpha}$ gleiche Primteiler enthält, dafs also auch hier die Anzahl der konjugierten Punkte im allgemeinen stets gleich n_x ist. Ändert sich α stetig, so rücken aber auch hier die n_x für x konjugierten Punkte stetig auf der Kugelfläche fort. Wir werden später sehen, dafs man statt z auch eine beliebige Funktion x des Körpers als unabhängige Variable zu Grunde legen kann, dafs dieser Wahl dann eine nun n_x-blättrige Kugelfläche entspricht, und dafs für sie die n_x für x konjugierten Punkte genau so untereinander liegen, wie dies vorher für die n für z konjugierten Punkte der Fall war.

Elfte Vorlesung.

Die Moduln des Körpers $K(z, u)$. — Äquivalente Basissysteme. — Elementartransformationen. — Die Zerlegung der Transformationen in elementare. — Untersuchung der Funktionen eines Moduls in der Umgebung einer Stelle ($z = \alpha$). — Der Teiler einer algebraischen Funktion für eine Stelle ($z = \alpha$). — Normale Basissysteme. — Jedes Basissystem ist einem normalen äquivalent.

§ 1.

In der neunten Vorlesung ist gezeigt worden, daſs alle algebraischen Funktionen η des Körpers $K(z, u)$ auf eine und nur eine Weise homogen und linear durch die n Elemente $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$ einer Basis mit rationalen, ganzen oder gebrochenen Funktionen von z als Koeffizienten dargestellt werden können. Es sei jetzt $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ eine beliebige Basis. Wir wollen dann nur einen Teil der Funktionen jenes Körpers betrachten, nämlich alle diejenigen Funktionen

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \cdots + u_n \eta^{(n)},$$

deren Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganze Funktionen von z sind.

Die Gesamtheit aller dieser Funktionen bildet offenbar einen Teilbereich $(\mathfrak{A})$ des Körpers $K(z, u)$, welcher allein von der Wahl der Basis $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ abhängt. Diese Gröſsen bilden jedoch keinen Körper mehr in dem früher angegebenen Sinne. Sind nämlich

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \cdots + u_n \eta^{(n)},$$
$$\zeta = v_1 \eta^{(1)} + v_2 \eta^{(2)} + \cdots + v_n \eta^{(n)}$$

zwei Funktionen jenes Bereiches $(\mathfrak{A})$, so gehört zwar ihre Summe und ihre Differenz

$$\eta \pm \zeta = (u_1 \pm v_1) \eta^{(1)} + (u_2 \pm v_2) \eta^{(2)} + \cdots + (u_n \pm v_n) \eta^{(n)}$$

wieder jenem Bereiche an, aber dasselbe gilt im allgemeinen weder von ihrem Produkte noch von ihrem Quotienten. Soll z. B. das Produkt

$$\eta \zeta = \sum_{i, k} u_i v_k \eta^{(i)} \eta^{(k)}$$

für beliebige ganze Koeffizienten u_i, v_k wieder dem Bereiche $(\mathfrak{A})$ angehören, so müſste dasselbe für alle n^2 Produkte $\eta^{(i)} \eta^{(k)}$ der Fall sein;

denn jenes Produkt $\eta\zeta$ geht ja in $\eta_i\eta_k$ über, wenn man $u_i = v_k = 1$ und alle übrigen Gröfsen u, v gleich Null setzt. Man erkennt hieraus, dafs dann und nur dann, wenn jene n^2 Produkte $\eta^{(i)}\eta^{(k)}$ zu $(\mathfrak{A})$ gehören, auch das Produkt $\eta\zeta$ dieselbe Eigenschaft besitzt. Jedoch wird dies im allgemeinen nicht der Fall sein.

Nach dem Vorgange des Herrn Dedekind wollen wir die Gesamtheit aller zu dem Bereiche $(\mathfrak{A})$ gehörenden Funktionen des Körpers $K(z, u)$ einen Modul, und die zugehörige Basis $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ die Basis des Moduls $(\mathfrak{A})$ nennen.

Es sei nun

$$\zeta^{(1)}, \quad \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)}$$

ein System von n Elementen, welche sämtlich dem Modul $(\mathfrak{A})$ angehören. Dann bestehen für die n Elemente $\zeta^{(i)}$ die Gleichungen

$$\zeta^{(i)} = \sum_k a_{ik}\eta^{(k)}, \tag{1}$$

wo die Koeffizienten a_{ik} ganze Funktionen von z sind. Soll nun jenes System ebenfalls rational unabhängig sein, so mufs nach dem auf S. 135 bewiesenen Satze die aus den Koeffizienten gebildete Determinante

$$|a_{ik}|$$

von Null verschieden sein. Ist dies der Fall, so sind die n Elemente $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)}$ die Basis eines zweiten Moduls $(\mathfrak{B})$, welcher einen Teilbereich von $(\mathfrak{A})$ bildet, weil jede zu $(\mathfrak{B})$ gehörende Funktion offenbar auch in $(\mathfrak{A})$ vorkommt. Das Umgekehrte ist im allgemeinen nicht der Fall. Soll nämlich jede zu $(\mathfrak{A})$ gehörende Funktion auch in $(\mathfrak{B})$ enthalten sein, so müssen aufser jenen n Gleichungen noch die weiteren Gleichungen

$$\eta^{(k)} = \sum_l b_{kl}\zeta^{(l)} \tag{1a}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten b_{kl} bestehen, welche aussagen, dafs die n Elemente der Basis von $(\mathfrak{A})$ dem Modul $(\mathfrak{B})$ angehören. Sind diese beiden Bedingungen aber erfüllt, so bildet jeder der beiden Moduln $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$ einen Teilbereich des anderen; die beiden Bereiche stimmen dann also überein.

Zwei Basissysteme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ und $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$, zu welchen derselbe Modul $(\mathfrak{A})$ gehört, zwischen deren Elementen also jene beiden Gleichungssysteme (1) und (1a) bestehen, sollen äquivalente Basissysteme genannt werden. Wir können diese Beziehung in dem folgenden Satze aussprechen:

Zwei Systeme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ und $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots \zeta^{(n)})$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Elemente des einen Systems durch eine umkehrbare Substitution mit ganzen rationalen Koeffizienten in die des anderen übergehen.

Bildet man die den beiden Systemen zugehörigen Determinanten

$$|\zeta_h^{(i)}|, \quad |\eta_h^{(k)}|$$

und beachtet, dafs auch für die $2n^2$ konjugierten Funktionen $\zeta_h^{(i)}$ und $\eta_h^{(k)}$ die Gleichungen

$$\zeta_h^{(i)} = \sum_k a_{ik}\eta_h^{(k)}, \quad \eta_h^{(k)} = \sum_l b_{kl}\zeta_h^{(l)} \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

bestehen, so ergeben sich aus dem Multiplikationsgesetze der Determinanten die beiden schon auf S. 135 hergeleiteten Gleichungen

$$|\zeta_h^{(i)}| = |a_{ik}|\,|\eta_h^{(k)}|, \quad |\eta_h^{(k)}| = |b_{kl}|\,|\zeta_h^{(l)}|,$$

und hieraus, da beide Determinanten $|\zeta_h^{(i)}|$, $|\eta_h^{(k)}|$ von Null verschieden sind, die Gleichung

2) $$|a_{ik}|\,|b_{kl}| = 1.$$

Da nun alle Elemente $a_{ik}(z)$ und $b_{kl}(z)$ und somit auch die Determinanten $|a_{ik}|$, $|b_{kl}|$ ganze Funktionen von z sind, so folgt aus der letzten Gleichung, dafs jene beiden Determinanten von Null verschiedene Konstanten sein müssen.

Man erkennt aber leicht, dafs für die Äquivalenz zweier Systeme schon die Bedingungen ausreichen, welche in dem folgenden Satze ausgesprochen sind:

Ein Basissystem $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots \zeta^{(n)})$ ist einem anderen $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ dann und nur dann äquivalent, wenn seine Elemente in der Form

$$\zeta^{(i)} = \sum_k a_{ik}\eta^{(k)}$$

mit ganzen Funktionen von z als Koeffizienten darstellbar sind, deren Determinante $|a_{ik}(z)|$ eine von Null verschiedene Konstante ist.

In der That folgt ja dann durch Auflösung jener n Gleichungen:

$$\eta^{(k)} = \sum_l a'_{kl}\zeta^{(l)},$$

wo das System der a'_{kl} das reciproke zu dem der a_{ik} ist, seine Elemente also, da die Determinante $|a_{ik}|$ eine Konstante ist, wieder sämtlich ganze Funktionen von z sind.

Für das Folgende sind besonders drei Sätze von Wichtigkeit, welche unmittelbar aus der soeben gegebenen allgemeinen Definition der Äquivalenz zweier Systeme sich ergeben. Sie lauten:

1) Ein System geht in ein äquivalentes über, wenn man zwei seiner Elemente vertauscht, d. h. es ist z. B.

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}, \dots \eta^{(n)}) \sim (\eta^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(3)}, \dots \eta^{(n)}).$$

Die Richtigkeit dieses Satzes ist evident. Diese Vertauschung entspricht der Substitution:

$$\begin{aligned} \eta^{(1)\prime} &= \quad \eta^{(2)} \\ \eta^{(2)\prime} &= \eta^{(1)} \\ \eta^{(3)\prime} &= \qquad \eta^{(3)} \\ &\vdots \\ \eta^{(n)\prime} &= \qquad\qquad \eta^{(n)} \end{aligned}$$

d. h. das Substitutionssystem ist das auf S. 128 betrachtete Elementarsystem E_1.

2) Ein System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ geht in ein äquivalentes über, wenn man irgend eines seiner Elemente mit einer nicht verschwindenden Konstante multipliziert.

Ist nämlich z. B.

$$\zeta^{(1)} = \lambda \eta^{(1)}, \quad \zeta^{(h)} = \eta^{(h)} \qquad (h = 2, 3, \dots n),$$

so hat die vorher mit $|a_{ik}|$ bezeichnete Determinante den konstanten Wert λ, und jenes Substitutionssystem ist das auf S. 129 betrachtete Elementarsystem E_3 für einen konstanten Wert von λ.

3) Ein System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ geht in ein äquivalentes über, wenn man zu einem Elemente ein ganzes Vielfaches eines anderen hinzufügt, d. h. es besteht die Äquivalenz

$$(\eta^{(1)}, \dots \eta^{(i)}, \dots \eta^{(n)}) \sim (\eta^{(1)}, \dots \eta^{(i)} - g(z)\eta^{(k)}, \dots \eta^{(n)}),$$

wenn $g(z)$ eine beliebige ganze Funktion von z ist.

Denn aus den n Gleichungen

$$\zeta^{(1)} = \eta^{(1)}, \dots \zeta^{(i)} = \eta^{(i)} - g(z)\eta^{(k)}, \dots \zeta^{(n)} = \eta^{(n)}$$

ergeben sich durch Auflösung die Gleichungen

$$\eta^{(1)} = \zeta^{(1)}, \dots \eta^{(i)} = \zeta^{(i)} + g(z)\zeta^{(k)}, \dots \eta^{(n)} = \zeta^{(n)}.$$

Jene beiden Systeme hängen also durch eine umkehrbare Transformation mit ganzen Koeffizienten zusammen. Das zugehörige Substitutionssystem ist das auf S. 129 betrachtete Elementarsystem E_2. Wir wollen

diese drei Transformationen *die Elementartransformationen eines Systems* nennen. Sie spielen gewissermaſsen die Rolle der Primfaktoren, in welche alle anderen umkehrbaren Transformationen mit ganzen Elementen zerlegt werden können, wie wir im nächsten Abschnitte zeigen werden.

§ 2.

Ehe wir auf die Transformation der Systeme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ in möglichst einfache äquivalente Systeme näher eingehen, führen wir den bereits angekündigten fundamentalen Nachweis, daſs jede Transformation eines Systems in ein äquivalentes System durch eine Reihe successive ausgeführter Elementartransformationen ersetzt werden kann.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Matrix von n^2 Elementen:

$$\big(a_{ik}(z)\big) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

deren Elemente beliebige *ganze* Funktionen von z und deren Determinante eine von Null verschiedene Konstante ist. Solcher Art sind ja alle Substitutionssysteme, durch welche eine Basis $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ in eine äquivalente Basis $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ übergeführt wird.

Wir zeigen nun, daſs jedes solches System als ein Produkt einer Anzahl von Elementarsystemen E_1, E_2, E_3 dargestellt werden kann, welche wir am Ende des vorigen Abschnittes behandelt hatten. Zu diesem Zwecke bilden wir das zu (x_{ik}) reciproke System (a'_{ik}); auch dieses ist ein System von ganzen Funktionen von z mit konstanter Determinante, weil jedes Element a'_{ik} gleich einer Unterdeterminante von (a_{ik}) dividiert durch die Determinante $|a_{ik}|$ ist, welche letztere nach der Voraussetzung eine Konstante ist.

Wir weisen nun nach, daſs man das ganze System (a'_{ik}) durch hintere Komposition mit einer Anzahl von solchen Elementarsystemen $E, E', \ldots E^{(\nu)}$ in das Einheitssystem transformieren kann, daſs also mit anderen Worten eine Gleichung besteht:

$$(a'_{ik})(E)(E')\ldots(E^{(\nu)}) = (1).$$

Multipliziert man dann aber diese Gleichung vorn mit (a_{ik}) und beachtet, daſs $(a_{ik})(a'_{ik}) = (1)$ und $(a_{ik})(1) = (a_{ik})$ ist, so ergiebt sich schlieſslich

$$(E)(E')\ldots(E^{(\nu)}) = (a_{ik}),$$

d. h. (a_{ik}) ist als Produkt von Elementarsystemen darstellbar.

Wir brauchen also nur den folgenden Satz zu beweisen:

Jedes System

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{pmatrix}$$

mit ganzen Funktionen von z als Elementen und konstanter Determinante kann durch successive Anwendung der drei Elementartransformationen in ein Einheitssystem verwandelt werden. Wir verstehen dabei unter Elementartransformationen die drei folgenden Operationen:

1. Multiplikation einer Vertikalreihe mit einer nichtverschwindenden Konstante.
2. Vertauschung zweier Vertikalreihen.
3. Vermehrung der Elemente einer Kolonne V_i um die mit einer ganzen Funktion von z multiplizierten entsprechenden Elemente einer anderen Kolonne V_k.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Wir bringen durch Kolonnenvertauschung in der ersten Zeile das Element niedrigsten Grades in z an die erste Stelle, so dafs b_{11} von niedrigerem oder höchstens von demselben Grade ist, als alle Elemente $b_{12}, b_{13}, \dots b_{1n}$. Hierauf ziehen wir von der zweiten Kolonne ein solches Vielfaches der ersten ab, dafs in dem neuen Systeme

$$\begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} - g b_{11}, & b_{13}, \dots b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1}, & b_{n2} - g b_{n1}, & b_{n3}, \dots b_{nn} \end{pmatrix}$$

das zweite Element $b_{12} - g b_{11}$ von niedrigerem Grade ist, als das erste und verfahren in gleicher Weise mit allen übrigen Elementen $b_{13} \dots b_{1n}$. In dem so umgeformten Systeme sind nun wieder alle auf b_{11} folgenden Elemente von H_1 von niedrigerem Grade in z als b_{11}; wir bringen wieder durch Kolonnenvertauschung das Glied niedrigsten Grades in H_1 an die Stelle von b_{11} und reduzieren dann den Grad von $b_{12} \dots b_{1n}$ aufs neue unter den von b_{11} und fahren so fort. Da bei jeder dieser gestatteten Umformungen der Grad von b_{11} verkleinert wird, so müssen diese nach einer endlichen Anzahl dieser Transformationen zu dem Abschlufs kommen, dafs b_{11} eine ganze Funktion von z ist, während alle anderen Elemente von H_1 Null sind; denn anderenfalls kann ja stets noch eine Funktion niedrigeren Grades an die Stelle von b_{11} gebracht werden. In diesem Systeme

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots b_{3n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots b_{nn} \end{pmatrix}$$

mufs aber das Element b_{11} notwendig eine Konstante sein. In der That ist die Determinante desselben offenbar gleich

$$b_{11} \cdot \Delta_{11},$$

wo Δ_{11} die Determinante des Systems von $(n-1)^2$ Elementen

$$\begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \dots b_{3n} \\ \vdots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots b_{nn} \end{pmatrix}$$

bedeutet. Da aber durch jene Elementartransformationen die Determinante nicht geändert wird, so ist jenes Produkt $b_{11} \cdot \Delta_{11}$ eine Konstante; dasselbe gilt also auch von b_{11} und Δ_{11} selbst; wir können endlich durch Division von V_1 durch diese Konstante b_{11} diese zu Eins machen.

Nun formen wir in dem neuen Systeme die $n-1$ Elemente $b_{22}, b_{23}, \dots b_{2n}$ durch Verbindung der $n-1$ letzten Vertikalreihen in ganz derselben Weise solange um, bis b_{22} zu 1 und alle folgenden Elemente zu Null geworden sind; dies ist stets möglich, ohne dafs das vorher erreichte Resultat vernichtet wird, weil ja hier nur die $n-1$ letzten Kolonnen verbunden werden, und weil aufserdem die Determinante Δ_{11} ebenfalls einen konstanten Wert besitzt. In dem so sich ergebenden Systeme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \dots 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots b_{3n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots b_{nn} \end{pmatrix}$$

machen wir nun auch das Element b_{21} zu Null, indem wir das b_{21}-fache der zweiten Kolonne von der ersten abziehen. Dadurch erhalten wir ein System, dessen beide ersten Horizontalreihen mit den entsprechenden des Einheitssystems identisch sind, und durch Fortsetzung desselben Verfahrens können wir die dritte, vierte, ... bis zur letzten Horizontalreihe in die entsprechenden des Einheitssystems transformieren, und hiermit ist jener wichtige Satz vollständig bewiesen.

§ 3.

Im folgenden wollen wir nun alle Funktionen

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + \cdots + u_n \eta^{(n)}$$

eines beliebigen zur Basis $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ gehörenden Moduls $(\mathfrak{A})$ zunächst in der Umgebung einer beliebigen Stelle $\mathfrak{p}$ $(z = \alpha)$, d. h. in der Umgebung derjenigen übereinander liegenden Punkte $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \ldots \mathfrak{B}_c$ der Riemannschen Fläche untersuchen, welche dem Werte $(z = \alpha)$ der unabhängigen Variabeln entsprechen. Als Vorbereitung betrachten wir zunächst eine beliebige Funktion η und untersuchen die n konjugierten Entwickelungen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$, welche diese in der Umgebung der endlichen oder auch der unendlich fernen Stelle $(z = \alpha)$ besitzt.

An der Stelle $(z = \alpha)$ liegen im allgemeinen n Punkte der Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ übereinander, jedoch ist diese Anzahl kleiner, wenn einer oder mehrere jener Punkte Verzweigungspunkte sind. Um die Untersuchung nicht unnötig zu komplizieren, werde ein für allemal angenommen, dafs für $(z = \alpha)$ drei Verzweigungspunkte $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \mathfrak{B}_c$ übereinanderliegen, in denen bzw. a, b, c Blätter von $\mathfrak{R}$ zusammenhängen, so dafs $a + b + c = n$ ist; und es sei ferner die Bezeichnung vorläufig so gewählt, dafs die a ersten Blätter in $\mathfrak{B}_a$, die b folgenden in $\mathfrak{B}_b$, die c letzten in $\mathfrak{B}_c$ zusammenhängen. Alsdann schreiten die n konjugierten Zweige $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ der algebraischen Funktion η in der Umgebung von $(z = \alpha)$ nach ganzen Potenzen bzw. von $(z - \alpha)^{\frac{1}{a}}$, $(z - \alpha)^{\frac{1}{b}}$, $(z - \alpha)^{\frac{1}{c}}$ fort, wobei wieder für die Stelle $(\alpha = \infty)$ der Linearfaktor $z - \alpha$ durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen ist; und zwar ergeben sich die Entwickelungen der a ersten Elemente $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_a$ aus der von η_1 dadurch, dafs man die Potenz $(z - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ durch ihre a konjugierten ersetzt, welche sich ja nur durch multiplikative a^{te} Einheitswurzeln voneinander unterscheiden.

Ist μ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Blätterzahlen a, b, c, so kann man einfacher sagen, dafs die n Entwickelungen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ nach ganzen Potenzen von $(z - \alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreiten.

Es seien nun

$$\eta_1 = a_1 (z - \alpha)^{\frac{r}{\mu}} + b_1 (z - \alpha)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots,$$

$$\eta_2 = a_2 (z - \alpha)^{\frac{r}{\mu}} + b_2 (z - \alpha)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta_n = a_n (z - \alpha)^{\frac{r}{\mu}} + b_n (z - \alpha)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots$$

jene n Entwickelungen in der Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$, wo eben $(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$ die niedrigste Potenz von $(z-\alpha)^{\frac{1}{\mu}}$ ist, welche in mindestens einer dieser Entwickelungen vorkommt, so dafs also mindestens einer der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ von Null verschieden ist. Dann ist $(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$ offenbar auch die höchste Potenz von $z-\alpha$, für welche der Quotient

$$\frac{\eta}{(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}}$$

an jener Stelle noch endlich ist; daher soll jene Potenz $(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$ der **Teiler von η für die Stelle $(z=\alpha)$** genannt werden.

Man kann den Teiler einer Funktion η für eine Stelle $(z=\alpha)$ unmittelbar aus den Koeffizienten der Gleichung n^{ten} Grades

$$\eta^n + A_{n-1}(z)\eta^{n-1} + A_{n-2}(z)\eta^{n-2} + \cdots + A_0(z) = 0$$

finden, der η als Funktion von z genügt. In der That ist ja $\frac{r}{\mu}$ einfach der Exponent des Anfangsgliedes derjenigen unter den n Wurzeln, welche die kleinste Ordnungszahl hat.

Setzt man also in dem auf S. 50 bewiesenen Theorem $A_n(z) = 1$, so ergiebt sich der Satz:

> Ist η eine beliebige Gröfse des Körpers, so ist ihr Teiler für eine jede Stelle gleich dem gröfsten gemeinsamen Divisor der n gebrochenen Funktionen:
>
> $$\left(A_0(z)^{\frac{1}{n}},\; A_1(z)^{\frac{1}{n-1}},\; A_2(z)^{\frac{1}{n-2}}, \ldots A_{n-1}(z)\right)$$
>
> für diese Stelle, und kann also auf rationalem Wege bestimmt werden.

Ist $A(z)$ speziell eine rationale Funktion von z allein, so besitzt sie stets eine ganzzahlige Potenz von $z-\alpha$ bzw. von $\frac{1}{z}$ als Teiler, und zwar ist dieser Teiler im ersten Falle die in $A(z)$ enthaltene Potenz von $z-\alpha$, im zweiten Falle diejenige Potenz von $\frac{1}{z}$, deren Exponent der negativ genommene Grad von $A(z)$ ist. Ist ferner $(z-\alpha)^s$ der Teiler von $A(z)$ und $(z-\alpha)^\varrho$ der Teiler der algebraischen Funktion η, so ist offenbar $(z-\alpha)^{s+\varrho}$ der Teiler des Produktes $A\eta$.

§ 4.

Es sei jetzt $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$ irgend eine Basis des Körpers $K(z, u)$, $(\mathfrak{A})$ der zugehörige Bereich oder Modul, und es sollen alle Funktionen η

von $(\mathfrak{A})$ in der Umgebung der beliebigen Stelle $(z=\alpha)$ untersucht werden, der wieder die drei übereinander liegenden Verzweigungspunkte $\mathfrak{B}_a$, $\mathfrak{B}_b$, $\mathfrak{B}_c$ entsprechen. Es seien nun

$$(z-\alpha)^{\frac{r_1}{\mu}},\quad (z-\alpha)^{\frac{r_2}{\mu}},\ldots (z-\alpha)^{\frac{r_n}{\mu}}$$

die Teiler der n Elemente $\eta^{(i)}$ für die Stelle $(z=\alpha)$. Denkt man sich dann die n^2 Elemente der Determinante $|\eta_i^{(k)}|$ sämtlich nach Potenzen von $z-\alpha$ entwickelt, so ergiebt sich eine Gleichung

$$|\eta_i^{(k)}| = \begin{vmatrix} a_{11}(z-\alpha)^{\frac{r_1}{\mu}}+\cdots, \ldots, a_{1n}(z-\alpha)^{\frac{r_n}{\mu}}+\cdots \\ a_{21}(z-\alpha)^{\frac{r_1}{\mu}}+\cdots, \ldots, a_{2n}(z-\alpha)^{\frac{r_n}{\mu}}+\cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}(z-\alpha)^{\frac{r_1}{\mu}}+\cdots, \ldots, a_{nn}(z-\alpha)^{\frac{r_n}{\mu}}+\cdots \end{vmatrix}$$

$$= |a_{ik}|(z-\alpha)^{\frac{r_1+r_2+\cdots+r_n}{\mu}}+\cdots$$

Ist aber andererseits $(z-\alpha)^{\frac{d}{\mu}}$ der Teiler der Determinante $|\eta_i^{(k)}|$, ist also die Entwickelung derselben von der Form

$$|\eta_i^{(k)}| = \delta(z-\alpha)^{\frac{d}{\mu}} + \varepsilon(z-\alpha)^{\frac{d+1}{\mu}}+\cdots,$$

so ergiebt sich aus der Vergleichung jener beiden Darstellungen unmittelbar die Beziehung

$$\frac{r_1}{\mu}+\frac{r_2}{\mu}+\cdots+\frac{r_n}{\mu} \leqq \frac{d}{\mu},$$

und zwar ist die Summe der Exponenten links dann und nur dann gleich dem Exponenten $\frac{d}{\mu}$ des Teilers von $|\eta_i^{(k)}|$, wenn die aus den Koeffizienten der Anfangsglieder gebildete Determinante $|a_{ik}|$ einen von Null verschiedenen Wert hat.

In diesem Falle soll das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ normal für die Stelle $(z=\alpha)$ heifsen, und auf solche Systeme beziehen sich die nachfolgenden Betrachtungen.

Es sei also $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ irgend ein normales System, und allgemein $(z-\alpha)^{\frac{r_i}{\mu}}$ der Teiler von $\eta^{(i)}$ für die Stelle $(z=\alpha)$. Ist dann

$$\eta = u_1\eta^{(1)} + u_2\eta^{(2)} + \cdots + u_n\eta^{(n)}$$

irgend eine Funktion des Körpers, so ist der Teiler von η für $(z=\alpha)$ mindestens gleich dem niedrigsten unter den Teilern der n Produkte $u_i\eta^{(i)}$; er kann aber auch gröfser sein, denn es können sich ja in der

Entwickelung der n konjugierten Zweige von η die Anfangsglieder sämtlich fortheben. Es gilt nun aber der Satz, dafs dieser zweite Fall nur dann eintreten kann, wenn jenes System nicht normal ist.

In der That sei $(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$ der niedrigste unter den Teilern der n Produkte $u_i \eta^{(i)}$; dann kann die Entwickelung aller Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ nach Potenzen von $z-\alpha$ folgendermafsen geschrieben werden:

$$u_i(z) = c_i (z-\alpha)^{\frac{r-r_i}{\mu}} + d_i (z-\alpha)^{\frac{r-r_i+1}{\mu}} + \cdots,$$

wo natürlich nur die Koeffizienten der ganzzahligen Potenzen von $(z-\alpha)$ von Null verschiedene Koeffizienten haben, und wo einige, aber nicht alle Anfangskoeffizienten c_i gleich Null sein können, denn nur dann besitzen alle jene Produkte $u_i \eta^{(i)}$ mindestens den Teiler $(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$ und keinen höheren. Bildet man aber jetzt die n Anfangskoeffizienten $C_1, C_2, \ldots C_n$ in den konjugierten Entwickelungen von η in der Umgebung von $(z=\alpha)$, d. h. die Koeffizienten von $(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$ in diesen Entwickelungen, so hängen $C_1, \ldots C_n$ mit den Anfangskoeffizienten c_i der Funktionen u_i durch die n Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} C_1 &= c_1 a_{11} + \cdots + c_n a_{1n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n &= c_1 a_{n1} + \cdots + c_n a_{nn}, \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten a_{ik} wie vorher die Anfangskoeffizienten der Elemente $\eta_i^{(k)}$ sind. Da aber das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ normal, also $|a_{ik}| \gtrless 0$ ist, so können jene n Anfangsglieder nicht zugleich verschwinden, wenn auch nur eines der Anfangsglieder c_i der Koeffizienten u_i von Null verschieden ist, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 5.

Den im vorigen Abschnitte bewiesenen Satz kann man in der folgenden einfachen Form aussprechen:

> Ist $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ ein beliebiges rational unabhängiges System, welches für eine Stelle $(z=\alpha)$ normal ist, so ist der Teiler einer beliebigen Funktion
>
> $$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \cdots + u_n \eta^{(n)}$$
>
> für jene Stelle gleich dem gröfsten gemeinsamen Divisor der n Teiler von $u_1\eta^{(1)}, u_2\eta^{(2)}, \ldots u_n\eta^{(n)}$, aus denen η besteht.

Ist das System aber kein normales, so gilt jener Satz nicht notwendig, denn alsdann könnte man, wie aus den obigen Gleichungen sofort hervorgeht, die Anfangsglieder $c_1, c_2, \ldots c_n$ der Koeffizienten $u_i(z)$ so bestimmen, dafs die n Anfangskoeffizienten $C_1', C_2', \ldots C_n'$ sämtlich verschwinden. Aus diesem Grunde ist daher der folgende Satz von fundamentaler Bedeutung:

Jedes algebraische System ist einem normalen Systeme äquivalent.

Zum Beweise dieses Satzes nehmen wir zunächst an, dafs die Stelle α im Endlichen liege; eine leichte Modifikation des Beweisganges wird zeigen, dafs er auch für die Stelle $(z=\infty)$ richtig ist. Es mögen nun wie vorher $(z-\alpha)^{\frac{r_1}{\mu}}, (z-\alpha)^{\frac{r_2}{\mu}}, \ldots (z-\alpha)^{\frac{r_n}{\mu}}$ der Reihe nach die Teiler der Elemente des Systems $(\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \ldots \eta_i^{(n)})$, und $(z-\alpha)^{\frac{d}{\mu}}$ jener Teiler für die Determinante $|\eta_i^{(k)}|$ sein, so dafs stets $\sum\limits_i \frac{r_i}{\mu} \leqq \frac{d}{\mu}$ ist. Die Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ sind dann sämtlich Brüche, deren Nenner a, b oder c sind, je nachdem das Anfangsglied des betreffenden Elementes η_i zu der Entwickelung um einen der drei bei $(z=\alpha)$ übereinander liegenden Verzweigungspunkte $\mathfrak{V}_a, \mathfrak{V}_b$ oder $\mathfrak{V}_c$ gehört. Die Elemente $\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \ldots \eta_i^{(n)}$ sollen so angeordnet sein, dafs $\frac{r_1}{\mu} \leqq \frac{r_2}{\mu} \leqq \cdots \leqq \frac{r_n}{\mu}$ ist. Zwei solche Brüche sollen k o n g r u e n t heifsen, wenn sie sich nur um eine ganze Zahl voneinander unterscheiden, wenn also z. B. $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$ ist, wo k eine ganze Zahl bedeutet. Endlich seien die Blätter für den Augenblick so bezeichnet, dafs das erste Blatt zu $\mathfrak{V}_a$, das zweite zu $\mathfrak{V}_b$, das dritte zu $\mathfrak{V}_c$ gehört, während die übrigen in irgend einer Reihenfolge auf diese folgen mögen.

Wir betrachten nun neben dem Systeme $(\eta_i^{(k)})$ das System (a_{ik}) seiner Anfangskoeffizienten, und auch von diesem nur seine drei ersten Horizontalreihen

$$(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots a_{3n} \end{pmatrix},$$

denn alle folgenden unterscheiden sich ja von einer von diesen nur um a^{te}, b^{te} oder c^{te} Wurzeln der Einheit, je nachdem das zugehörige Blatt zu $\mathfrak{V}_a$, $\mathfrak{V}_b$ oder $\mathfrak{V}_c$ gehört, sind also durch diese mit bestimmt. Es gelten nun für das System $(\eta_i^{(i)})$ folgende zwei Sätze:

Ohne das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ im Sinne der Äquivalenz zu ändern, kann man in dem Systeme (a) seiner Anfangskoeffizienten

1. das λ-fache irgend einer Kolonne von (a) von einer späteren Kolonne abziehen, falls nur die zugehörigen Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ kongruent sind und λ eine beliebige Konstante bedeutet,
2. irgend eine Kolonne von (a) durch eine beliebige Konstante λ dividieren.

Ist nämlich z. B. $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$, wo also $k \geqq 0$ ist, und ersetzt man in jener Basis $\eta^{(2)}$ durch

$$\eta^{(2)'} = \eta^{(2)} - \lambda (z - \alpha)^k \eta^{(1)},$$

so erhält man ein System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)'}, \dots \eta^{(n)})$, welches, wie früher bewiesen, dem Systeme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ äquivalent ist und dessen Anfangsglieder offenbar folgendes System bilden:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} - \lambda a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} - \lambda a_{31} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Falle wird einfach z. B. $\eta^{(1)}$ durch $\frac{1}{\lambda}\eta^{(1)}$ ersetzt; auch hierdurch wird nach einem früheren Satze das ursprüngliche System im Sinne der Äquivalenz nicht geändert.

Mit Hilfe dieser beiden Sätze kann nun die verlangte Überführung leicht bewerkstelligt werden. Von den drei Elementen der ersten Kolonne von (a) mufs mindestens eines von Null verschieden sein. Es sei etwa a_{21} das erste von diesen; dann mache man es dadurch zu 1, dafs man jene ganze Kolonne durch a_{21} dividiert. In dem so umgeformten Systeme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \overline{a}_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

mache man nun alle diejenigen Elemente der zweiten Horizontalreihe, für welche die zugehörigen Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ zu $\frac{r_1}{\mu}$ kongruent sind, dadurch zu Null, dafs man von der betreffenden Kolonne ein geeignetes Vielfaches der ersten abzieht. In derselben Weise werde nun die zweite Kolonne transformiert. Hier sei etwa $a_{12} \gtrless 0$; dann mache man dieses Element zu Eins und alsdann alle folgenden Elemente der ersten Zeile zu Null, für welche der zugehörige Exponent zu $\frac{r_2}{\mu}$ kongruent ist.

In derselben Weise kann man bis zur letzten Kolonne fortfahren, es sei denn, dafs einmal, etwa für die i^{te} Kolonne, alle Elemente a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} zugleich zu Null geworden sind. Alsdann sind aber in dem zugehörigen transformierten Elemente $\overline{\eta}^{(i)}$ alle n Koeffizienten von $(z-\alpha)^{\frac{r_i}{\mu}}$ in den konjugierten Entwickelungen gleich Null, d. h. $\overline{\eta}^{(i)}$ besitzt dann nicht den Teiler $(z-\alpha)^{\frac{r_i}{\mu}}$, wie bisher angenommen war, sondern einen höheren, also mindestens $(z-\alpha)^{\frac{r_i+1}{\mu}}$. Ist dies aber der Fall, so ordne man die letzten Elemente $\overline{\eta}^{(i)}, \ldots \overline{\eta}^{(n)}$ wieder nach der Gröfse ihrer Teiler, wobei eventuell $\overline{\eta}^{(i)}$ mit einem späteren Elemente zu vertauschen ist. Da aber unter der hier gemachten Voraussetzung die Summe der Exponenten $\sum\limits_i \frac{r_i}{\mu}$ mindestens um $\frac{1}{\mu}$ gewachsen ist und da sie andererseits nicht über $\frac{d}{\mu}$ hinaus zunehmen kann, so mufs man bei Fortsetzung des Verfahrens zuletzt zu einem Systeme kommen, bei welchem niemals alle Elemente einer Kolonne zugleich Null sind. Führt man jetzt die hier geschilderte Umformung bis zu Ende durch und ordnet dann die Kolonnen so, dafs zuerst diejenigen stehen, in welchen das erste der drei Kolonnenelemente gleich Eins ist, dann alle die, für welche das zweite Element gleich Eins ist, so erhält man ein zu $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ äquivalentes System, dessen Anfangssystem jetzt die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots 1; & 0 & 0 & \ldots 0; & 0\; 0 \ldots 0 \\ A_1 & A_2 & \ldots A_a; & 1 & 1 & \ldots 1; & 0\; 0 \ldots 0 \\ B_1 & B_2 & \ldots B_a; & C_1 & C_2 & \ldots C_b; & 1\; 1 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente der ersten Zeile mufs dann genau gleich a sein; da nämlich diese Zeile zu $\mathfrak{B}_a$ gehört, so müssen alle Exponenten $\frac{r_1}{\mu}, \ldots$ inkongruente Brüche mit dem Nenner a sein, und ihre Anzahl kann daher nicht gröfser als a sein. Genau ebenso folgt, dafs die Anzahl der Elemente 1 in der zweiten bzw. dritten Zeile höchstens b bzw. c sein kann. Endlich kann aber auch keine jener drei Anzahlen kleiner sein als bzw. a, b oder c; denn sonst würde man ja in mindestens einer Kolonne lauter Nullen erhalten, das Verfahren wäre somit noch nicht bis zu Ende durchgeführt.

Die zu den a ersten Kolonnen dieses Systems gehörenden Exponenten $\frac{r}{\mu}$ besitzen nun alle den Nenner a und bilden somit ein

vollständiges System inkongruenter Brüche mit diesem Nenner; sie mögen daher jetzt durch

$$\frac{\varrho_1}{a}, \frac{\varrho_2}{a}, \ldots \frac{\varrho_a}{a}$$

bezeichnet werden. Genau ebenso mögen die Brüche

$$\frac{\sigma_1}{b}, \frac{\sigma_2}{b}, \ldots \frac{\sigma_b}{b} \quad \text{und} \quad \frac{\tau_1}{c}, \frac{\tau_2}{c}, \ldots \frac{\tau_c}{c}$$

die Exponenten bezeichnen, welche bzw. zu den b folgenden und zu den c letzten Kolonnen gehören und welche ebenfalls vollständige Systeme inkongruenter Brüche mit den Nennern b und c bilden.

Schreibt man jetzt die Anfangsglieder für alle a zu $\mathfrak{B}_a$ gehörenden Blätter unter jene erste Zeile hinunter und beachtet dabei, dafs diese sich von jener ersten nur um a^{te} Wurzeln der Einheit unterscheiden, so bilden die a ersten Kolonnen ein Partialsystem

$$S_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots \omega_a \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \omega_1^{a-1} & \omega_2^{a-1} & \ldots \omega_a^{a-1} \end{pmatrix},$$

dessen Determinante $|S|$ den von Null verschiedenen Wert $a^{\frac{a}{2}}$ besitzt da sie die Quadratwurzel aus der Diskriminante der Kreisteilungsgleichung $\omega^a - 1 = 0$ ist. Alle Elemente der $b + c$ folgenden Kolonnen aber sind gleich Null. Schreibt man in derselben Weise alle n^2 Anfangsglieder jenes transformierten Systems unter die erste, zweite oder dritte Zeile unseres transformierten Systems, so erhält man ein System (a_{ik}) von Anfangskoeffizienten, welches in leicht verständlicher Bezeichnung folgendermafsen geschrieben werden kann:

$$(S) = \begin{pmatrix} S_a & 0 & 0 \\ * & S_b & 0 \\ * & * & S_c \end{pmatrix},$$

wo S_a das obige System von a Zeilen ist und S_b und S_c die entsprechenden aus den b^{ten} und c^{ten} Einheitswurzeln gebildeten Systeme von b bzw. c Zeilen bedeuten. Die Sterne bedeuten, dafs dort verschwindende oder nicht verschwindende Elemente stehen, welche bzw. aus den Gröfsen A_i, B_i, C_i und den bezüglichen Einheitswurzeln gebildet sind. Da nun die Determinante $|S|$ jenes Systems durch die Gleichung

$$|S| = |S_a| \cdot |S_b| \cdot |S_c| = a^{\frac{a}{2}} \cdot b^{\frac{b}{2}} \cdot c^{\frac{c}{2}}$$

bestimmt, also von Null verschieden ist, so ist das so gefundene System normal, also der Satz vollständig bewiesen.

Ist die Stelle $(z = \alpha)$ der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{p}_\infty$, bei welchem wieder die drei Verzweigungspunkte $\mathfrak{B}_a$, $\mathfrak{B}_b$, $\mathfrak{B}_c$ übereinander liegen, so ist der einzige Unterschied der, daſs das System

$$(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots a_{3n} \end{pmatrix}$$

im Sinne der Äquivalenz ungeändert bleibt, wenn man das λ-fache einer Vertikalreihe von einer **früheren** abzieht, falls die bezüglichen Exponenten kongruente Brüche sind. Ist nämlich wieder etwa $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$ und ersetzt man jetzt $\eta^{(1)}$ durch

$$\eta^{(1)\prime} = \eta^{(1)} - \lambda z^k \eta^{(2)},$$

so sind die Koeffizienten von $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{r_1}{\mu}}$ jetzt bzw. gleich

$$a_{11} - \lambda a_{12},\ a_{21} - \lambda a_{22},\ a_{31} - \lambda a_{32}.$$

In diesem Falle muſs man also die Transformation nicht von der ersten, sondern von der letzten Kolonne aus beginnen; man erkennt aber ohne weiteres, daſs man zuletzt genau zu demselben Resultate gelangt wie früher.

Wir heben noch die für das Weitere wichtige Grundeigenschaft der Kolonnenteiler des hier gefundenen normalen Systems hervor, und zwar gleich für den allgemeinsten Fall, daſs der Stelle $(z = \alpha)$ nicht drei, sondern beliebig viele Punkte der Riemannschen Fläche entsprechen.

Entsprechen der Stelle $(z = \alpha)$ die Punkte $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \dots \mathfrak{B}_c$ der Kugelfläche und sind

$$(z-\alpha)^{\varrho_1},\quad (z-\alpha)^{\varrho_2}, \dots (z-\alpha)^{\varrho_n}$$

die Kolonnenteiler des soeben gefundenen normalen Systems $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$, so bilden die Exponenten $(\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n)$ ein vollständiges System inkongruenter Brüche mit den Nennern $a, b, \dots c$.

Zwölfte Vorlesung.

Die Determinantenteiler einer Matrix. — Ihre Unveränderlichkeit bei umkehrbaren ganzen Transformationen. — Die Elementarteiler. — Die Elementarteiler eines Normalsystems sind mit den Kolonnenteilern identisch. — Bestimmung der Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche aus den Elementarteilern einer beliebigen Basis.

§ 1.

Wir wollen die in dem vorigen Abschnitte gefundenen Resultate anwenden, um aus den Eigenschaften eines beliebigen algebraischen Systems die Verzweigung der zugehörigen Riemannschen Fläche zu bestimmen. Dazu betrachten wir eine beliebige Basis

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$$

von n rational unabhängigen algebraischen Funktionen und die zu ihr gehörende Matrix

$$(\eta_k^{(i)}) = \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \ldots & \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} & \ldots & \eta_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n^{(1)} & \eta_n^{(2)} & \ldots & \eta_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

in der Umgebung einer beliebigen Stelle $(z = \alpha)$.

Wir führen nun zunächst einen wichtigen neuen Begriff in die Untersuchung ein, nämlich den der Determinantenteiler einer Matrix $(\eta_k^{(i)})$. Wir gelangen zu demselben durch die folgenden Überlegungen.

Denken wir uns für die Umgebung der Stelle $(z = \alpha)$ alle n^2 Elemente $\eta_k^{(i)}$ nach ganzen bzw. gebrochenen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors $z - \alpha$ entwickelt, so können diese Entwickelungen folgendermaſsen geschrieben werden:

$$\eta_k^{(i)} = (z - \alpha)^{\delta_k^{(i)}} E_{ki}(z \mid \alpha),$$

wo die Exponenten $\delta_k^{(i)}$ positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen, und die Reihen $E_{ki}(z \mid \alpha)$ Einheitsfunktionen für jene Stelle sind. Es sei nun d_1 der kleinste jener n^2 Exponenten $\delta_k^{(i)}$; dann ist

$$(z-\alpha)^{d_1}$$

die höchste Potenz von $z-\alpha$, welche in allen n^2 Entwickelungen noch enthalten ist, oder also der gröfste gemeinsame Teiler aller n^2 Elemente $\eta_k^{(i)}$ für die Stelle $(z=\alpha)$. Nun denken wir uns alle $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$ Determinanten zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} \eta_{k_1}^{(i_1)} & \eta_{k_2}^{(i_1)} \\ \eta_{k_1}^{(i_2)} & \eta_{k_2}^{(i_2)} \end{vmatrix}$$

aufgeschrieben, welche man aus dem Systeme $(\eta_k^{(i)})$ bilden kann; auch diese sind Potenzreihen von $z-\alpha$, können also in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(z-\alpha)^{\delta_{k_1 k_2}^{(i_1 i_2)}} E_{k_1 k_2, i_1 i_2}(z \,|\, \alpha).$$

Es sei nun wieder d_2 der kleinste jener $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$ Exponenten $\delta_{k_1 k_2}^{(i_1 i_2)}$; alsdann ist $(z-\alpha)^{d_2}$ der gröfste gemeinsame Teiler aller Determinanten zweiter Ordnung jenes Systems $(\eta_k^{(i)})$ für die Stelle $(z=\alpha)$.

In derselben Weise denken wir uns jetzt den gröfsten gemeinsamen Teiler aller Determinanten dritter Ordnung jenes Systems gebildet und fahren so fort. Auf diesem Wege erhalten wir die n Potenzen

$$(z-\alpha)^{d_1}, \quad (z-\alpha)^{d_2}, \ldots (z-\alpha)^{d_n},$$

welche der Reihe nach die gröfsten gemeinsamen Teiler aller Determinanten der ersten, zweiten u. s. w. n^{ten} Ordnung sind, welche man aus jenem Systeme $(\eta_k^{(i)})$ bilden kann. Die letzte Potenz $(z-\alpha)^{d_n}$ ist offenbar identisch mit der in der Determinante $|\eta_k^{(i)}|$ enthaltenen Potenz von $z-\alpha$. Diese n Potenzen von $(z-\alpha)$ werden die n Determinantenteiler des Systems $(\eta_k^{(i)})$ für die Stelle $(z=\alpha)$ genannt. Sie führen zu den wichtigsten Invarianten, welche ein System

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$$

besitzt.

Die Bedeutung der Determinantenteiler beruht wesentlich auf dem folgenden wichtigen Satze:

Äquivalente Systeme haben gleiche Determinantenteiler.

Da man jede Transformation eines Systems in ein äquivalentes durch eine Folge der drei elementaren Transformationen ersetzen kann, welche in der elften Vorlesung auf S. 161 charakterisiert worden sind, so ist jener Satz bewiesen, wenn wir die Richtigkeit der folgenden drei Sätze nachweisen können:

Die Determinantenteiler eines Systems $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ bleiben ungeändert, wenn man

1. eins seiner Elemente mit einer von Null verschiedenen Konstante multipliziert,
2. zwei Elemente miteinander vertauscht,
3. ein Element $\eta^{(i)}$ durch

$$\eta^{(i)'} = \eta^{(i)} - \lambda(z)\,\eta^{(k)}$$

   ersetzt, wenn $\lambda(z)$ eine beliebige ganze Funktion von z bedeutet.

Zum Beweise untersuchen wir, in welcher Weise eine jener drei elementaren Transformationen eine einzelne Determinante von beliebiger h^{ter} Ordnung, D_h, beeinflußt. Der Einfachheit wegen denken wir uns die Bezeichnung der Elemente so gewählt, daß jene zu untersuchende Determinante

$$D_h = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \dots & \eta_1^{(h)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_h^{(1)} & \dots & \eta_h^{(h)} \end{vmatrix} \tag{1}$$

ist. Wird nun zunächst ein Element $\eta^{(i)}$ mit einer Konstanten c multipliziert, so geht die Determinante D_h entweder in cD_h über oder sie bleibt ganz ungeändert, je nachdem $\eta^{(i)}$ in D_h vorkommt oder nicht. Alle Determinanten h^{ter} Ordnung D_h bleiben also entweder ungeändert oder sie multiplizieren sich mit einer Konstanten; der Teiler $(z-\alpha)^{d_h}$ ändert sich also bei der ersten Transformation nicht.

Vertauscht man ferner zwei Elemente $\eta^{(i)}$ und $\eta^{(k)}$ miteinander, welche beide in der Reihe $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(h)}$ der ersten h Elemente auftreten, so ändert D_h nur sein Zeichen. Sind dagegen beide Elemente nicht in jener Reihe enthalten, so ändert sich D_h gar nicht. Ist endlich etwa $\eta^{(i)} = \eta^{(1)}$, $\eta^{(k)} = \eta^{(h+1)}$, also das eine Element in D_h enthalten, das andere nicht, so vertauscht sich bei der Permutation dieser beiden Elemente nur die Determinante D_h mit der folgenden:

$$D_h' = \begin{vmatrix} \eta_1^{(h+1)} & \eta_1^{(2)} & \dots & \eta_1^{(h)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_h^{(h+1)} & \eta_h^{(2)} & \dots & \lambda_h^{(h)} \end{vmatrix}, \tag{1a}$$

welche ja ebenfalls in dem Systeme aller Determinanten h^{ter} Ordnung vorkommt. Die Gesamtheit aller Determinanten h^{ter} Ordnung ändert sich also in der Weise, daß gewisse unter ihnen mit -1 multipliziert, gewisse andere vertauscht werden; auch hier bleibt also der Teiler $(z-\alpha)^{d_h}$ ungeändert.

Ganz ähnlich gestaltet sich der Beweis, wenn etwa $\eta^{(i)}$ durch $\eta^{(i)'} = \eta^{(i)} - \lambda(z)\eta^{(k)}$ ersetzt wird. Sind nämlich i und k beide $< h$ oder beide $> h$, so ändert sich D_h gar nicht. Ebenso bleibt D_h ungeändert, wenn $i > h$, $k < h$ ist. Ist dagegen $i < h$, $k > h$, also etwa $i = 1$, $k = h + 1$, so geht durch jene Transformation D_h über in:

$$\begin{aligned} \overline{D}_h &= \left| \eta_{1g}^{(1)} - \lambda(z)\eta_{1g}^{(h+1)}, \quad \eta_{1g}^{(2)}, \ldots \eta_{1g}^{(h)} \right| \quad (g = 1, 2, \ldots h) \\ &= D_h - \lambda(z) D_h', \end{aligned}$$

wo D_h' die oben in (1a) angegebene Bedeutung hat. Es sei nun $(z-\alpha)^{d_h}$ der Determinantenteiler h^{ter} Ordnung des ursprünglichen Systems $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$, und $(z-\alpha)^{\overline{d}_h}$ der entsprechende des durch diese Elementartransformation veränderten

$$(\eta^{(1)} - \lambda(z)\eta^{(h+1)}, \ \eta^{(2)} \ldots \eta^{(n)}).$$

Dann ist jede transformierte Determinante $\overline{D}_h$ durch $(z-\alpha)^{d_h}$ teilbar, weil sie entweder mit einer der ursprünglichen Determinanten identisch oder gleich $D_h - \lambda(z)D_h'$ ist, wo $\lambda(z)$ eine ganze Funktion von z bedeutet und D_h, D_h' beide durch $(z-\alpha)^{d_h}$ teilbar sind. Also ist $(z-\alpha)^{d_h}$ in dem entsprechenden Teiler $(z-\alpha)^{\overline{d}_h}$ des transformierten Systems

$$(\eta^{(1)} - \lambda(z)\eta^{(h+1)}, \ \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$$

enthalten. Führt man aber jetzt wiederum dieses zweite System in das ursprüngliche dadurch über, dafs man zu seinem ersten Elemente $\eta^{(1)} - \lambda\eta^{(h+1)}$ das λ-fache des $(h+1)^{\text{ten}}$ Elementes $\eta^{(h+1)}$ addiert, so zeigt man genau ebenso, dafs auch umgekehrt der Teiler $(z-\alpha)^{\overline{d}_h}$ in $(z-\alpha)^{d_h}$ enthalten ist. Damit ist unser Fundamentalsatz vollständig bewiesen.

Dieser Satz gilt aber, wie ausdrücklich hervorgehoben werden soll, nur dann, wenn die Stelle $(z = \alpha)$ im Endlichen liegt. Ist nämlich $(\alpha = \infty)$, so gilt jener dritte spezielle Satz nicht mehr, da dann die ganze Funktion $\lambda(z)$ für die Stelle $(z = \infty)$ nicht mehr den Charakter einer ganzen Funktion besitzt, sondern in Bezug auf diese eine negative Ordnungszahl hat.

§ 2.

In der vorigen Vorlesung ist bewiesen worden, dafs man ein beliebiges System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ durch die soeben erwähnten elementaren Transformationen in ein äquivalentes sogenanntes normales System $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ überführen kann. Da aber bei einer solchen Transformation die Determinantenteiler ungeändert bleiben, so ergiebt sich jetzt der folgende wichtige Satz:

Ein beliebiges System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ besitzt für jede im Endlichen liegende Stelle $(z = \alpha)$ dieselben Determinantenteiler wie ein ihm äquivalentes normales System.

Wir gehen jetzt dazu über, die Determinantenteiler eines für eine Stelle $(z = \alpha)$ normalen Systems für diese Stelle zu untersuchen, und zwar wollen wir hier wieder voraussetzen, dafs jene Stelle auch die unendlich ferne sein kann. Es sei also

$$(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots \zeta^{(n)})$$

ein beliebiges normales System, und es mögen

$$(z-\alpha)^{\varrho_1}, (z-\alpha)^{\varrho_2}, \dots (z-\alpha)^{\varrho_n}$$

die Teiler seiner n Elemente bedeuten. Dann sind diese n Potenzen $(z-\alpha)^{\varrho_k}$ so bestimmt, dafs allgemein die n konjugierten Potenzreihen

$$\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}, \dots \zeta_n^{(k)}$$

für $\zeta^{(k)}$ durch $(z-\alpha)^{\varrho_k}$, aber durch keine höhere Potenz von $z-\alpha$ teilbar sind. Man kann also jene n konjugierten Entwickelungen so schreiben:

$$\zeta_1^{(k)} = a_{1k}(z-\alpha)^{\varrho_k} + \cdots,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\zeta_n^{(k)} = a_{nk}(z-\alpha)^{\varrho_k} + \cdots,$$

und von diesen Koeffizienten $a_{1k}, \dots a_{nk}$ ist mindestens einer von Null verschieden. Denkt man sich also in der zugehörigen Determinante $|\zeta_k^{(i)}|$ alle Elemente in gleicher Weise entwickelt, so erhält man aus ihr:

$$|\zeta_i^{(k)}| = |a_{ik}(z-\alpha)^{\varrho_k} + \cdots| = |a_{ik}|(z-\alpha)^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_n} + \cdots,$$

und da das System nach der Voraussetzung normal ist, so ist die aus den Anfangskoeffizienten gebildete Determinante $|a_{ik}|$ notwendig von Null verschieden.

Wir erinnern gleich an dieser Stelle an einen für das Folgende wichtigen Hilfssatz aus der Determinantentheorie:

Ist (a_{ik}) ein System von n^2 Zahlen, dessen Determinante $|a_{ik}|$ von Null verschieden ist, und bildet man aus seinen ersten h Vertikalreihen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nh} \end{pmatrix}$$

alle Determinanten h^{ter} Ordnung, so mufs mindestens eine dieser Determinanten von Null verschieden sein.

Entwickelt man nämlich die ganze Determinante

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1h} & a_{1h+1} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nh} & a_{nh+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

nach dem Laplaceschen Determinantensatze, so erhält man eine Identität

$$|a_{ik}| = \Sigma \Delta_h \Delta_{n-h},$$

wo Δ_h alle Determinanten h^{ter} Ordnung aus dem ersten Partialsysteme $(V_1, \dots V_h)$ durchläuft, während Δ_{n-h} jedesmal die zu Δ_h komplementäre Determinante $(n-h)^{\text{ter}}$ Ordnung aus dem Partialsysteme $(V_{h+1}, \dots V_n)$ bedeutet, d. h. diejenige Determinante des zweiten Partialsystems, welche mit Δ_h keine einzige Horizontalreihe gemeinsam hat. Wären also nach unserer Annahme alle Determinanten Δ_h gleich Null, so würde dasselbe für die ganze Determinante n^{ter} Ordnung gelten, was mit der oben gemachten Voraussetzung im Widerspruche steht.

Es sei nun die Bezeichnung der Elemente jenes normalen Systems $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots \zeta^{(n)})$ von vornherein so gewählt, dafs die Exponenten der Teiler $(z-\alpha)^{\varrho_k}$ ihrer Gröfse nach aufeinander folgen, dafs also

$$\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \dots \leqq \varrho_n$$

ist. Dann besteht der folgende wichtige Satz:

Die Determinantenteiler des für $(z=\alpha)$ normalen Systems $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots \zeta^{(n)})$ in Bezug auf diese Stelle sind der Reihe nach

$$(z-\alpha)^{\varrho_1}, \ (z-\alpha)^{\varrho_1+\varrho_2}, \dots (z-\alpha)^{\varrho_1+\varrho_2+\dots+\varrho_n}.$$

Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir allgemein, dafs irgend eine Determinante h^{ter} Ordnung D_h mindestens durch $(z-\alpha)^{\varrho_1+\varrho_2+\dots+\varrho_h}$ teilbar ist, dafs aber andererseits mindestens eine unter ihnen keine höhere Potenz von $z-\alpha$ enthält. Es sei wieder die Bezeichnung der konjugierten Elemente oder also der Horizontalreihen so gewählt, dafs die zu untersuchende Determinante D_h aus den ersten h Horizontalreihen gebildet ist, es sei also etwa

$$D_h = \begin{vmatrix} \zeta_1^{(i_1)} \dots \zeta_1^{(i_h)} \\ \vdots \\ \zeta_h^{(i_1)} \dots \zeta_h^{(i_h)} \end{vmatrix}.$$

Beachtet man dann, dafs alle Elemente der ersten, zweiten, u. s. w. h^{ten} Vertikalreihe dieser Determinante bzw. durch

$$(z-\alpha)^{\varrho_{i_1}}, (z-\alpha)^{\varrho_{i_2}}, \ldots (z-\alpha)^{\varrho_{i_h}}$$

teilbar sind, so folgt, dafs D_h mindestens durch $(z-\alpha)^{\varrho_{i_1}+\cdots+\varrho_{i_h}}$, also um so mehr durch $(z-\alpha)^{\varrho_1+\cdots+\varrho_h}$ teilbar ist, da ja

$$\varrho_1 \leq \varrho_{i_1}, \cdots \varrho_h \leq \varrho_{i_h}$$

ist; damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Wählt man jetzt speziell für D_h eine den h ersten Kolonnen entnommene Determinante h^{ter} Ordnung, setzt man also etwa

$$D_h = \begin{vmatrix} \zeta_{i_1}^{(1)} & \cdots & \zeta_{i_1}^{(h)} \\ \vdots & & \vdots \\ \zeta_{i_h}^{(1)} & \cdots & \zeta_{i_h}^{(h)} \end{vmatrix},$$

so ist diese, wie soeben gezeigt, mindestens durch $(z-\alpha)^{\varrho_1+\cdots+\varrho_h}$ teilbar. Bildet man aber den Quotienten von D_h durch eben jene Potenz von $z-\alpha$, indem man der Reihe nach die einzelnen Vertikalreihen durch den bezüglichen Teiler dividiert, so kann man jenen Quotienten in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{D_h}{(z-\alpha)^{\varrho_1+\cdots+\varrho_h}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\zeta_{i_1}^{(1)}}{(z-\alpha)^{\varrho_1}}, & \cdots & \dfrac{\zeta_{i_1}^{(h)}}{(z-\alpha)^{\varrho_h}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\zeta_{i_h}^{(1)}}{(z-\alpha)^{\varrho_1}}, & \cdots & \dfrac{\zeta_{i_h}^{(h)}}{(z-\alpha)^{\varrho_h}} \end{vmatrix}.$$

Die rechte Seite reduziert sich für $z=\alpha$ auf die aus den Anfangsgliedern gebildete Determinante h^{ter} Ordnung:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_h 1} & \cdots & a_{i_h h} \end{vmatrix},$$

und da nach dem vorher bewiesenen Hilfssatze mindestens eine jener aus den h ersten Vertikalreihen gebildeten Determinanten h^{ter} Ordnung von Null verschieden ist, so folgt in der That, dafs mindestens eine der Determinanten D_h durch keine höhere Potenz als $(z-\alpha)^{\varrho_1+\cdots+\varrho_h}$ teilbar ist. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

§ 3.

Neben den in den vorhergehenden Abschnitten betrachteten Determinantenteilern eines Systems $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ für eine beliebige

Stelle $(z=\alpha)$ führen wir nunmehr noch n andere und wesentlich wichtigere Gröfsen, die von Weierstrafs so genannten Elementarteiler jenes Systems, ein, und zwar stellen wir für sie die folgende Definition auf:

Sind $(z-\alpha)^{d_1}, (z-\alpha)^{d_2}, \ldots (z-\alpha)^{d_n}$ die n Determinantenteiler einer beliebigen algebraischen Matrix für eine Stelle $(z=\alpha)$, so sollen die Quotienten zweier aufeinander folgenden Determinantenteiler, also die Potenzen

$$e_1 = (z-\alpha)^{d_1}, \quad e_2 = (z-\alpha)^{d_2-d_1}, \ldots e_n = (z-\alpha)^{d_n - d_{n-1}}$$

der Reihe nach als der erste, zweite, u. s. w., n^{te} Elementarteiler jener Matrix für die Stelle $(z=\alpha)$ bezeichnet werden.

Hiernach sind also die Determinanten- und Elementarteiler einer Matrix $(\eta_k^{(i)})$ für eine Stelle $(z=\alpha)$ durch die folgenden Gleichungen miteinander verbunden:

$$e_1 = (z-\alpha)^{d_1}, \quad e_1 e_2 = (z-\alpha)^{d_2}, \ldots e_1 e_2 \ldots e_n = (z-\alpha)^{d_n}.$$

Da irgend zwei äquivalente Systeme gleiche Determinantenteiler haben, so besteht auch für die Elementarteiler offenbar der Satz:

Aequivalente Systeme haben gleiche Elementarteiler.

Für ein normales System ist allgemein

$$e_i = \frac{(z-\alpha)^{d_i}}{(z-\alpha)^{d_{i-1}}} = \frac{(z-\alpha)^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_i}}{(z-\alpha)^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_{i-1}}}$$

$$= (z-\alpha)^{\varrho_i},$$

d. h. die Elementarteiler eines normalen Systems sind mit den Teilern seiner Elemente oder, was dasselbe ist, mit den Kolonnenteilern der zugehörigen Matrix identisch.

Nun besitzt aber ein beliebiges nicht normales System dieselben Determinantenteiler, also auch dieselben Elementarteiler wie das äquivalente reguläre System, und daraus folgt der Satz:

Die Elementarteiler eines beliebigen Systems

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$$

stimmen überein mit den Teilern $(z-\alpha)^{\varrho_1}, \ldots (z-\alpha)^{\varrho_n}$ der Elemente desjenigen normalen Systems $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$, welches jenem äquivalent ist, und zwar ist allgemein der i^{te} Elementarteiler gleich $(z-\alpha)^{\varrho_i}$, wenn die Exponenten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ ihrer Gröfse nach geordnet sind.

Da die Exponenten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ des ersten, zweiten, ... n^{ten} Elementarteilers für die Stelle $(z=\alpha)$ eine zunehmende Reihe bilden, so ergiebt sich als unmittelbare Folgerung der wichtige Satz:

Von den n Elementarteilern eines Systems $(\eta_i^{(k)})$ für eine beliebige Stelle $(z = \alpha)$ ist jeder ein Divisor des nächstfolgenden.

Derselbe Satz besteht, wie leicht zu sehen, auch für die Determinantenteiler, aber nur dann, wenn das System für die betrachtete Stelle ganz ist; für die Elementarteiler gilt dieses Theorem aber immer.

Ferner ergiebt sich aus diesem Satze eine interessante Folgerung: Man kann ein System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ in verschiedene äquivalente Normalsysteme transformieren; da aber die Kolonnenteiler eines solchen Systems mit seinen Elementarteilern, also auch mit den Elementarteilern des ursprünglichen Systems übereinstimmen, so folgt, dafs die Kolonnenteiler der einem Systeme $(\eta^{(1)}, \dots \eta^{(n)})$ äquivalenten Normalsysteme immer dieselben sind, wie man jene Transformation auch ausführen mag.

Die genauere Untersuchung der Exponenten $\varrho_1, \dots \varrho_n$ der n Elementarteiler eines algebraischen Systems $(\eta_k^{(i)})$ ergab nun auf S. 173 ein Resultat, welches wir jetzt gleich in seiner allgemeinen, für eine beliebige Anzahl von Verzweigungspunkten giltigen Form aussprechen. Es mögen an der Stelle $(z = \alpha)$ die h Verzweigungspunkte

$$\mathfrak{V}_a, \mathfrak{V}_b, \dots \mathfrak{V}_d$$

übereinander liegen, in welchen bzw.

$$a, \quad b, \ \dots \ d$$

Blätter zusammenhängen, so dafs also

$$a + b + \cdots + d = n$$

ist. Alsdann können die Exponenten $\varrho_1, \dots \varrho_n$ jener Elementarteiler von vornherein so geordnet vorausgesetzt werden, dafs die a ersten unter ihnen,

$$\varrho_1, \quad \varrho_2, \dots \varrho_a,$$

ein vollständiges System von a inkongruenten Brüchen mit dem Nenner a bilden, dafs also

$$\begin{aligned}
\varrho_1 &= k_1 + \frac{0}{a}, \\
\varrho_2 &= k_2 + \frac{1}{a}, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\varrho_a &= k_a + \frac{a-1}{a}
\end{aligned}$$

ist, wo $k_1, k_2, \dots k_a$ ganze Zahlen bedeuten. Ebenso sollen die b folgenden Brüche $\varrho_{a+1}, \varrho_{a+2}, \dots \varrho_{a+b}$ ein vollständiges System von b inkongruenten Brüchen mit dem Nenner b bilden, u. s. w., die d letzten

ein ebensolches System von Brüchen mit dem Nenner d. Bezeichnen wir dann allgemein mit $R(\varrho)$ den kleinsten positiven Rest, den ein beliebiger Bruch ϱ nach Weglassung der gröfsten in ihm enthaltenen ganzen Zahl läfst, so dafs also z. B. für die a ersten Brüche $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_a$

$$R(\varrho_i) = R\left(k_i + \frac{i-1}{a}\right) = \frac{i-1}{a} \qquad (i = 1, 2, \ldots a)$$

ist, so können wir jenes vorher gefundene Resultat in dem folgenden Satze aussprechen:

Die kleinsten positiven Reste

$$R(\varrho_1), \quad R(\varrho_2), \ldots R(\varrho_n)$$

der Exponenten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ von den zu der Stelle $(z = \alpha)$ gehörenden Elementarteilern stimmen, abgesehen von der Reihenfolge, mit den h Bruchsequenzen

$$\frac{0}{a}, \frac{1}{a}, \ldots \frac{a-1}{a}; \quad \frac{0}{b}, \frac{1}{b}, \ldots \frac{b-1}{b}; \ldots \frac{0}{d}, \frac{1}{d}, \ldots \frac{d-1}{d}$$

überein, wenn $a, b, \ldots d$ die Zahlen der Blätter sind, welche in den zu $(z = \alpha)$ gehörenden Verzweigungspunkten

$$\mathfrak{V}_a, \quad \mathfrak{V}_b, \ldots \mathfrak{V}_d$$

miteinander zusammenhängen.

Wir wollen unter einer Bruchsequenz

$$\left[\frac{1}{\lambda}\right] \quad \text{die Reihe} \quad \left(\frac{0}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \ldots \frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$$

der nicht negativen unter 1 liegenden Brüche mit dem Nenner λ verstehen. Dann kann jener Satz, wie man leicht sieht, folgendermafsen ausgesprochen werden:

Ist $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ ein beliebiges System, und sind $(z-\alpha)^{\varrho_1}, (z-\alpha)^{\varrho_2}, \ldots (z-\alpha)^{\varrho_n}$ die zugehörigen Elementarteiler für eine beliebige Stelle $\mathfrak{p}$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, so lassen sich die kleinsten nicht negativen Reste der Exponenten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ derselben stets in Bruchsequenzen anordnen. Sind dann

$$\left[\frac{1}{a}\right], \quad \left[\frac{1}{b}\right], \ldots \left[\frac{1}{d}\right]$$

die h jener Stelle $\mathfrak{p}$ zugehörigen Bruchsequenzen, so liegen bei $\mathfrak{p}$ genau h Verzweigungspunkte der Fläche $\mathfrak{R}$ übereinander, in denen bzw. $a, b, \ldots d$ Blätter zusammenhängen.

Dieser Satz giebt eine wichtige theoretische Einsicht in den Zusammenhang, welcher zwischen den Elementarteilern eines beliebigen

algebraischen Systems und der Verzweigung der zugehörigen Riemannschen Fläche besteht. Er liefert aber auch ein Mittel, um die Art der Verzweigung der zu einer Gleichung $f(u, z) = 0$ gehörenden Riemannschen Fläche leicht zu finden. Da man nämlich zur Bestimmung der Bruchsequenzen $\left[\frac{1}{a}\right], \left[\frac{1}{b}\right], \ldots \left[\frac{1}{d}\right]$ von einem ganz beliebigen algebraischen Systeme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ ausgehen kann, so ist es möglich, die Aufgabe dadurch zu vereinfachen, dafs man von vornherein ein geeignetes System zu Grunde legt. Dies soll in der nächsten Vorlesung an einigen Beispielen erläutert werden.

Aus dem soeben bewiesenen Satze geht von selbst hervor, dafs sich die kleinsten Reste der Exponenten ϱ_i nur auf eine Weise in die Bruchsequenzen $\left[\frac{1}{a}\right], \left[\frac{1}{b}\right], \ldots \left[\frac{1}{d}\right]$ zusammenfassen lassen; denn ihre Nenner geben ja die zu den Verzweigungspunkten $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \ldots \mathfrak{B}_d$ gehörenden Blätterzahlen an. Um aber diese Zusammenfassung in jedem konkreten Falle wirklich durchzuführen, wähle man unter den kleinsten Resten von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ den kleinsten positiven Rest aus; dann besitzt dieser nach dem oben bewiesenen Satze notwendig die Form $\frac{1}{a}$ und bestimmt die erste Sequenz $\left[\frac{1}{a}\right]$ jener reduzierten Brüche. Nach Weglassung dieser Sequenz ist dann der kleinste der übrigbleibenden Brüche notwendig von der Form $\frac{1}{b}$ und bestimmt die zweite Sequenz $\left[\frac{1}{b}\right]$, und durch Fortsetzung desselben Verfahrens erhält man alle Sequenzen $\left[\frac{1}{a}\right], \left[\frac{1}{b}\right], \ldots \left[\frac{1}{d}\right]$.

Der Beweis jenes Satzes galt zunächst nur für die zu einer im Endlichen liegenden Stelle $(z = \alpha)$ gehörenden Verzweigungspunkte. Aber man erkennt ohne weiteres, dafs er auch für die Stelle $(z = \infty)$ richtig ist. In der That braucht man ja in der ursprünglichen Gleichung nur an Stelle von z die neue unabhängige Variable $z' = \frac{1}{z}$ einzuführen und dann das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ in der Umgebung der Stelle $(z' = 0)$ zu untersuchen. Führt man dasselbe dann durch die oben erwähnten elementaren Transformationen in das äquivalente normale System über, so bleiben auch hier die Elementarteiler ungeändert, und für das normale, also auch für das ursprüngliche System können wieder die kleinsten Reste der Exponenten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ in Bruchsequenzen angeordnet werden, deren Nenner mit den Ordnungszahlen der zu der Stelle $(z' = 0)$ oder $(z = \infty)$ gehörenden Verzweigungspunkte übereinstimmen. Jener Satz gilt also ganz allgemein für jede endliche Stelle $(z = \alpha)$ und auch für die unendlich ferne Stelle $(z = \infty)$.

§ 4.

Die bis jetzt durchgeführten Untersuchungen haben uns zu den wichtigsten Invarianten der algebraischen Matrizen $(\eta_{k}^{(i)})$ geführt. Um sie vollständig charakterisieren zu können, betrachten wir wieder den gröfsten gemeinsamen Teiler $D_h(z)$ aller Determinanten h^{ter} Ordnung, welche man aus einer beliebigen Matrix $(\eta_{k}^{(i)})$ bilden kann, aber jetzt nicht blofs für eine Stelle, sondern zugleich für alle endlichen Stellen und die unendlich ferne Stelle, d. h. auf der ganzen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$, deren Punkte $\mathfrak{p}$ den Stellen $(z = \alpha)$ entsprechen.

In einem jeden Punkte $\mathfrak{p}(z = \alpha)$ enthält $D_h(z)$ den zugehörigen Primteiler $\mathfrak{p}$ in einer Potenz $\mathfrak{p}^{d_h}$, deren Exponent aber keine ganze Zahl zu sein braucht, sondern ein positiver oder negativer rationaler Bruch sein kann. Aber nur für eine endliche Anzahl von Punkten werden die n Determinantenteiler $D_1(z)$, $D_2(z), \ldots D_n(z)$ von Null verschiedene positive oder negative Exponenten besitzen, während in allen übrigen Punkten die zugehörigen Exponenten Null sind.

Es seien nun

$$\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{r}$$

alle und nur die Punkte der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}(z)$, für welche mindestens einer der n Determinantenteiler einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Dann können jene n Determinantenteiler folgendermafsen als Divisoren dargestellt werden:

$$\begin{aligned} D_1(z) &= \mathfrak{p}^{d_1} \mathfrak{q}^{e_1} \ldots \mathfrak{r}^{f_1}, \\ D_2(z) &= \mathfrak{p}^{d_2} \mathfrak{q}^{e_2} \ldots \mathfrak{r}^{f_2}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D_n(z) &= \mathfrak{p}^{d_n} \mathfrak{q}^{e_n} \ldots \mathfrak{r}^{f_n}. \end{aligned}$$

Bildet man nun aus ihnen die zugehörigen Elementarteiler

$$E_i(z) = \frac{D_i(z)}{D_{i-1}(z)} = \mathfrak{p}^{d_i - d_{i-1}} \mathfrak{q}^{e_i - e_{i-1}} \ldots \mathfrak{r}^{f_i - f_{i-1}},$$

so können diese ebenfalls in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$E_i(z) = \mathfrak{p}^{\delta_i} \mathfrak{q}^{\varepsilon_i} \ldots \mathfrak{r}^{\zeta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Von diesen n Elementarteilern

$$E_1(z), \quad E_2(z), \ldots E_n(z)$$

ist jeder ein Teiler des folgenden, denn wir hatten auf S. 182 bewiesen, dafs dieses für jede einzelne Stelle der Kugelfläche der Fall ist.

Auch hier bedeuten die Exponenten $\delta_i, \varepsilon_i, \dots \zeta_i$ sämtlich rationale Brüche; jeder von ihnen kann also in der Form

$$\delta_i = k_i + R(\delta_i)$$

geschrieben werden, in welcher k_i eine ganze Zahl und der kleinste Rest $R(\delta_i)$ einen nicht negativen rationalen echten Bruch bedeutet. Daher kann jeder dieser Elementarteiler auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} E_i(z) &= \left(\mathfrak{p}^{k_i}\mathfrak{q}^{l_i}\dots\mathfrak{r}^{m_i}\right)\left(\mathfrak{p}^{R(\delta_i)}\mathfrak{q}^{R(\varepsilon_i)}\dots\mathfrak{r}^{R(\zeta_i)}\right) \\ &= \left[E_i(z)\right] R\left(E_i(z)\right), \end{aligned}$$

wo $[E_i(z)]$ nur ganzzahlige Potenzen von $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \dots \mathfrak{r}$ enthält und der kleinste Rest

$$R\left(E_i(z)\right) = \mathfrak{p}^{R(\delta_i)}\mathfrak{q}^{R(\varepsilon_i)}\dots\mathfrak{r}^{R(\zeta_i)}$$

nur positive echte Brüche oder die Null als Exponenten besitzt.

Die n Produkte

$$R\left(E_1(z)\right), \quad R\left(E_2(z)\right), \dots R\left(E_n(z)\right)$$

mögen die n reduzierten Elementarteiler des algebraischen Systems $(\eta_h^{(k)})$ heifsen; man findet sie, indem man in den Elementarteilern alle unecht gebrochenen Exponenten durch die ihnen kongruenten, d. h. um ganze Zahlen von ihnen verschiedenen echten Brüche ersetzt. Sie sind dann die Fundamentalinvarianten, auf welche oben hingewiesen wurde. In der That ist durch sie die Art der Verzweigung der zu dem Körper $K(z, u)$ gehörenden Riemannschen Fläche in der Weise bestimmt, dafs man mit ihrer Hilfe zu entscheiden vermag, zu welchen Stellen $(z = \alpha)$ überhaupt Verzweigungspunkte gehören und welches die Ordnungszahl eines jeden solchen Verzweigungspunktes ist; und zwar kann man diese Aufgabe lösen, welches auch die gegebene Basis $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ sein möge. Aus den bisher gefundenen Resultaten ergiebt sich nämlich ohne weiteres der Satz:

Sind

$$\begin{aligned} R\left(E_1(z)\right) &= \mathfrak{p}^{\bar{\delta}_1}\mathfrak{q}^{\bar{\varepsilon}_1}\dots\mathfrak{r}^{\bar{\zeta}_1}, \\ R\left(E_2(z)\right) &= \mathfrak{p}^{\bar{\delta}_2}\mathfrak{q}^{\bar{\varepsilon}_2}\dots\mathfrak{r}^{\bar{\zeta}_2}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ R\left(E_n(z)\right) &= \mathfrak{p}^{\bar{\delta}_n}\mathfrak{q}^{\bar{\varepsilon}_n}\dots\mathfrak{r}^{\bar{\zeta}_n} \end{aligned}$$

die n reduzierten Elementarteiler eines beliebigen Systems

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$$

des Körpers $K(z, u)$, so entsprechen den Punkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots \mathfrak{r}$ der einfachen Kugelfläche $\mathfrak{K}(z)$, und nur diesen, Verzweigungspunkte auf der n-blättrigen Kugelfläche $\mathfrak{R}$. Ist ferner $\mathfrak{p}\,(z = \alpha)$ einer jener Punkte von $\mathfrak{K}$ und lassen sich die zugehörigen echt gebrochenen Exponenten $\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2, \ldots \overline{\delta}_n$ in die h Sequenzen

$$\left[\frac{1}{a}\right], \quad \left[\frac{1}{b}\right], \ldots \left[\frac{1}{d}\right]$$

anordnen, so entsprechen der Stelle $\mathfrak{p}$ die h Verzweigungspunkte $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \ldots \mathfrak{B}_d$, in denen bzw. $a, b, \ldots d$ Blätter zusammenhängen.

Dreizehnte Vorlesung.

Berechnung der Verzweigungsordnungen für die zu einer gegebenen Gleichung gehörige Kugelfläche. — Direkte Bestimmung des ersten und zweiten, sowie des letzten und vorletzten Determinantenteilers. — Anwendungen: Die binomischen Gleichungen n^{ten} Grades. Die Verzweigung der allgemeinen zweiblättrigen, dreiblättrigen und vierblättrigen Riemannschen Flächen.

§ 1.

Die im vorigen Abschnitte bewiesenen Sätze ergeben nun ein einfaches und praktisch brauchbares Verfahren, um für einen beliebigen algebraischen Körper $K(z, u)$ die Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemannschen Fläche ihrer Lage und Ordnung nach wirklich zu bestimmen.

Es sei η irgend eine Gröfse des Körpers $K(z, u)$, für welche die zugehörige Gleichung n^{ten} Grades

$$1) \qquad a_n(z)\eta^n + a_{n-1}(z)\eta^{n-1} + \cdots + a_1(z)\eta + a_0(z) = 0$$

irreduktibel ist; ihre Koeffizienten $a_i(z)$ können als ganze Funktionen von z ohne gemeinsamen Teiler angenommen werden. Es werde die Aufgabe gestellt, die Verzweigung der zu dem Körper gehörenden Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ an einer beliebigen Stelle $\mathfrak{p}$ $(z = \alpha)$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke suchen wir die jener Stelle entsprechenden Elementarteiler $(z-\alpha)^{\delta_1}$, $(z-\alpha)^{\delta_2}$, ... $(z-\alpha)^{\delta_n}$ der speziellen algebraischen Matrix

$$2) \qquad D(1, \eta, \eta^2, \ldots \eta^{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 \ldots \eta_1^{n-1} \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 \ldots \eta_2^{n-1} \\ . & . & . \quad . \quad . \\ 1 & \eta_n & \eta_n^2 \ldots \eta_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

deren Determinante die Quadratwurzel aus der Diskriminante der Gleichung (1), also sicher von Null verschieden ist, und zwar setzen wir zunächst voraus, dafs für die zu untersuchende Stelle $(z = \alpha)$, mag sie nun im Endlichen oder im Unendlichen liegen, die n zugehörigen konjugierten Zweige $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ sämtlich endlich sind, also dort keinen Pol besitzen, oder, was dasselbe ist, wir nehmen an, der Teiler $(z-\alpha)^{\delta}$ jener n konjugierten Zweige für diese Stelle habe einen nicht negativen Exponenten. Nach den früher gemachten Bemerkungen ist

diese Voraussetzung dann und nur dann für eine im Endlichen liegende Stelle ($z = \alpha$) erfüllt, wenn der Koeffizient $a_n(z)$ des höchsten Gliedes durch den zugehörigen Linearfaktor nicht teilbar ist; für ($z = \infty$) dagegen müssen wir voraussetzen, daſs der Grad von $a_n(z)$ in Bezug auf z gröſser ist als der Grad aller anderen Koeffizienten.

Unter diesen Voraussetzungen können wir für den gröſsten gemeinsamen Teiler aller Unterdeterminanten einer beliebigen λ^{ten} Ordnung des Systems (2) in Bezug auf die Stelle ($z = \alpha$) einen sehr einfachen Ausdruck angeben. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst das rechteckige System

$$3)\qquad \begin{pmatrix} 1 & \eta_1 \dots \eta_1^{\lambda-1} & \eta_1^{\lambda} \dots \eta_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & \eta_\lambda \dots \eta_\lambda^{\lambda-1} & \eta_\lambda^{\lambda} \dots \eta_\lambda^{n-1} \end{pmatrix},$$

welches aus den λ ersten Zeilen von (2) gebildet ist. Jede seiner Determinanten λ^{ter} Ordnung

$$\begin{vmatrix} \eta_1^{i_1} & \eta_1^{i_2} \dots \eta_1^{i_\lambda} \\ \eta_2^{i_1} & \eta_2^{i_2} \dots \eta_2^{i_\lambda} \\ \vdots & \\ \eta_\lambda^{i_1} & \eta_\lambda^{i_2} \dots \eta_\lambda^{i_\lambda} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i_h = 0, 1, \dots n-1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_\lambda \end{pmatrix}$$

verschwindet, wenn irgend zwei der Elemente $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$ gleichgesetzt werden, weil dann zwei ihrer Horizontalreihen gleich werden, und hieraus folgt bekanntlich, daſs sie durch das Differenzenprodukt derselben

$$\prod_{\alpha,\beta=1}^{\lambda} (\eta_\alpha - \eta_\beta) = \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 \dots \eta_1^{\lambda-1} \\ 1 & \eta_2 \dots \eta_2^{\lambda-1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & \eta_\lambda \dots \eta_\lambda^{\lambda-1} \end{vmatrix},$$

d. h. durch die erste Determinante jenes Systems (3) in der Weise teilbar ist, daſs der Quotient eine rationale ganze Funktion von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$, also selbst algebraisch ganz ist. Dieser Satz gilt aber nur dann, wenn die Funktionen η_i für die Stelle ($z = \alpha$) endlich sind, denn andernfalls ist eine ganze Funktion von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ im allgemeinen nicht an jener Stelle endlich. Es stimmt demnach unter der oben von uns gemachten Voraussetzung der gröſste gemeinsame Teiler aller Determinanten λ^{ter} Ordnung von (3) mit der ersten Determinante jenes Systems überein; macht man dieselbe Überlegung für alle Systeme von je λ Horizontalreihen von $D(1, \eta, \eta^2, \dots \eta^{n-1})$, so ergiebt sich der folgende Satz:

Der gröſste gemeinsame Teiler aller Determinanten einer beliebigen λ^{ten} Ordnung des Systems $D(1, \eta, \ldots \eta^{n-1})$ stimmt überein mit dem Determinantenteiler des algebraischen Systems

$$\begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & \ldots & \eta_1^{\lambda-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \eta_\lambda & \ldots & \eta_\lambda^{\lambda-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \eta_n & \ldots & \eta_n^{\lambda-1} \end{pmatrix},$$

welches aus dem ursprünglichen durch Weglassung seiner $n - \lambda$ letzten Vertikalreihen gebildet ist. Derselbe soll kurz durch

$$D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-1})$$

bezeichnet werden.

Hieraus ergiebt sich für die gesuchten Elementarteiler der folgende einfache Ausdruck:

$$E_\lambda = \frac{D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-1})}{D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-2})} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n).$$

Für die Bestimmung der Verzweigungspunkte braucht man aber nicht die Elementarteiler selbst, sondern nur ihre kleinsten Reste $R(E_\lambda)$, welche man erhält, wenn man die Funktionen E_λ durch ihren gröſsten rationalen Teiler $[E_\lambda]$ dividiert. Für sie erhält man also die folgende Darstellung:

$$4) \qquad R(E_\lambda) = R\left(\frac{D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-1})}{D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-2})}\right) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n).$$

Aus den Exponenten $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \ldots \bar{\delta}_n$ der Potenzen von $z - \alpha$, welche bzw. in $R(E_1), R(E_2), \ldots R(E_n)$ enthalten sind, können wir nun unmittelbar die Anzahl und die Ordnung der an der Stelle $\mathfrak{p}$ $(z = \alpha)$ über einander liegenden Verzweigungspunkte finden. Nach dem Resultate des vorigen Abschnittes lassen sich nämlich diese n nicht negativen Brüche in Sequenzen $\left[\frac{1}{\lambda}\right] = \left(\frac{0}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \ldots \frac{\lambda-1}{\lambda}\right)$ anordnen, und wenn jene n Brüche in die h Sequenzen $\left[\frac{1}{a}\right], \left[\frac{1}{b}\right], \ldots \left[\frac{1}{d}\right]$ zusammengefaſst werden können, so liegen in $\mathfrak{p}$ h Windungspunkte bzw. von den Ordnungen

$$a - 1, \quad b - 1, \ldots d - 1$$

übereinander.

Diese Bestimmung der Invarianten $R(E_\lambda(z))$ gilt aber zunächst nur für diejenigen Stellen α, für welche $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ sämtlich endlich sind, denn für die übrigen Stellen fällt der Teiler aller Determinanten

λ^{ter} Ordnung im allgemeinen gar nicht mit $D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-1})$ zusammen. Merkwürdigerweise stimmen aber die reduzierten Elementarteiler $R(E_\lambda(z))$ auch für diese ausgeschlossenen Stellen mit den Ausdrücken (4) überein.

Um dies nachzuweisen, erinnern wir zunächst daran, dafs wir, falls $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ nicht endlich sind, falls also ihr Teiler $(z-\alpha)^\delta$ einen negativen Exponenten hat, die Variable η durch eine andere $\overline{\eta} = (z-\alpha)^d \eta$ ersetzen können, für welche die ganzzahlige Potenz $(z-\alpha)^d$ so grofs gewählt ist, dafs alle n Entwickelungen der n Wurzeln

$$\overline{\eta}_1, \quad \overline{\eta}_2, \ldots \overline{\eta}_n$$

an jener Stelle endlich sind; denn zu diesem Zwecke brauchen wir ja nur $d \geqq -\delta$ zu wählen. Dann gelten für das System

$$(1, \overline{\eta}, \overline{\eta}^2, \ldots \overline{\eta}^{n-1})$$

in Bezug auf die Stelle $(z = \alpha)$ alle früher bewiesenen Sätze, d. h. die reduzierten Elementarteiler des neuen, also auch des ursprünglichen Systems für jene Stelle sind durch die Gleichungen

$$R(\overline{E}_\lambda(z)) = R\left(\frac{D(1, \overline{\eta}, \overline{\eta}^2, \ldots \overline{\eta}^{\lambda-1})}{D(1, \overline{\eta}, \overline{\eta}^2, \ldots \overline{\eta}^{\lambda-2})}\right)$$

gegeben. Man erkennt aber leicht, dafs diese reduzierten Elementarteiler mit den vorher bestimmten übereinstimmen. Ersetzt man nämlich allgemein

$$\overline{\eta}_i \quad \text{durch} \quad (z-\alpha)^d \eta_i,$$

so ist für jede Determinante λ^{ter} Ordnung

$$\left|1, \overline{\eta}_i, \ldots \overline{\eta}_i^{\lambda-1}\right| = \left|1, (z-\alpha)^d \eta_i, \ldots (z-\alpha)^{(\lambda-1)d} \eta_i^{\lambda-1}\right|$$
$$= (z-\alpha)^{(1+2+\cdots+(\lambda-1))d} \cdot \left|1, \eta_i, \ldots \eta_i^{\lambda-1}\right|,$$

d. h. jede Determinante λ^{ter} Ordnung des Systems $(1, \overline{\eta}, \ldots \overline{\eta}^{\lambda-1})$ unterscheidet sich von der entsprechenden des ursprünglichen Systems $(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-1})$ um eine und dieselbe ganzzahlige Potenz von $z - \alpha$; es ist also

$$D(1, \overline{\eta}, \ldots \overline{\eta}^{\lambda-1}) = (z-\alpha)^{(1+2+\cdots+(\lambda-1))d} D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-1}),$$

und ebenso für die Determinanten $(\lambda-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$D(1, \overline{\eta}, \ldots \overline{\eta}^{\lambda-2}) = (z-\alpha)^{(1+2+\cdots+(\lambda-2))d} D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-2}).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{D(1, \overline{\eta}, \ldots \overline{\eta}^{\lambda-1})}{D(1, \overline{\eta}, \ldots \overline{\eta}^{\lambda-2})} = (z-\alpha)^{(\lambda-1)d} \cdot \frac{D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-1})}{D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-2})}.$$

Da sich somit die beiden Quotienten $E_\lambda(\bar{\eta})$ und $E_\lambda(\eta)$ nur um eine rationale ganze Funktion des Linearfaktors $z - \alpha$ unterscheiden, so stimmen ihre reduzierten Werte $R(E_\lambda(\bar{\eta}))$ und $R(E_\lambda(\eta))$ überein, und es gilt somit ohne jede Einschränkung der Satz:

Für einen beliebigen Körper der n^{ten} Ordnung findet man die reduzierten n Elementarteiler aus den Gleichungen

$$R(E_\lambda(\eta)) = R\left(\frac{D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-1})}{D(1, \eta, \ldots \eta^{\lambda-2})}\right),$$

wenn η eine beliebige algebraische Gröfse jenes Körpers ist. Durch diese n Fundamentalinvarianten ist die Verzweigung der zugehörigen Riemannschen Fläche für jeden ihrer Punkte, den unendlich fernen Punkt mit eingeschlossen, vollständig bestimmt.

§ 2.

Wir wollen nun zunächst die einfachen Werte des ersten und zweiten sowie des letzten und vorletzten Determinantenteilers von $D(1, \eta, \ldots \eta^{n-1})$ durch die Koeffizienten der die Gröfse η definierenden Gleichung ausdrücken, um jene Werte später bei der Untersuchung der zwei-, drei- und vierblättrigen Riemannschen Flächen benutzen zu können. Der erste und der letzte Determinantenteiler sind unmittelbar bekannt, denn es ist

$$\begin{aligned} &D_1(\eta) = D(1) = 1, \\ 1) \qquad &D_n(\eta) = D(1, \eta, \ldots \eta^{n-1}) = \Delta^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wenn

$$\Delta = \prod_{i, k = 1}^{n} (\eta_i - \eta_k)$$

die Diskriminante der Gleichung für η ist.

Auch den zweiten und den vorletzten Determinantenteiler findet man leicht. In der That ist

$$D_2(\eta) = D(1, \eta) = \left\{\begin{matrix} 1 & \eta_1 \\ 1 & \eta_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & \eta_n \end{matrix}\right\} = (\eta_1 - \eta_2, \ldots \eta_i - \eta_k, \ldots \eta_{n-1} - \eta_n),$$

d. h. $D_2(\eta)$ ist für jede Stelle α gleich dem gröfsten gemeinsamen Teiler aller $\frac{n(n-1)}{2}$ Wurzeldifferenzen $\eta_i - \eta_k$. Durch denselben Teiler

$\overline{D}_2(\eta)$ ist aber offenbar auch die Summe der n folgenden Differenzen teilbar:

$$\frac{1}{n}\{(\eta_i-\eta_1)+(\eta_i-\eta_2)+\cdots+(\eta_i-\eta_i)+\cdots+(\eta_i-\eta_n)\}=\eta_i-\frac{s_1}{n},$$

wenn

$$s_1=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n=S(\eta)$$

die Spur von η, also den negativ genommenen Koeffizienten von η^{n-1} in der Gleichung für η bedeutet. Also ist jener Teiler $\overline{D}_2(1,\eta)$ ein Divisor des folgenden:

$$D_2(\eta)=\left(\eta_1-\frac{s_1}{n},\ \eta_2-\frac{s_1}{n},\cdots\eta_n-\frac{s_1}{n}\right).$$

Andererseits ist aber auch $\overline{D}_2(\eta)$ in $D_2(\eta)$ enthalten, weil ja jede Differenz $\eta_i-\eta_k$ in der Form

$$\eta_i-\eta_k=\left(\eta_i-\frac{s_1}{n}\right)-\left(\eta_k-\frac{s_1}{n}\right)$$

darstellbar, also durch $\overline{D}_2(\eta)$ teilbar ist. Hieraus folgt, dafs

$$D_2(\eta)=\overline{D}_2(\eta)$$

ist. Denken wir uns nun von vornherein die ursprüngliche Gleichung in der Form gegeben:

$$F(\eta,z)=\eta^n+a_{n-2}(z)\eta^{n-2}+\cdots+a_0(z)=0, \tag{2}$$

so dafs der Koeffizient der zweithöchsten Potenz gleich Null ist, so besteht für den zweiten Determinantenteiler die folgende einfache Gleichung:

$$D_2(1,\eta)=(\eta_1,\eta_2,\ldots\eta_n),$$

also ist nach dem auf S. 166 ausgesprochenen Satze:

$$D_2(1,\eta)=\left(a_{n-2}^{\frac{1}{2}},\ a_{n-3}^{\frac{1}{3}},\ldots a_0^{\frac{1}{n}}\right). \tag{3}$$

Auf jene Form (2) kann aber jede Gleichung

$$\eta^n+a_{n-1}(z)\eta^{n-1}+\cdots+a_0(z)=0$$

durch die einfache Substitution

$$\overline{\eta}=\eta-\frac{a_{n-1}}{n},\quad \eta=\overline{\eta}+\frac{a_{n-1}}{n}$$

gebracht werden.

Ebenso leicht kann auch der vorletzte Determinantenteiler durch die Gleichungskoeffizienten ausgedrückt werden. Derselbe hatte nämlich die Form

$$D_{n-1}(\eta) = D(1, \eta, \ldots \eta^{n-2}) = D\begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 \ldots \eta_1^{n-2} \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 \ldots \eta_2^{n-2} \\ \vdots & & \\ 1 & \eta_n & \eta_n^2 \ldots \eta_n^{n-2} \end{pmatrix},$$

also ist $D_{n-1}(\eta)$ einfach der gröfste gemeinsame Teiler der n Determinanten, welche man aus der obigen Matrix durch Weglassung je einer Zeile erhält, d. h. aus den n Differenzenprodukten von je $(n-1)$ unter den n Elementen $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}, \eta_n)$. Nun können wir aber das Differenzenprodukt von $n-1$ Gröfsen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ durch das entsprechende von n Gröfsen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}, \eta_n$ folgendermafsen ausdrücken:

$$\prod_{i,k=1}^{n-1}(\eta_i - \eta_k) = \frac{\prod\limits_{i,k=1}^{n}(\eta_i - \eta_k)}{(\eta_n - \eta_1)\ldots(\eta_n - \eta_{n-1})} \qquad (i > k)$$

$$= \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{f'(\eta_n)}.$$

Thut man dies für alle n Determinanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus der Matrix $(1, \eta_i, \ldots \eta_i^{n-2})$ gebildet werden können, so ergiebt sich für den vorletzten Determinantenteiler die folgende Darstellung:

$$4)\quad D_{n-1}(\eta) = D(1, \eta, \eta^2, \ldots \eta^{n-2}) = \Delta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{f'(\eta_1)}, \frac{1}{f'(\eta_2)}, \cdots \frac{1}{f'(\eta_n)}\right),$$

und auch dieser Teiler kann in jedem Falle leicht durch die Gleichungskoeffizienten ausgedrückt werden.

§ 3.

Die hier gefundenen Resultate wenden wir zunächst auf den allereinfachsten Fall an, dafs $F(\eta, z)$ eine binomische Gleichung n^{ten} Grades

$$1)\qquad \eta^n = A(z)$$

ist, wo $A(z)$ eine beliebige ganze oder gebrochene rationale Funktion von z bedeutet.

In diesem Falle ist das System

$$(1, \eta, \eta^2, \ldots \eta^{n-1})$$

für jede endliche oder die unendliche Stelle $(z = \alpha)$ normal, und man kann also aus seinen Kolonnenteilern unmittelbar die Verzweigung der

zugehörigen n-blättrigen Riemannschen Fläche erkennen. In der That ist ja in diesem Falle allgemein

$$\eta_k = \omega^k A^{\frac{1}{n}}(z),$$

wenn

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

die zugehörige n^{te} Wurzel der Einheit bedeutet; also ist der gröfste gemeinsame Teiler der n in einer Kolonne stehenden Elemente $\eta_1^i, \eta_2^i, \ldots \eta_n^i$ für jede Stelle $(z = \alpha)$

$$(\eta_1^i, \eta_2^i, \ldots \eta_n^i) = A^{\frac{i}{n}}(z);$$

und da sich die Determinante

$$\left| 1, \frac{\eta_k}{A^{\frac{1}{n}}}, \frac{\eta_k^2}{A^{\frac{2}{n}}}, \ldots \frac{\eta_k^{n-1}}{A^{\frac{n-1}{n}}} \right| = \left| 1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots \omega^{(n-1)k} \right|$$

für $(z = \alpha)$ stets auf eine von Null verschiedene Konstante reduziert, so ist jenes System in der That ein normales, d. h. seine Kolonnenteiler stimmen für jede Stelle mit den Elementarteilern überein.

Es sei nun $(z = \alpha)$ eine beliebige Stelle und $(z - \alpha)^r$ die Potenz des zugehörigen Linearfaktors, welche in $A(z)$ enthalten ist. Dann sind die n Kolonnenteiler

$$1, \quad A^{\frac{1}{n}}, \ldots \quad A^{\frac{n-1}{n}}$$

genau durch

$$1, \quad (z - \alpha)^{\frac{r}{n}}, \ldots (z - \alpha)^{\frac{(n-1)r}{n}}$$

teilbar, und die Ordnungszahlen der jener Stelle zugehörigen Verzweigungspunkte sind also die Nenner der Bruchsequenzen, in welche die kleinsten nicht negativen Reste der n Brüche

$$1, \quad \frac{r}{n}, \ldots \frac{(n-1)r}{n}$$

geordnet werden können. Ist aber

$$d = (r, n)$$

der gröfste gemeinsame Teiler von r und n, so dafs also

$$r = dr', \quad n = dn'$$

und r', n' teilerfremd sind, so sind jene Brüche identisch mit den folgenden:

$$1, \quad \frac{r'}{n'}, \quad \frac{2r'}{n'}, \ldots \frac{(n-1)r'}{n'},$$

und ihre kleinsten Reste stimmen offenbar überein mit den Elementen der d-mal hintereinander zu setzenden Bruchsequenz

$$\left[\frac{1}{n'}\right] = \left(\frac{0}{n'}, \frac{1}{n'}, \ldots \frac{n'-1}{n'}\right).$$

Es liegen also an der Stelle $(z = \alpha)$ genau d Verzweigungspunkte übereinander, in denen je n' Blätter zusammenhängen. Es ergiebt sich also der folgende Satz:

> Ist $\eta^n = A(z)$ und ist der Linearfaktor $z - \alpha$ ein r-facher Teiler von $A(z)$ so ist die Anzahl der im Punkte $z = \alpha$ übereinander liegenden Verzweigungspunkte stets gleich dem gröfsten gemeinsamen Teiler von n und r, und diese Verzweigungspunkte sind sämtlich von gleicher Ordnung.

Also nur an den Stellen können überhaupt Verzweigungspunkte auftreten, welche Nullstellen oder Polen von $A(z)$ entsprechen. Aber auch diese sind nur dann Verzweigungspunkte, wenn r nicht ein Vielfaches von n ist. An der Stelle $(z = \infty)$ besitzt $A(z)$ die Ordnung $-\varrho$, wenn ϱ der Grad von $A(z)$ in Bezug auf z ist. Man erhält für diese Stelle also den speziellen Satz:

> Der Stelle $(z = \infty)$ entsprechen δ übereinander liegende Verzweigungspunkte gleicher Ordnung, wenn δ der gröfste gemeinsame Teiler von n und dem Grade ϱ der rationalen Funktion $A(z)$ ist.

Alle diese Resultate können auch in einfacher Weise auf anderem Wege hergeleitet werden, da hier die Entwickelungen der n Wurzeln der reinen Gleichung in der Umgebung einer jeden Stelle direkt hingeschrieben werden können.

Wir wenden dieses Ergebnis noch kurz auf die Betrachtung der allgemeinen zweiblättrigen Riemannschen Fläche an, nehmen also an, dafs η durch eine beliebige Gleichung zweiten Grades

$$\eta^2 + 2a\eta + b = 0 \tag{2}$$

definiert ist, wo a, b beliebige rationale Funktionen von z bedeuten. Ersetzen wir hier η durch die neue Gröfse

$$\bar{\eta} = \eta + a,$$

so genügt jetzt $\bar{\eta}$ der binomischen Gleichung

$$\bar{\eta}^2 = \bar{a}(z),$$

wo $\bar{a}(z) = a^2 - b$ die Diskriminante der ursprünglichen Gleichung ist. Man kann nun $\bar{a}(z)$ auf eine und nur eine Weise als ein Produkt

$$\bar{a}(z) = a_0^2(z)\, a_1(z)$$

eines rationalen Quadrates und einer ganzen Funktion

$$a_1(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_\nu)$$

darstellen, welche aus lauter verschiedenen Linearfaktoren besteht. Ersetzt man nun $\overline{\eta}$ durch die neue Gröfse desselben Körpers

$$y = \frac{\overline{\eta}}{a_0(z)},$$

so genügt y der quadratischen Gleichung

2a) $$y^2 = a_1(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_\nu),$$

und unser soeben gefundenes allgemeines Resultat lehrt, dafs die dem Körper $K(\eta, z)$ zugehörige zweiblättrige Riemannsche Fläche im Endlichen nur an den ν Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ je einen zweiblättrigen Verzweigungspunkt besitzt und im übrigen dann und nur dann noch einen solchen Verzweigungspunkt an der Stelle $(z = \infty)$ hat, wenn $(\nu, 2) = 1$, d. h. wenn der Grad von $a_1(z)$ eine ungerade Zahl ist. Die Anzahl der zu einer allgemeinen zweiblättrigen Riemannschen Fläche gehörenden Verzweigungspunkte ist also stets gerade, und zwar stets $= \{\nu\}$, wenn $\{\nu\}$ die nächste gerade Zahl ist, welche $\geqq \nu$ ist.

§ 4.

Die gefundenen Resultate wenden wir ferner auf die allgemeine dreiblättrige Riemannsche Fläche an. Es sei y als Funktion von z durch die kubische Gleichung

1) $$y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0$$

definiert, wo a_1, a_2, a_3 beliebige rationale Funktionen von z sind. Setzen wir hier, um den Koeffizienten von y^2 fortzuschaffen:

$$\eta = y - \frac{a_1}{3},$$

so genügt η der Gleichung

1a) $$\eta^3 + a\eta + b = 0,$$

wo also auch

$$a = \frac{3a_2 - a_1^2}{3}, \quad b = \frac{27a_3 - 9a_1 a_2 + 2a_1^2}{27}$$

bekannte rationale Funktionen von z sind.

Nach den Gleichungen (1) und (3) des § 2 erhalten wir hier für die drei Determinantenteiler die folgenden einfachen Werte:

2) $$\begin{aligned} D(1) &= 1, \\ D(1, \eta) &= \left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{3}}\right) &&= E_2, \\ D(1, \eta, \eta^2) &= \Delta^{\frac{1}{2}} = (4a^3 + 27b^2)^{\frac{1}{2}} &&= E_2 E_3, \end{aligned}$$

aus denen dann die reduzierten Elementarteiler ohne weiteres abgeleitet werden können.

Diese drei Funktionen können wir aber vollständig durch die eine

$$E(z) = \frac{E_3(z)}{E_2(z)} = \frac{D(1, \eta, \eta^2)}{D(1, \eta)^2} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\left(a, b^{\frac{2}{3}}\right)}$$

ersetzen, da aus ihr allein der Charakter einer jeden Stelle $(z = \alpha)$ (auch für $\alpha = \infty$) vollständig erkannt werden kann. Entspricht nämlich jener Stelle ein dreiblättriger Verzweigungspunkt und ist $z - \alpha$ $\left(\text{bzw. } \frac{1}{z}\right)$ der zugehörige Linearfaktor, so mufs nach dem vorher erwähnten Hauptsatze von den beiden reduzierten Elementarteilern $R(E_3)$ und $R(E_2)$ der eine durch $(z - \alpha)^{\frac{1}{3}}$, der andere durch $(z - \alpha)^{\frac{2}{3}}$, also der reduzierte Quotient $\frac{E_3}{E_2}$ durch $(z - \alpha)^{\frac{1}{3}}$ oder $(z - \alpha)^{\frac{2}{3}}$ teilbar sein; ist dagegen an jener Stelle nur ein zweiblättriger Verzweigungspunkt vorhanden, so ist der eine von jenen beiden reduzierten Teilern durch $(z - \alpha)^{\frac{1}{2}}$, der andere gar nicht, also ihr Quotient durch $(z - \alpha)^{\frac{1}{2}}$ teilbar; endlich enthält jener reduzierte Quotient den Faktor $z - \alpha$ offenbar gar nicht, wenn in jener Stelle alle drei Blätter getrennt verlaufen. Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

Die Funktion

$$\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\left(a, b^{\frac{2}{3}}\right)}$$

besitzt an jeder endlichen oder der unendlich fernen Stelle eine ganz bestimmte Ordnungszahl δ. Denkt man sich diesen Bruch in seiner reduzierten Form geschrieben, so giebt sein Nenner die Anzahl der Blätter an, welche an der betrachteten Stelle in einem Verzweigungspunkte zusammenhängen; jener Stelle entsprechen also drei reguläre Punkte, wenn δ ganz ist, und ihr entspricht ein zweiblättriger oder ein dreiblättriger Verzweigungspunkt, je nachdem δ den Nenner 2 oder 3 besitzt.

Die Frage nach der Verzweigung der dreiblättrigen Fläche in einem bestimmten Punkte kann noch einfacher entschieden werden, wenn man die wenigen in Betracht kommenden Fälle gesondert betrachtet. Sei $z - \alpha$ der an der betrachteten Stelle verschwindende Linearfaktor und

$$a = (z-\alpha)^{\mathfrak{a}} a', \quad b = (z-\alpha)^{\mathfrak{b}} b', \quad \Delta = (z-\alpha)^{\mathfrak{d}} \Delta',$$

wo a', b', Δ' für jene Stelle Einheitsfunktionen sind, so ist der Exponent der in $\frac{E_3(z)}{E_2(z)}$ enthaltenen Potenz von $z-\alpha$ gleich

$$\frac{\mathfrak{d}}{2} - m\left(\mathfrak{a}, \frac{2}{3}\mathfrak{b}\right),$$

wo $m\left(\mathfrak{a}, \frac{2}{3}\mathfrak{b}\right)$ die kleinere der beiden Zahlen $\mathfrak{a}$ und $\frac{2}{3}\mathfrak{b}$ bedeutet. Der Nenner dieses Bruches entscheidet also darüber, ob in dem betrachteten Punkte alle drei oder nur zwei Blätter der Riemannschen Fläche zusammenhängen, oder ob alle Blätter getrennt verlaufen. Ist nun zuerst $\frac{\mathfrak{a}}{2} \gtrless \frac{\mathfrak{b}}{3}$, so ist $\Delta = 4a^3 + 27b^2$ genau durch die kleinere der in a^3 und b^2 enthaltenen Potenzen von $z-\alpha$ teilbar, d. h. es ist $\mathfrak{d} = m(3\mathfrak{a}, 2\mathfrak{b})$; also wird in diesem Falle die Verzweigung durch den Nenner von

$$m\left(\frac{3}{2}\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\right) - m\left(\mathfrak{a}, \frac{2}{3}\mathfrak{b}\right) = m\left(\frac{\mathfrak{a}}{2}, \frac{\mathfrak{b}}{3}\right),$$

d. h. durch den Nenner des kleineren der beiden Brüche $\frac{\mathfrak{a}}{2}$ und $\frac{\mathfrak{b}}{3}$ bestimmt. Ist dagegen $\frac{\mathfrak{a}}{2} = \frac{\mathfrak{b}}{3}$, also $3\mathfrak{a} = 2\mathfrak{b}$, so müssen sich jene beiden Brüche, da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ganze Zahlen sind, selbst auf ganze Zahlen reduzieren, es kann also in dem Bruche $\frac{\mathfrak{d}}{2} - m\left(\mathfrak{a}, \frac{2}{3}\mathfrak{b}\right)$ die ganze Zahl $m\left(\mathfrak{a}, \frac{2}{3}\mathfrak{b}\right)$ einfach fortgelassen werden; in diesem Falle wird demnach die Frage durch den Nenner von $\frac{\mathfrak{d}}{2}$ entschieden. Wir erhalten also das einfache Resultat:

Besitzen in der kubischen Gleichung

$$\eta^3 + a(z)\eta + b(z) = 0$$

die Koeffizienten $a(z)$, $b(z)$ und die Diskriminante

$$\Delta(z) = 4a^3 + 27b^2$$

für eine Stelle $(z=\alpha)$ bzw. die Ordnungszahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$, und ist

$$\frac{\mathfrak{a}}{2} \gtrless \frac{\mathfrak{b}}{3},$$

so wird die Verzweigung im Punkte $(z=\alpha)$ durch den Nenner des kleineren von jenen beiden Brüchen so bestimmt, daſs er angiebt, wie viele unter jenen drei Blättern dort zusammenhängen; ist dagegen

$$\frac{\mathfrak{a}}{2} = \frac{\mathfrak{b}}{3},$$

so wird dieselbe Frage durch den Nenner von $\frac{\mathfrak{d}}{2}$ entschieden.

Ist der betrachtete Punkt speziell $(z=\infty)$, so besitzen a, b und Δ die Ordnungszahlen $-\mathfrak{a}'$, $-\mathfrak{b}'$, $-\mathfrak{d}'$, wenn $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{d}'$ die Grade jener rationalen Funktionen in Bezug auf z bedeuten. Es ergiebt sich hier der folgende spezielle Satz:

> Sind in der kubischen Gleichung
> $$\eta^3 + a\eta + b = 0$$
> die Koeffizienten a, b und die Diskriminante Δ rationale Funktionen von z bzw. von dem Grade $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{d}'$, so wird die Verzweigung im Punkte $(z=\infty)$ durch den Nenner des gröfseren der beiden Brüche $\frac{\mathfrak{a}'}{2}$ und $\frac{\mathfrak{b}'}{3}$, falls aber $\frac{\mathfrak{a}'}{2} = \frac{\mathfrak{b}'}{3}$, durch den Nenner von $\frac{\mathfrak{d}'}{2}$ so bestimmt, dafs er angiebt, wie viele Blätter jener Fläche hier zusammenhängen.

Sind also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ die Ordnungszahlen von $a(z)$, $b(z)$, $\Delta(z)$ für die Stelle $(z=\alpha)$, so entspricht jener Stelle

I. ein dreiblättriger Verweigungspunkt, wenn
$$\frac{\mathfrak{b}}{3} < \frac{\mathfrak{a}}{2} \quad \text{und zugleich } \mathfrak{b} = 3n \pm 1,$$

II. ein zweiblättriger Verzweigungspunkt und ein regulärer Punkt, wenn
$$\frac{\mathfrak{a}}{2} < \frac{\mathfrak{b}}{3} \quad \text{und zugleich } \mathfrak{a} \text{ ungerade},$$
oder wenn
$$\frac{\mathfrak{a}}{2} = \frac{\mathfrak{b}}{3} \quad \text{und zugleich } \mathfrak{d} \text{ ungerade};$$

III. drei reguläre Punkte, wenn
$$\frac{\mathfrak{b}}{3} < \frac{\mathfrak{a}}{2} \quad \text{und zugleich } \mathfrak{b} = 3n,$$
oder wenn
$$\frac{\mathfrak{a}}{2} < \frac{\mathfrak{b}}{3} \quad \text{und zugleich } \mathfrak{a} \text{ gerade},$$
oder endlich wenn
$$\frac{\mathfrak{a}}{2} = \frac{\mathfrak{b}}{3} \quad \text{und zugleich } \mathfrak{d} \text{ gerade}$$
ist.

So ist z. B. für die kubische Gleichung
$$\eta^3 - 3(z^6 - z^7)\eta + 2(z^9 - z^{11}) = 0$$
$\mathfrak{a}' = 7$, $\mathfrak{b}' = 11$; also ergiebt der Nenner des Bruches $\frac{11}{3}$, dafs der unendlich ferne Punkt ein dreiblättriger Verzweigungspunkt ist; da nun in diesem Falle $\Delta = (z-1)^2 z^{19}(z+3)$ ist, so wird
$$R\left(\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\left(a, b^{\frac{2}{3}}\right)}\right) = R\left(z^{\frac{7}{2}}(z-1)^{\frac{1}{3}}(z+3)^{\frac{1}{2}}\right) = \left(z(z+3)\right)^{\frac{1}{2}}(z-1)^{\frac{1}{3}},$$

und hieraus in Verbindung mit dem auf S. 199 bewiesenen Satze geht hervor, dafs die Riemannsche Fläche an den beiden Stellen $(z=0)$ und $(z=-3)$ einen zweiblättrigen, an den Stellen $(z=1)$ und $(z=\infty)$ einen dreiblättrigen Verzweigungspunkt besitzt.

§ 5.

Es soll jetzt noch in ähnlicher Weise die allgemeine vierblättrige Riemannsche Fläche untersucht werden, welche durch eine beliebige biquadratische Gleichung für η definiert ist. Diese möge von vornherein von ihrem zweiten Gliede befreit, also in der Form

$$\eta^4 + a\eta^2 + b\eta + c = 0 \tag{1}$$

gegeben sein. Die Gleichungen (1), (3) und (4) des § 2 genügen auch hier, um die vier Determinantenteiler explicite anzugeben; es ist nämlich:

$$\begin{aligned} D(1) &= 1, \\ D(1,\eta) &= \left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{4}}\right) &&= E_2, \\ D(1,\eta,\eta^2) &= \Delta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{f'(\eta_1)}, \frac{1}{f'(\eta_2)}, \frac{1}{f'(\eta_3)}, \frac{1}{f'(\eta_4)}\right) &&= E_2E_3, \\ D(1,\eta,\eta^2,\eta^3) &= \Delta^{\frac{1}{2}} &&= E_2E_3E_4, \end{aligned} \tag{2}$$

wo Δ die Diskriminante der Gleichung für η bedeutet. Man braucht demnach nur noch den gröfsten gemeinsamen Teiler der konjugierten Funktionen $\frac{1}{f'(\eta_i)}$ zu finden; nach dem auf S. 166 ausgesprochenen Satze ist derselbe aber gleich $\left(\mathsf{A}_0, \mathsf{A}^{\frac{1}{2}}, \mathsf{B}^{\frac{1}{3}}, \Gamma^{\frac{1}{4}}\right)$, wenn $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ die elementaren symmetrischen Funktionen der vier konjugierten Funktionen $\frac{1}{f'(\eta_i)}$ bedeuten; und da man durch eine leichte Rechnung erhält:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_0 &= \sum_i \frac{1}{f'(\eta_i)} = 0, \\ \mathsf{A} &= \sum_{i,k} \frac{1}{f'(\eta_i)f'(\eta_k)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{r,m} f'(\eta_l)f'(\eta_m) = \frac{2}{\Delta}(2a^3 + 9b^2 - 8ac), \\ \mathsf{B} &= \sum_{i,k,l} \frac{1}{f'(\eta_i)f'(\eta_k)f'(\eta_l)} = \frac{1}{\Delta}\sum_m f'(\eta_m) = -\frac{8b}{\Delta}, \\ \Gamma &= \frac{1}{f'(\eta_1)f'(\eta_2)f'(\eta_3)f'(\eta_4)} = \frac{1}{\Delta}, \end{aligned}$$

so ergiebt sich für $D(1,\eta,\eta^2)$ der Wert

$$D(1,\eta,\eta^2) = \Delta^{\frac{1}{2}}\left(\mathsf{A}^{\frac{1}{2}}, \mathsf{B}^{\frac{1}{3}}, \Gamma^{\frac{1}{4}}\right) = E_2E_3;$$

also ist

$$\frac{1}{E_4} = \frac{E_2E_3}{E_2E_3E_4} = \left(\mathsf{A}^{\frac{1}{2}}, \mathsf{B}^{\frac{1}{3}}, \Gamma^{\frac{1}{4}}\right).$$

Diese Ausdrücke genügen, um die Verzweigung der zugehörigen Riemannschen Fläche an einer beliebigen Stelle $\mathfrak{p}(z=\alpha)$ vollständig zu ergründen. Sollen nämlich zunächst in $\mathfrak{p}$ alle vier oder nur drei Blätter zusammenhängen, so müssen die Reste der in E_2, E_3, E_4 enthaltenen Potenzen des zugehörigen Linearfaktors $z-\alpha$ die Sequenz $\left[\frac{1}{4}\right]$ bzw. $\left[\frac{1}{3}\right]$ bilden, und dies ist dann und nur dann möglich, wenn $z-\alpha$ mindestens in einer der Funktionen E_2 und $\frac{1}{E_4}$ in einer Potenz enthalten ist, deren Nenner in der reduzierten Form gleich vier oder gleich drei ist. Da aber ein solcher Nenner bei den Teilern $\left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{4}}\right)$ und $\left(\mathsf{A}^{\frac{1}{2}}, \mathsf{B}^{\frac{1}{3}}, \Gamma^{\frac{1}{4}}\right)$ nur in der dritten bzw. zweiten von jenen drei Funktionen auftreten kann, so erhält man für einen vierblättrigen bzw. für einen dreiblättrigen Verzweigungspunkt die folgenden Bedingungen:

I. für einen vierblättrigen Verzweigungspunkt:

$$1)\qquad \left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{4}}\right) = c^{\frac{1}{4}} \qquad R\left(c^{\frac{1}{2}}\right) > 1,$$

$$2)\qquad \left(\mathsf{A}^{\frac{1}{2}}, \mathsf{B}^{\frac{1}{3}}, \Gamma^{\frac{1}{4}}\right) = \Gamma^{\frac{1}{4}} \qquad R\left(\Gamma^{\frac{1}{2}}\right) > 1,$$

II. für einen dreiblättrigen Verzweigungspunkt:

$$1)\qquad \left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{4}}\right) = b^{\frac{1}{3}} \qquad R\left(b^{\frac{1}{3}}\right) > 1,$$

$$2)\qquad \left(\mathsf{A}^{\frac{1}{2}}, \mathsf{B}^{\frac{1}{3}}, \Gamma^{\frac{1}{4}}\right) = \mathsf{B}^{\frac{1}{3}} \qquad R\left(\mathsf{B}^{\frac{1}{3}}\right) > 1,$$

in denen die beigefügten Zusätze besagen, dafs die Exponenten der in $c^{\frac{1}{4}}$ ... enthaltenen Potenzen von $z-\alpha$ in der reduzierten Form den Nenner 4 oder 3 haben müssen, und wo von den Bedingungen 1) und 2) immer nur die eine erfüllt zu sein braucht.

Soll dagegen an der Stelle $\mathfrak{p}$ gar kein Verzweigungspunkt vorhanden sein, so müssen die in E_2, E_3, E_4, also auch die in $E_2, \frac{1}{E_4}$, $E_2E_3E_4$ enthaltenen Potenzen von $z-\alpha$ notwendig sämtlich ganzzahlige Exponenten haben. Es ergiebt sich also die Bedingung:

III. für einen regulären Punkt:

$$R\left(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{3}}, c^{\frac{1}{4}}\right) = R\left(\mathsf{A}^{\frac{1}{2}}, \mathsf{B}^{\frac{1}{3}}, \Gamma^{\frac{1}{4}}\right) = R\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right) = 1.$$

In allen übrigen Fällen hat die Riemannsche Fläche in α zweiblättrige Verzweigungspunkte, und zwar zwei übereinander liegende oder nur

einen, je nachdem in den Resten der Exponenten von E_2, E_3, E_4 die Sequenz $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right]$ zweimal oder einmal vorkommt, je nachdem also das Produkt

$$\Delta^{\frac{1}{2}} = E_2 E_3 E_4$$

eine ganzzahlige oder eine gebrochene Potenz von $z - \alpha$ enthält. Es ergiebt sich also als notwendige und hinreichende Bedingung:

IV. für einfache Verzweigungspunkte:

Von den Bedingungen unter I, II, III darf keine einzige erfüllt sein, und zwar erhält man:

1) zwei einfache Verzweigungspunkte für

$$R\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

2) einen einfachen Verzweigungspunkt für

$$R\left(\Delta^{\frac{1}{2}}\right) > 1.$$

Vierzehnte Vorlesung.

Die Ideale des Körpers $K(z, u)$ und ihre einfachsten Eigenschaften. — Die Fundamentalsysteme für ein Ideal. — Transformation einer beliebigen Basis in ein Fundamentalsystem für das Ideal (I). — Folgerungen: Die einem algebraischen Divisor zugeordneten Funktionen des Körpers. — Die charakteristischen Eigenschaften des Fundamentalsystems für ein Ideal und die Bestimmung des zugehörigen Divisors. — Die Determinante eines Fundamentalsystems für ein Ideal. — Der Verzweigungsteiler. — Die ganzen algebraischen Funktionen des Körpers.

§ 1.

Die Fundamentalaufgabe für die ganze Theorie der algebraischen Funktionen kann jetzt folgendermaßen formuliert werden:

Es sei

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

ein beliebiger ganzer oder gebrochener algebraischer Divisor.

I) Es sollen alle diejenigen Funktionen des Körpers $K(z, u)$ gefunden werden, welche durch $\mathfrak{Q}$ teilbar sind; oder, was dasselbe ist, es sollen alle Multipla von $\mathfrak{Q}$ innerhalb $K(z, u)$ angegeben werden.

Sind

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_h$$

die den gleich bezeichneten Primteilern von $\mathfrak{Q}$ entsprechenden Punkte der Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}$, so kann unsere Fundamentalaufgabe offenbar auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es sollen alle Funktionen des Körpers $K(z, u)$ gefunden werden, welche in h beliebig gegebenen Punkten

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_h$$

I) der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ mindestens die Ordnungszahlen

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \dots \lambda_h$$

besitzen und sich im übrigen auf der ganzen Kugelfläche regulär verhalten.

Bei der Lösung dieser Aufgabe kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit vorläufig angenommen werden, daß sich weder einer der Basispunkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_h$, noch auch einer der Verzweigungspunkte

$\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \ldots \mathfrak{B}_d$ der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ an der Stelle $(z = \infty)$ befindet. Sollte dies nämlich nicht der Fall sein, so genügt es offenbar, von vornherein an Stelle von z die Gröfse

$$z' = \frac{1}{z - \alpha_0}$$

als unabhängige Variable einzuführen, so dafs der Stelle $(z = \alpha_0)$ die Stelle $(z' = \infty)$ entspricht, und dann α_0 irgendwie so zu wählen, dafs an der Stelle $(z = \alpha_0)$ keiner jener Punkte $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{B}$ sich befindet. Im folgenden kann und soll daher vorläufig angenommen werden, dafs jene Voraussetzung bereits für die Variable z erfüllt ist.

Das Fundamentalproblem (I) kann nun leicht auf die Lösung der folgenden einfacheren Aufgabe zurückgeführt werden:

Ia) Es sollen alle Funktionen des Körpers $K(z, u)$ gefunden werden, welche in den h im Endlichen liegenden Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_h$ bzw. mindestens die gegebenen Ordnungszahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_h$ besitzen und sonst für alle im Endlichen liegenden Punkte der Kugelfläche regulär sind, während ihre Ordnungszahlen für die n unendlich fernen Punkte beliebig sein können.

Alle diese Funktionen bilden dann einen Bereich (I) oder $I(\mathfrak{Q})$, ein „Ideal" in der Dedekindschen Terminologie. Dieser Bereich ist durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{Q}$ vollständig charakterisiert, aufserdem aber noch durch die Stelle $(z = \infty)$. Schon hieraus geht hervor, dafs der Begriff des Ideals kein dem Körper angehöriger wesentlicher, sondern nur ein, für manche Anwendungen allerdings wichtiger, Hilfsbegriff ist.

Für die einem Bereiche $I(\mathfrak{Q})$ angehörigen Funktionen bestehen offenbar die folgenden Sätze:

1. Sind $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$ irgendwelche Funktionen des Bereiches (I), so gehört auch jede Funktion

$$\eta = u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \cdots + u_r \eta_r$$

demselben Bereiche an, wenn die Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_r$ beliebige, aber ganze rationale Funktionen von z sind. — Da nämlich die ganzen Funktionen $u_i(z)$ für keine im Endlichen liegende Stelle von negativer Ordnung sind, so ist die Funktion η in der Umgebung einer jeden endlichen Stelle durch den Divisor $\mathfrak{Q}$ teilbar, wenn dasselbe für jede der r Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$ gilt.

2. Jede Funktion ζ des Körpers $K(z, u)$ kann mit einer solchen ganzen Funktion $g(z)$ multipliziert werden, dafs das Produkt $\eta = g \cdot \zeta$ zu $I(\mathfrak{Q})$ gehört. — Ist dies nämlich nicht schon für die Funktion ζ

selbst der Fall, so ist ζ nur in einer endlichen Anzahl von endlichen Stellen nicht endlich bzw. von niedrigerer als der verlangten Ordnung, und man kann daher $g(z)$ stets so wählen, dafs das Produkt $\eta = g(z) \cdot \zeta$ dem Bereiche (I) angehört.

3. Aus dem vorigen Satze folgt, dafs man stets ein System von n rational unabhängigen Funktionen $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ des Körpers $K(z, u)$ so wählen kann, dafs sie sämtlich zu (I) gehören. — Denn ist $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ irgend ein solches System, etwa das einfachste $(1, u, u^2, \ldots u^{n-1})$, dessen Elemente nicht sämtlich zu (I) gehören, so kann man dasselbe durch Multiplikation seiner Elemente mit ganzen rationalen Funktionen $g_1, g_2, \ldots g_n$ von z in ein anderes, offenbar ebenfalls unabhängiges System

$$(g_1 \zeta^{(1)}, g_2 \zeta^{(2)}, \ldots g_n \zeta^{(n)}) = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$$

verwandeln, dessen Elemente jenem Bereiche angehören. Alsdann gehört nach dem ersten Satze jede Funktion

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \cdots + u_n \eta^{(n)}$$

zu (I), wenn die Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ beliebige ganze Funktionen von z sind. Bilden also $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$ irgend ein rational unabhängiges System, dessen Elemente sämtlich dem Bereiche (I) angehören, so gehört der ganze durch $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ konstituierte Modul $(\mathfrak{A})$ ebenfalls zu (I).

Es sei nun $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ eine beliebige Basis, deren Elemente sämtlich dem Bereiche (I) angehören, so bildet der durch sie charakterisierte Modul $(\mathfrak{A})$ einen Teilbereich des Ideals (I). Im allgemeinen fallen jene beiden Bereiche nicht zusammen, sondern es giebt Funktionen von (I), welche nicht zu $(\mathfrak{A})$ gehören, welche also, durch die Basis $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ ausgedrückt, in gebrochener Form erscheinen. Man kann aber aus jener Basis stets eine andere $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ von der Art ableiten, dafs diese eine Basis für das ganze Ideal bildet, dafs also der durch $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ repräsentierte Modul mit dem Bereiche (I) identisch ist; eine solche Basis soll ein Fundamentalsystem für (I) genannt werden.

Zum Beweise dieser Behauptung untersuchen wir das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ in der Umgebung irgend einer endlichen Stelle $\mathfrak{p}(z = \alpha)$. Es mögen wieder an jener Stelle die drei Verzweigungspunkte $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \mathfrak{B}_c$ übereinander liegen, und es seien ϱ, σ, τ die Ordnungszahlen, welche alle Funktionen von (I) dort mindestens besitzen müssen; diese Zahlen sind dann entweder gewisse unter den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_h$ oder aber gleich Null, je nachdem der betreffende Verzweigungspunkt zu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_h$ gehört oder nicht.

Dann kann man, wie jetzt gezeigt werden soll, von dem beliebig gegebenen Systeme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ ausgehend, zu einem anderen $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ gelangen, welches als ein Fundamentalsystem für (I) in Bezug auf die Stelle $(z = \alpha)$ bezeichnet werden kann und folgende Eigenschaften besitzt: Es zerfällt entsprechend den drei zu $(z = \alpha)$ gehörigen Verzweigungspunkten $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \mathfrak{P}_c$ in drei Partialsysteme:

$$\zeta_1, \ldots \zeta_a; \quad \zeta_{a+1}, \ldots \zeta_{a+b}; \quad \zeta_{a+b+1}, \ldots \zeta_n.$$

Betrachtet man das erste, zu $\mathfrak{P}_a$ gehörige Partialsystem

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \ldots \zeta_a$$

für sich, so beginnen die Entwickelungen seiner a Elemente in der Umgebung von $\mathfrak{P}_a$ mit

$$(z-\alpha)^{\frac{\varrho}{a}}, \quad (z-\alpha)^{\frac{\varrho+1}{a}}, \ldots (z-\alpha)^{\frac{\varrho+a-1}{a}},$$

besitzen also hier der Reihe nach die Ordnungszahlen

$$\varrho, \qquad \varrho+1, \ldots \quad \varrho+a-1,$$

während in der Umgebung der anderen Punkte $\mathfrak{P}_b$ und $\mathfrak{P}_c$ alle ihre Glieder bis zu einer beliebig hohen Potenz von $z - \alpha$ hin fortfallen, so dafs man in diesem Sinne behaupten kann, dafs ihnen für $\mathfrak{P}_b$ und $\mathfrak{P}_c$ die Ordnungszahl ∞ zukommt. Jenes Fundamentalsystem

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_a; \quad \zeta_{a+1}, \zeta_{a+2}, \ldots \zeta_{a+b}; \quad \zeta_{a+b+1}, \zeta_{a+b+2}, \ldots \zeta_n$$

besitzt also der Reihe nach die Ordnungszahlen:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } \mathfrak{P}_a\text{:} & \varrho, \varrho+1, \ldots \varrho+\alpha-1; & \infty, \infty, \ldots \quad \infty; & \infty, \infty, \ldots \quad \infty; \\
\text{für } \mathfrak{P}_b\text{:} & \infty, \infty, \ldots \quad \infty; & \sigma, \sigma+1, \ldots \sigma+b-1; & \infty, \infty, \ldots \quad \infty; \\
\text{für } \mathfrak{P}_c\text{:} & \infty, \infty, \ldots \quad \infty; & \infty, \infty, \ldots \quad \infty; & \tau, \tau+1, \ldots \tau+c-1.
\end{array}$$

Ein solches System z. B. von a Elementen $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(a)})$, welches in der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{P}_a$ die Ordnungszahlen $\varrho, \varrho+1, \ldots \varrho+a-1$, aber für alle darüber bzw. darunter liegenden Punkte der Riemannschen Fläche die Ordnung ∞ besitzt, soll ein Partialsystem von der Ordnung ϱ für den Punkt $\mathfrak{P}_a$ genannt werden. Mit Hilfe dieser Bezeichnung kann der zu beweisende Satz folgendermafsen ausgesprochen werden:

> Jede zu (I) gehörige Basis $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ kann in eine andere transformiert werden, welche entsprechend den an der betrachteten Stelle $\mathfrak{p}$ übereinander liegenden Punkten $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \mathfrak{P}_c$ in lauter Partialsysteme zerfällt, deren Ordnungen ϱ, σ, τ gleich denen sind, welche die zugehörigen Punkte in dem Bereiche (I) besitzen.

Hierbei ist natürlich z. B. $\varrho = 0$ anzunehmen, wenn der Punkt $\mathfrak{V}_a$ nicht zu den h Punkten $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_h$ gehört.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes braucht man nur zu zeigen, dafs das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ in ein anderes $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ transformiert werden kann, welches nur in der Umgebung eines jener drei Verzweigungspunkte, etwa von $\mathfrak{V}_c$, die verlangten Eigenschaften besitzt, dafs nämlich seine ersten $a + b$ Elemente $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{a+b}$ dort die Ordnungszahl ∞ besitzen, während die c letzten, $\zeta_{a+b+1}, \ldots \zeta_n$, der Reihe nach die Ordnungszahlen $\tau, \tau + 1, \ldots \tau + c - 1$ haben. Ist dieser Beweis nämlich geführt, so kann man das ganze System successive für $\mathfrak{V}_c, \mathfrak{V}_b, \mathfrak{V}_a$ so umformen, dafs es ein Fundamentalsystem für (I) in Bezug auf die Stelle $(z = \alpha)$ wird.

Wir nehmen zunächst an, dafs die Punkte $\mathfrak{V}_a, \mathfrak{V}_b, \mathfrak{V}_c$ so bezeichnet sind, dafs $\frac{\varrho}{a} \leq \frac{\sigma}{b} \leq \frac{\tau}{c}$ ist, und denken uns ferner das System von vornherein so gegeben, dafs es für die Stelle $\mathfrak{p}$ normal ist, was nach den Resultaten der elften Vorlesung stets möglich ist. Das aus den Anfangskoeffizienten gebildete dreizeilige System sei wieder das folgende:

$$\begin{pmatrix} 1, \ 1, \ldots 1\ ; & 0, \ 0, \ldots 0\ ; & 0, 0, \ldots 0 \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_a; & 1, \ 1, \ldots 1\ ; & 0, 0, \ldots 0 \\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_a; & \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_b; & 1, 1, \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Die Exponenten

$$\frac{\tau_0}{c}, \ \frac{\tau_1}{c}, \ldots \frac{\tau_{c-1}}{c}$$

der zugehörigen Teiler der letzten c Elemente

$$\eta^{(a+b+1)}, \quad \eta^{(a+b+2)}, \ldots \eta^{(n)},$$

auf welche es im folgenden allein ankommt, bilden dann ein vollständiges System inkongruenter Brüche mit dem Nenner c, welche alle gleich oder gröfser als $\frac{\tau}{c}$ sind und von vornherein so geordnet vorausgesetzt werden können, dafs sie der Reihe nach den c aufeinander folgenden Brüchen

$$\frac{\tau}{c}, \ \frac{\tau+1}{c}, \ldots \frac{\tau+c-1}{c}$$

kongruent sind, so dafs also allgemein

$$\frac{\tau_i}{c} = \frac{\tau + i}{c} + k_i$$

ist, wo k_i eine ganze nicht negative Zahl bezeichnet. Alsdann bleibt z. B. das zu dem Teiler

$$(z-\alpha)^{\frac{\tau_0}{c}} = (z-\alpha)^{\frac{\tau}{c}+k_0}$$

gehörige Element $\eta^{(a+b+1)}$ in dem Bereiche (I), wenn man dasselbe durch die ganzzahlige Potenz $(z-\alpha)^{k_0}$ dividiert; denn alsdann beginnt es in der Umgebung von $\mathfrak{B}_c$ genau mit der $\frac{\tau}{c}^{\text{ten}}$, bei $\mathfrak{B}_b$ und $\mathfrak{B}_a$ aber mit einer höheren als der $\frac{\tau}{c}^{\text{ten}}$ Potenz von $z-\alpha$, also a fortiori mit einer höheren als der $\frac{\sigma}{b}^{\text{ten}}$ bzw. $\frac{\varrho}{a}^{\text{ten}}$ Potenz, während sein Verhalten für alle anderen endlichen Stellen durch die Division mit $(z-\alpha)^{k_0}$ offenbar in keiner Weise geändert ist. Genau ebenso kann man weiter erreichen, dafs für diese letzten c Elemente die Exponenten der bezüglichen Teiler der Reihe nach die Brüche $\frac{\tau}{c}, \frac{\tau+1}{c}, \ldots \frac{\tau+c-1}{c}$ sind, während sich das System der Anfangskoeffizienten sonst in keiner Weise geändert hat.

Jetzt kann man endlich bewirken, dafs die $a+b$ ersten Elemente in der Umgebung von $\mathfrak{B}_c$ sämtlich die Ordnungszahl ∞ besitzen. In der That, sei etwa t_1 die Ordnungszahl von $\eta^{(1)}$, also

$$\eta^{(1)} = e_1 (z-\alpha)^{\frac{t_1}{c}} + \cdots$$

die Entwickelung von $\eta^{(1)}$ in $\mathfrak{B}_c$, so ist $\frac{t_1}{c}$ gleich oder gröfser als $\frac{\tau}{c}$ und einem Bruche der Reihe $\frac{\tau}{c}, \frac{\tau+1}{c}, \ldots \frac{\tau+c-1}{c}$ kongruent. Ist also z. B. $\frac{t_1}{c} = \frac{\tau+i}{c} + k$, und ersetzt man $\eta^{(1)}$ durch das neue Element

$$\eta^{(1)'} = \eta^{(1)} - e_1 (z-\alpha)^k \cdot \eta^{(a+b+i-1)},$$

so erhält man eine neue Basis $(\eta^{(1)'}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$, wo aber $\eta^{(1)'}$ in $\mathfrak{B}_c$ von einer mindestens um Eins höheren Ordnung als $\eta^{(1)}$ ist, da sich hier das Anfangsglied $e_1 (z-\alpha)^{\frac{t_1}{c}}$ forthebt. Geht man in derselben Weise fort, so kann man successive beliebig viele Glieder in der Entwickelung von $\eta^{(1)}$ in der Umgebung von $\mathfrak{B}_c$ zum Verschwinden bringen und das Gleiche für $\eta^{(2)}, \ldots \eta^{(a+b)}$ erreichen; so erhält man schliefslich ein neues System, dessen $a+b$ erste Elemente in $\mathfrak{B}_c$ in der That von beliebig hoher Ordnung, also von der Ordnung ∞ sind.

Jetzt forme man die $a+b$ ersten Elemente $\overline{\eta}^{(1)}, \overline{\eta}^{(2)}, \ldots \overline{\eta}^{(a+b)}$ des so erhaltenen äquivalenten Systems $(\overline{\eta}^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \overline{\eta}^{(n)})$ so um, dafs dasselbe in der Umgebung der beiden ersten Verzweigungspunkte normal wird, dafs also wieder die Kolonnenteiler mit den Elementarteilern übereinstimmen. Hierbei bleiben die c letzten Elemente unseres Systemes ungeändert, weil seine $a+b$ ersten Elemente vor und nach

jener Umformung in $\mathfrak{B}_c$ die Ordnung ∞ haben. Alsdann reduziere man genau wie vorher die Exponenten $\frac{\sigma_0}{b}, \frac{\sigma_1}{b}, \ldots \frac{\sigma_{b-1}}{b}$ der Teiler von $\bar{\eta}_{a+1}, \bar{\eta}_{a+2}, \ldots \bar{\eta}_{a+b}$ der Reihe nach auf $\frac{\sigma}{b}, \frac{\sigma+1}{b}, \ldots \frac{\sigma+b-1}{b}$, und bewirke dann wieder, daſs sowohl die a ersten als auch die c letzten Elemente die Ordnung ∞ erhalten; und endlich reduziere man in gleicher Weise die Exponenten der Teiler der nunmehrigen a ersten Elemente auf $\frac{\varrho}{a}, \frac{\varrho+1}{a}, \ldots \frac{\varrho+a-1}{a}$ und die Ordnungszahlen der $b+c$ folgenden Elemente in der Umgebung von $\mathfrak{B}_a$ auf ∞. Man erkennt so, daſs auf diesem Wege das ganze System in der verlangten Weise umgeformt wird, da bei keiner jener Umformungen das Ergebnis eines früheren Schrittes vernichtet wird.

§ 2.

Das im vorigen Abschnitte gefundene System

$$\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(a)};\quad \zeta^{(a+1)}, \ldots \zeta^{(a+b)};\quad \zeta^{(a+b+1)}, \ldots \zeta^{(n)}$$

ist zwar noch kein absolutes Fundamentalsystem für das ganze Ideal (I), dagegen kann es als ein solches für diejenigen Primfaktoren bezeichnet werden, welche der bisher betrachteten Stelle $(z=\alpha)$ zugehören. Es seien nämlich $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \mathfrak{P}_c$ die drei Primfaktoren, welche den hier übereinander liegenden Verzweigungspunkten $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \mathfrak{B}_c$ entsprechen, und es seien $\mathfrak{P}_a^\varrho, \mathfrak{P}_b^\sigma, \mathfrak{P}_c^\tau$ diejenigen Potenzen derselben, welche in dem Divisor $\mathfrak{Q}$ enthalten sind. Dann gilt der folgende Satz:

> Eine algebraische Funktion ζ des Körpers $K(z, u)$ enthält dann und nur dann den Divisor
>
> $$\mathfrak{P}_a^\varrho \mathfrak{P}_b^\sigma \mathfrak{P}_c^\tau,$$
>
> wenn sie in der Form
>
> $$\zeta = u_1\zeta^{(1)} + u_2\zeta^{(2)} + \cdots + u_n\zeta^{(n)}$$
>
> mit rationalen Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ darstellbar ist, welche sich in der Umgebung der Stelle $(z=\alpha)$ endlich verhalten, hier also von nicht negativer Ordnung sind.

Da nämlich dieses System $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)}$ ein rational unabhängiges ist, so ist zunächst jede Gröſse des Körpers in der Form

$$\zeta = u_1\zeta^{(1)} + u_2\zeta^{(2)} + \cdots + u_n\zeta^{(n)}$$

mit rationalen Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ darstellbar, und es ist nur noch nachzuweisen, daſs ζ dann und nur dann jenen Divisor $\mathfrak{P}_a^\varrho \mathfrak{P}_b^\sigma \mathfrak{P}_c^\tau$ enthält, wenn die Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ für $(z=\alpha)$ endlich sind.

Ist dies zunächst der Fall, so enthält ζ sicher den genannten Divisor; da nämlich z. B. in Bezug auf $\mathfrak{P}_a$ die Elemente $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(a)}$ die Ordnungszahlen $\varrho, \varrho+1, \ldots \varrho+a-1$ haben, alle folgenden aber die Ordnung ∞, so kann man für die Umgebung jener Stelle

$$\zeta = u_1 \zeta^{(1)} + u_2 \zeta^{(2)} + \cdots + u_a \zeta^{(a)}$$

setzen und diese Summe ist mindestens durch $\mathfrak{P}_a^\varrho$ teilbar, weil alle Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_a$ nicht negative Ordnungszahlen besitzen; wörtlich ebenso wird der Beweis für die übrigen Primfaktoren $\mathfrak{P}_b^\sigma$, $\mathfrak{P}_c^\tau$ geführt.

Wenn aber auch nur einer jener Koeffizienten u_i in Bezug auf die Stelle $(z = \alpha)$ von negativer Ordnung ist, d. h. wenn auch nur einer von ihnen auch nur die erste Potenz von $z - \alpha$ im Nenner enthält, so kann ζ nicht durch $\mathfrak{P}_a^\varrho \mathfrak{P}_b^\sigma \mathfrak{P}_c^\tau$ teilbar sein. In der That könnte man dann die Koeffizienten $u_i(z)$ alle in der Form schreiben:

$$u_i(z) = \frac{c_i + (z-\alpha)\,\overline{u}_i(z)}{z-\alpha} = \frac{c_i}{z-\alpha} + \overline{u}_i(z),$$

wo die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ nicht sämtlich verschwinden und die rationalen Funktionen $\overline{u}_i(z)$ für $z = \alpha$ endlich sind. Dann ist also

$$\zeta = \frac{c_1 \zeta^{(1)} + \cdots + c_n \zeta^{(n)}}{z-\alpha} + (\overline{u}_1 \zeta^{(1)} + \cdots + \overline{u}_n \zeta^{(n)}),$$

und da nach dem ersten Teile unseres Beweises das zweite Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung durch $\mathfrak{P}_a^\varrho \mathfrak{P}_b^\sigma \mathfrak{P}_c^\tau$ teilbar ist, so müſste auch für das erste Glied dasselbe gelten, d. h. es müſste

$$\frac{c_1 \zeta^{(1)} + \cdots + c_n \zeta^{(n)}}{z-\alpha}$$

für sich jenen Divisor enthalten. Nun reduziert sich aber die Entwickelung dieses Bruches für die Stelle $\mathfrak{P}_a$ auf

$$\frac{c_1 \zeta^{(1)} + \cdots + c_a \zeta^{(a)}}{z-\alpha},$$

und dieser Ausdruck ist nur dann durch $\mathfrak{P}_a^\varrho$ teilbar, wenn alle Koeffizienten $c_1, \ldots c_a$ Null sind; wäre dies nämlich nicht der Fall und etwa c_i der erste nicht verschwindende Koeffizient, so lautete die Entwickelung:

$$\frac{c_i \zeta_i + c_{i+1} \zeta_{i+1} + \cdots + c_a \zeta_a}{z-\alpha} = c_i (z-\alpha)^{\frac{\varrho+i-1}{a}-1} + c_{i+1}(z-\alpha)^{\frac{\varrho+i}{a}-1} + \cdots,$$

und das Anfangsglied hebt sich sicher nicht fort, da alle folgenden Elemente $\zeta_{i+1}, \ldots$ von höherer Ordnung als ζ_i sind. Jener Bruch ist also genau durch

$$\mathfrak{P}_a^{\varrho-(a-i+1)},$$

aber nicht durch $\mathfrak{P}_a^\varrho$ teilbar. Damit dies letztere also der Fall sei, müssen die Koeffizienten $c_1, \ldots c_a$ alle Null sein. Genau ebenso zeigt man, dafs alle folgenden Koeffizienten $c_{a+1}, \ldots c_n$ Null sein müssen, damit ζ durch $\mathfrak{P}_b^\sigma$ und $\mathfrak{P}_c^\tau$ teilbar sei, und damit ist die Behauptung in ihrem ganzen Umfange bewiesen.

Wir wollen ein System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für (I) in Bezug auf die Stelle $(z = \alpha)$ nennen, wenn alle und nur die durch $\mathfrak{P}_a^\varrho \mathfrak{P}_b^\sigma \mathfrak{P}_c^\tau$ teilbaren Funktionen η in der Form

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \cdots + u_n \eta^{(n)}$$

dargestellt werden können, wo die Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ für diese Stelle endlich sind.

Dann ergiebt sich zunächst, dafs unser vorher betrachtetes System $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ ein solches Fundamentalsystem ist; man erkennt aber auch ohne weiteres die Richtigkeit des folgenden allgemeinen Satzes:

> Jedes Fundamentalsystem $(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ in Bezug auf die Stelle $(z = \alpha)$ geht aus einem von ihnen, etwa aus dem Fundamentalsysteme $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ durch eine rationale Substitution
>
> 1) $$\eta^{(i)} = \Sigma a_{ik}(z) \zeta^{(k)}$$
>
> hervor, deren Koeffizienten $a_{ik}(z)$ für die Stelle $(z = \alpha)$ endlich sind, und deren Determinante durch $z - \alpha$ nicht teilbar ist.

Soll nämlich jedes Element des Systems $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ durch $\mathfrak{P}_a^\varrho \mathfrak{P}_b^\sigma \mathfrak{P}_c^\tau$ teilbar sein, so müssen alle Funktionen $\eta^{(i)}$ in der obigen Form (1) mit regulären Koeffizienten durch das System $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ darstellbar sein, und ihre Determinante $|a_{ik}|$ darf nicht identisch Null sein, wenn $(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ rational unabhängig sein sollen. Dann ergiebt sich aber durch Auflösung der Gleichungen (1):

$$\zeta^{(k)} = \Sigma a'_{kl}(z) \eta^{(l)},$$

wo die Koeffizienten (a'_{kl}) die Elemente des zu (a_{ik}) reciproken Systems sind, und da die Determinante $|a_{ik}(z)|$ der einzige Nenner jener Elemente $a'_{kl}(z)$ ist, so folgt bekanntlich, dafs diese dann und nur dann ebenfalls endlich sind, wenn diese Determinante den Linearfaktor $z - \alpha$ nicht enthält.

Ist nun $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem des Ideals (I) für die Stelle $(z = \alpha)$, und ist $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)})$ ein beliebiges rational unabhängiges System, dessen Elemente ebenfalls jenem Ideale angehören, so sind, wie oben dargelegt wurde, die Elemente $\xi^{(i)}$ folgendermafsen darstellbar:

$$\xi^{(i)} = \Sigma b_{ik}(z) \zeta^{(k)},$$

wo die Substitutionskoeffizienten b_{ik} ganze Funktionen von z sind, deren Determinante $|b_{ik}|$ dann und nur dann durch $z - \alpha$ nicht teilbar

ist, wenn auch $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(n)})$ ein Fundamentalsystem ist. Da aber die zu jenen beiden Systemen $(\xi^{(i)})$ und $(\zeta^{(i)})$ gehörigen Determinanten $|\xi_i^{(k)}|$ und $|\zeta_i^{(k)}|$ durch die Gleichung

$$|\xi_i^{(k)}| = |\zeta_i^{(k)}|\,|b_{ik}|$$

verbunden sind, so erkennt man, dafs das System $(\xi^{(i)})$ dann und nur dann kein Fundamentalsystem ist, wenn die Ordnung seiner Determinante für $(z = \alpha)$ gröfser ist als die von $|\zeta_i^{(k)}|$. Man kann also die charakteristische Eigenschaft eines Fundamentalsystems auch so aussprechen:

> Ein System $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(n)})$, dessen Elemente sämtlich dem Ideal (I) angehören, ist für eine Stelle $(z = \alpha)$ dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn seine Determinante $|\xi_i^{(k)}|$ für den zugehörigen Linearfaktor $z - \alpha$ von möglichst niedriger Ordnung ist.

Dieser Satz umfafst offenbar auch den Fall, dafs die Determinante verschwindet, dafs also $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(n)})$ überhaupt keine Basis für den Körper $K(z, u)$ bildet; in diesem Falle ist eben $|\xi_i^{(k)}| = 0$, also für jede Stelle von unendlich hoher Ordnung; das Gleiche gilt somit auch für die spezielle Stelle $(z = \alpha)$.

Welches nun jene niedrigste Ordnung ist, können wir jetzt leicht bestimmen, wenn wir das vorher betrachtete spezielle Fundamentalsystem

$$\zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(a)};\quad \zeta^{(a+1)}, \dots \zeta^{(a+b)};\quad \zeta^{(a+b+1)}, \dots \zeta^{(n)}$$

zu Grunde legen.

Zu diesem Zwecke ersetzen wir die n^2 Elemente von $|\zeta_i^{(k)}|$ durch ihre Entwickelungen in der Umgebung der Stellen $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \mathfrak{P}_c$. Hierbei können aber alle diejenigen Elemente einfach durch Null ersetzt werden, deren Ordnung an diesen Stellen unendlich grofs ist. Thun wir dies, so erhalten wir für jene Determinante die folgende einfache Darstellung:

$$1)\qquad |\zeta_i^{(k)}| = \begin{vmatrix} D_a, & 0, & 0 \\ 0, & D_b, & 0 \\ 0, & 0, & D_c \end{vmatrix} = |D_a|\,|D_b|\,|D_c|.$$

Hier bedeuten D_a, D_b, D_c einfach die algebraischen Systeme von bzw. a^2, b^2, c^2 Elementen, welche den drei Partialsystemen

$$\zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(a)};\quad \zeta^{(a+1)}, \dots \zeta^{(a+b)};\quad \zeta^{(a+b+1)}, \dots \zeta^{(n)}$$

bzw. in der Umgebung von $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \mathfrak{P}_c$ entsprechen. So ist z. B.

$$|D_a| = \begin{vmatrix} \zeta_1^{(1)} & \zeta_1^{(2)} & \ldots & \zeta_1^{(a)} \\ \zeta_2^{(1)} & \zeta_2^{(2)} & \ldots & \zeta_2^{(a)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_a^{(1)} & \zeta_a^{(2)} & \ldots & \zeta_a^{(a)} \end{vmatrix}$$

diejenige Determinante a^{ter} Ordnung, welche aus den für $\mathfrak{B}_a$ konjugierten Entwickelungen von $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(a)}$ in der Umgebung dieses Verzweigungspunktes besteht.

Nun beginnen aber die Entwickelungen von

$$\zeta^{(1)}, \quad \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(a)}$$

nebst ihren konjugierten in Beziehung auf den Verzweigungspunkt $\mathfrak{B}_a$ bzw. mit

$$(z-\alpha)^{\frac{\varrho}{a}}, \quad (z-\alpha)^{\frac{\varrho+1}{a}}, \ldots (z-\alpha)^{\frac{\varrho+a-1}{a}}.$$

Hieraus folgt, daſs die Entwickelung von $|D_a|$ mit

$$(z-\alpha)^{\frac{\varrho}{a}+\frac{\varrho+1}{a}+\cdots+\frac{\varrho+a-1}{a}} = (z-\alpha)^{\varrho+\frac{a-1}{2}}$$

beginnt, und dieses Anfangsglied von $|D_a|$ hebt sich nicht etwa fort, denn sein Zahlenkoeffizient ist ja die aus den Anfangsgliedern jener a^2 Reihen gebildete Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{a-1} & \omega_2^{a-1} & \ldots & \omega_a^{a-1} \end{vmatrix},$$

deren absoluter Wert gleich $a^{\frac{a}{2}}$ ist.

Wir nehmen jetzt allgemeiner an, daſs an der Stelle $(z=\alpha)$ nicht bloſs drei, sondern beliebig viele Verzweigungspunkte $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \ldots \mathfrak{B}_d$ übereinander liegen, denen die Primteilerpotenzen $\mathfrak{P}_a^{\lambda}, \mathfrak{P}_b^{\mu}, \ldots \mathfrak{P}_d^{\nu}$ in dem Divisor $\mathfrak{Q}$ von (I) entsprechen. Dann ergiebt sich, daſs die Determinante $|\zeta_i^{(k)}|$ genau durch die Potenz

$$(z-\alpha)^t = \Pi(z-\alpha)^{\lambda+\frac{a-1}{2}} = (z-\alpha)^{\Sigma\left(\lambda+\frac{a-1}{2}\right)}$$

teilbar ist, wo sich das Produkt auf alle zu $(z=\alpha)$ gehörigen Primfaktoren $\mathfrak{P}$ bezieht, wo ferner λ den Exponenten von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$ und $a-1$ die Ordnungszahl des betreffenden Punktes bezeichnet.

§ 3.

Mit Hilfe der im vorigen Abschnitte gefundenen Resultate ist es nunmehr leicht, ein Fundamentalsystem für ein Ideal $I(\mathfrak{Q})$ aufzustellen, welches zu einem beliebigen Divisor

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

gehört. Es sei nämlich $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)})$ ein beliebiges System rational unabhängiger Funktionen des Ideals $I(\mathfrak{Q})$. Bilden wir dann die Determinante $|\xi_i^{(k)}|$, so enthält dieselbe einen beliebigen Linearfaktor $z - \alpha$ in einer Potenz, deren Exponent gleich oder gröfser als $t = \Sigma\left(\lambda + \frac{a-1}{2}\right)$ ist. Nur für eine endliche Anzahl von Stellen ist aber diese Zahl t von Null verschieden, denn $\Sigma\lambda$ ist nur für diejenigen Primfaktoren $\gtrless 0$, welche in dem Divisor $\mathfrak{Q}$ vorkommen, und $\Sigma\frac{a-1}{2}$ verschwindet nur für diejenigen Stellen nicht, denen Verzweigungspunkte entsprechen. Da ferner die Determinante $|\xi_i^{(k)}|$ ebenfalls nur für eine endliche Anzahl von Stellen eine von Null verschiedene Ordnung besitzt, so giebt es auch nur eine endliche Anzahl von Stellen

$$z = \alpha, \quad z = \alpha', \ldots z = \alpha^{(\nu)},$$

für welche die Ordnungszahl von $|\xi_i^{(k)}|$ gröfser ist als die bezügliche Zahl

$$t, \qquad t', \ldots \qquad t^{(\nu)},$$

für welche also $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)})$ noch kein Fundamentalsystem für (I) ist.

Wir formen dann jenes System in der oben auseinandergesetzten Weise zunächst in ein anderes um, welches für die Stelle $(z = \alpha)$ ein Fundamentalsystem für (I) ist. Dies geschieht allein durch Addition seiner Elemente und Multiplikation mit ganzen Funktionen von z, und endlich durch Division derselben durch Potenzen des Linearfaktors $z - \alpha$. Durch alle diese Operationen verlassen wir aber den Bereich (I) nicht, und wir erhalten so ein neues System $(\xi^{(1)'}, \xi^{(2)'}, \ldots \xi^{(n)'})$, welches jetzt in Bezug auf $(z = \alpha)$ ein Fundamentalsystem ist und dessen Determinante jeden Linearfaktor aufser $(z - \alpha)$ genau ebenso oft enthält, als die Determinante des ersten Systems. Formen wir nun dieses neue System in ein Fundamentalsystem in Bezug auf die Stelle $(z = \alpha')$ um und fahren so fort, so ergiebt sich nach einer endlichen Anzahl von Transformationen zuletzt ein System

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}),$$

welches in Bezug auf jede Stelle ein Fundamentalsystem für das Ideal (I) ist. Ist also η irgend eine Funktion des Ideals (I), so ist sie durch die Basis $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ in der Form

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \cdots + u_n \eta^{(n)}$$

mit rationalen Funktionen von z als Koeffizienten darstellbar; die Koeffizienten u_i dürfen jetzt aber überhaupt keinen Nenner haben, sie müssen ganze Funktionen sein, denn sie müssen jeder endlichen Stelle $(z = \alpha)$ endlich sein, und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn sie ganze Funktionen von z sind.

Wir benutzen das soeben gefundene Resultat zunächst zur Ableitung eines für das Folgende wichtigen Hilfssatzes: Ist

$$(\eta_1, \ldots \eta_a;\ \eta_{a+1}, \ldots \eta_{a+b};\ \eta_{a+b+1}, \ldots \eta_n)$$

wieder ein Fundamentalsystem für das Ideal (I), welches entsprechend den bei der Stelle $(z = \alpha)$ übereinander liegenden Verzweigungspunkten $\mathfrak{V}_a, \mathfrak{V}_b, \mathfrak{V}_c$ in die drei Partialsysteme bzw. von den Ordnungen ϱ, σ, τ zerfällt, so ist

$$\eta(\alpha) = \eta_1 + \eta_{a+1} + \eta_{a+b+1}$$

eine Funktion des Ideals (I), welche in den konjugierten Punkten $\mathfrak{V}_a, \mathfrak{V}_b, \mathfrak{V}_c$, welche zu $(z = \alpha)$ gehören, genau die Ordnungszahlen ϱ, σ, τ besitzt, welche jenen Punkten in dem Divisor $\mathfrak{Q}$ zukommen, wobei wieder z. B. $\varrho = 0$ zu setzen ist, wenn $\mathfrak{V}_a$ gar nicht in $\mathfrak{Q}$ auftritt u. s. w. So kann man für eine jede Stelle $(z = \alpha)$ der unabhängigen Variabeln innerhalb (I) eine solche zugehörige Funktion $\eta(\alpha)$ berechnen.

Es seien nun allgemeiner

$$(z = \alpha), \quad (z = \beta), \ldots (z = \gamma)$$

alle und nur die Werte der unabhängigen Variabeln, denen überhaupt Primfaktoren von $\mathfrak{Q}$ entsprechen, und es bedeuten

$$\eta(\alpha), \qquad \eta(\beta), \ldots \qquad \eta(\gamma)$$

Funktionen von (I), welche bzw. den Stellen $(\alpha, \beta, \ldots \gamma)$ in dem eben angegebenen Sinne zugehören. Es sei endlich

$$F(z) = (z - \alpha)(z - \beta) \ldots (z - \gamma)$$

das Produkt aller zu jenen Stellen gehörigen Linearfaktoren.

Bilden wir dann die Summe

$$\eta_{\mathfrak{Q}} = \eta(\alpha) \cdot \frac{F(z)}{z - \alpha} + \eta(\beta) \frac{F(z)}{z - \beta} + \cdots + \eta(\gamma) \frac{F(z)}{z - \gamma},$$

so ist $\eta_{\mathfrak{Q}}$ ebenfalls eine Funktion des Ideals (I), welche jeden Primteiler $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{Q}$ genau in der λ_i^{ten} Potenz und keiner höheren enthält. In der That, gehört z. B. $\mathfrak{P}_1$ zu der Stelle $(z = \alpha)$, so ist nach der Voraussetzung $\eta(\alpha)$ in $\mathfrak{P}_1$ genau von der λ_1^{ten} Ordnung, während der Koeffizient $\frac{F(z)}{(z - \alpha)}$ hier von der nullten Ordnung ist. Während also der erste

Summand von $\eta_{\mathfrak{Q}}$ in $\mathfrak{P}_1$ genau die λ_1^{te} Ordnung besitzt, haben alle folgenden hier mindestens die $(\lambda_1+1)^{\text{te}}$ Ordnung, denn die Gröfse $\eta(\beta)$ des Ideals (I) ist z. B. mindestens durch $\mathfrak{P}_1^{\lambda_1}$, $\frac{F(z)}{z-\beta}$ aber durch $z-\alpha$, also sicher durch $\mathfrak{P}_1$ teilbar, und dasselbe gilt für alle übrigen Summanden.

Eine Funktion $\eta_{\mathfrak{Q}}$ des Ideals (I), welche genau durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{Q}$ teilbar, also in jedem der h Punkte $\mathfrak{P}_i$ genau von der λ_i^{ten} Ordnung ist, soll eine zu $\mathfrak{Q}$ zugeordnete Funktion genannt werden. Innerhalb eines beliebigen Ideals (I) kann man also stets solche zugeordnete Funktionen finden.

Aus diesem Satze ziehen wir gleich zwei Folgerungen: Es sei $(z=\alpha)$ eine beliebige endliche, oder aber auch die unendlich ferne Stelle der unabhängigen Variabeln, und es mögen

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\nu$$

die sämtlichen zugehörigen konjugierten Punkte der Riemannschen Fläche sein, welche reguläre oder Verzweigungspunkte sein können. Wählen wir dann

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^0\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3 \ldots \mathfrak{P}_\nu,$$

so ist die zugeordnete Funktion $\eta_{\mathfrak{Q}}$ so beschaffen, dafs sie in $\mathfrak{P}_1$ endlich und von Null verschieden ist, während sie in allen konjugierten Punkten $\mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\nu$ verschwindet. Wählen wir ferner einfach

$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}_1,$$

so verschwindet die zugeordnete Funktion $\eta_{\mathfrak{Q}'}$ in $\mathfrak{P}_1$, und zwar ist sie hier genau von der ersten Ordnung. Es bestehen also die beiden Sätze, welche im folgenden gebraucht werden sollen:

Innerhalb eines Körpers $K(z, u)$ existieren stets Funktionen, welche in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}_1$ endlich und von Null verschieden sind, während sie in allen konjugierten Punkten verschwinden; und ebenso giebt es stets Funktionen, welche in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}_1$ von der ersten und von keiner höheren Ordnung sind.

Diese letzte Eigenschaft besitzt, falls $\mathfrak{P}_1$ kein Verzweigungspunkt ist, natürlich schon der zugehörige Linearfaktor $(z-\alpha)$ bzw. $\frac{1}{z}$; ist dagegen $\mathfrak{P}_1$ ein Verzweigungspunkt, so ist es, wie schon auf S. 144 hervorgehoben wurde, nicht selbstverständlich, dafs unter den in $\mathfrak{P}_1$ verschwindenden Funktionen auch eine existiert, deren Entwickelung in der Umgebung von $\mathfrak{P}_1$ genau mit der ersten Potenz von $(z-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ beginnt.

Ebenso, wie durch einen Divisor $\mathfrak{Q}$ das zugehörige Fundamentalsystem, so ist auch durch ein Fundamentalsystem der zugehörige Divisor $\mathfrak{Q}$ eindeutig bestimmt. In der That ergiebt sich nämlich offenbar aus den Resultaten des vorigen Abschnittes der folgende wichtige Satz:

Ein algebraisches System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ ist dann und nur dann überhaupt ein Fundamentalsystem für ein Ideal (I), wenn es für jede endliche Stelle $(z = \alpha)$ einem anderen äquivalent ist, welches entsprechend den an jener Stelle übereinander liegenden Punkten $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \ldots \mathfrak{B}_c$ der Riemannschen Fläche in lauter Partialsysteme zerfällt.

Ist ferner für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ das zugehörige Partialsystem von der Ordnung λ, so enthält der zu (I) gehörige Divisor $\mathfrak{Q}$ genau die λ^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$, d. h. jener Divisor ist durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{\lambda}$$

vollständig bestimmt; hier braucht das Produkt offenbar nur über diejenigen in endlicher Anzahl vorhandenen Punkte $\mathfrak{P}$ erstreckt zu werden, für welche die Ordnungszahlen λ von Null verschieden sind.

Wir wollen jetzt die soeben gefundenen Eigenschaften des Fundamentalsystems $(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ für einen Divisor $\mathfrak{Q}$ dazu benutzen, um die Determinante

$$D(\mathfrak{Q}) = |\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \ldots \eta_i^{(n)}| \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

des zugehörigen algebraischen Systems zu berechnen. Da ihr Quadrat eine rationale Funktion von z allein ist, so ist diese Aufgabe gelöst, wenn man angeben kann, wie oft ein beliebiger Linearfaktor $z - \alpha$ in $D(\mathfrak{Q})$ enthalten ist. Nun war aber nach § 2 (1) für jede endliche Stelle $\mathfrak{p}$ $(z = \alpha)$

$$D(\mathfrak{Q}) = |D_a| \, |D_b| \ldots |D_c|,$$

wenn $D_a, \ldots D_c$ die Determinanten der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Partialsysteme bedeuten, welche den jener Stelle zugeordneten Punkten $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \ldots \mathfrak{P}_c$ der Fläche $\mathfrak{R}$ entsprechen. Ferner war aber z. B. $|D_a|$ genau durch $(z - \alpha)^{\lambda + \frac{a-1}{2}}$ teilbar, wenn der zugehörige Punkt $\mathfrak{P}$ ein a-blättriger Verzweigungspunkt von $\mathfrak{R}$, und der ihm entsprechende Primfaktor ein λ-facher Teiler von $\mathfrak{Q}$ ist, und diese Gleichung bleibt auch dann richtig, wenn $a = 1$, oder wenn $\lambda = 0$ ist. Also folgt für $D(\mathfrak{Q})$ die einfache und elegante Gleichung

$$D(\mathfrak{Q}) = \prod_{(\mathfrak{P})} (z - \alpha)^{\lambda + \frac{a-1}{2}}$$

oder

$$(D(\mathfrak{Q}))^2 = |\eta_i^{(k)}|^2 = (\Pi(z-\alpha)^{\lambda})^2 \cdot \Pi(z-\alpha)^{a-1},$$

wo das Produkt zunächst auf alle endlichen Punkte der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ zu erstrecken ist. Schreibt man aber $D^2(\mathfrak{Q})$ in der Form

1) $$D^2(\mathfrak{Q}) = D_1^2 \cdot D_2,$$

wo die beiden rationalen Funktionen $D_1(z)$ und $D_2(z)$ durch die Gleichungen

1a) $$D_1(z) = \prod_{\mathfrak{P}_i} (z-\alpha)^{\lambda_i}, \quad D_2(z) = \prod_{\mathfrak{P}_a} (z-\alpha)^{a-1}$$

bestimmt sind, so erkennt man, dafs das erste Produkt nur auf alle Primfaktoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_h$ von $\mathfrak{Q}$ erstreckt zu werden braucht, da für diese allein λ von Null verschieden ist; das Produkt D_2 braucht dagegen nur auf alle Verzweigungspunkte $\mathfrak{P}_a, \mathfrak{P}_b, \ldots$ bezogen zu werden, da für alle übrigen die Verzweigungsordnung $(a-1)$ gleich Null ist; der erste Faktor hängt also nur von dem Divisor $\mathfrak{Q}$, der zweite nur von der Fläche $\mathfrak{R}$ ab, und ist für jeden Divisor $\mathfrak{Q}$ derselbe.

Diese wichtige Gleichung können wir in sehr eleganter und übersichtlicher Form schreiben, wenn wir die Funktion $D(\mathfrak{Q})$ als Produkt ihrer Primfaktoren darstellen.

Zu diesem Zwecke führen wir einen ganzen algebraischen Divisor ein, welcher nur von der zugehörigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ abhängt und der im folgenden eine sehr wichtige Rolle spielen wird. Unter dem Verzweigungsteiler der Fläche $\mathfrak{R}$ verstehen wir nämlich den Divisor

2) $$\mathfrak{Z} = \Pi \mathfrak{P}_a^{a-1},$$

in welchen jeder Primfaktor $\mathfrak{P}_a$ so oft aufgenommen wird, als seine Verzweigungsordnung $(a-1)$ angiebt; also enthält $\mathfrak{Z}$ alle und nur die Teiler, welchen Verzweigungspunkte entsprechen; insbesondere enthält $\mathfrak{Z}$ bei der hier gemachten Voraussetzung keinen der n regulären unendlich fernen Punkte von $\mathfrak{R}$. Die Ordnung

2a) $$w = \Sigma(a-1)$$

von $\mathfrak{Z}$, also die Summe aller Verzweigungsordnungen für die ganze Fläche nennen wir die Verzweigungszahl von $\mathfrak{R}$.

Schreiben wir nun den zu einem beliebigen Primteiler $\mathfrak{P}$ zugehörigen rationalen Linearfaktor $(z-\alpha)$ in der Form:

$$z - \alpha = \frac{\mathfrak{p}_\alpha}{\mathfrak{p}_\infty} = \frac{Nm(\mathfrak{P})}{\mathfrak{p}_\infty},$$

und beachten dann die auf S. 150 (2) bewiesene Fundamentaleigenschaft der Funktion $Nm(\mathfrak{Q})$, so ergeben sich für $D_1(z)$ und $D_2(z)$ die folgenden Darstellungen:

$$3)\quad D_1(z) = \prod_{(\mathfrak{P}_i)} (z - \alpha)^{\lambda_i} = \prod_{(\mathfrak{P}_i)} \left(\frac{Nm(\mathfrak{P}_i)}{\mathfrak{p}_\infty}\right)^{\lambda_i} = \frac{Nm(\mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h})}{\mathfrak{p}_\infty^q} = \frac{Nm(\mathfrak{Q})}{\mathfrak{p}_\infty^q},$$

wenn $q = \Sigma \lambda_i$ die Ordnung des Divisors $\mathfrak{Q}$ bedeutet, und:

$$3a)\quad D_2(z) = \prod_{(\mathfrak{P}_a)} \left(\frac{Nm(\mathfrak{P}_a)}{\mathfrak{p}_\infty}\right)^{a-1} = \frac{Nm(\Pi \mathfrak{P}_a^{a-1})}{\mathfrak{p}_\infty^w} = \frac{Nm(\mathfrak{Z})}{\mathfrak{p}_\infty^w}.$$

Man erhält also für $D^2(\mathfrak{Q})$ die einfache Gleichung:

$$D^2(\mathfrak{Q}) = |\eta_i^{(k)}|^2 = \frac{Nm(\mathfrak{Q}^2 \mathfrak{Z})}{\mathfrak{p}_\infty^{2q+w}}$$

oder durch Wurzelausziehung

$$4)\quad D(\mathfrak{Q}) = \frac{Nm\left(\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Z}^{\frac{1}{2}}\right)}{\mathfrak{p}_\infty^{q+\frac{w}{2}}}.$$

Wir spezialisieren diese für jeden Divisor $\mathfrak{Q}$ giltige Gleichung für den Fall $\mathfrak{Q} = 1$, wo also das zugehörige Ideal $I(1)$ alle und nur die ganzen algebraischen Funktionen des Körpers, nämlich diejenigen Funktionen ξ umfaſst, welche im Endlichen gar keinen Pol besitzen, sich aber für $(z = \infty)$ ganz beliebig verhalten können. Durch Anwendung des oben beschriebenen Verfahrens kann man auch für dieses Ideal ein Fundamentalsystem finden; es besteht also der Satz:

> Alle ganzen algebraischen Funktionen ξ des Körpers $K(z, u)$ und sie allein werden durch ein rational bestimmbares Fundamentalsystem
>
> $$\xi^{(1)},\quad \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}$$
>
> in der Form
>
> $$\xi = u_1 \xi^{(1)} + u_2 \xi^{(2)} + \cdots + u_n \xi^{(n)}$$
>
> so dargestellt, daſs die Koeffizienten u_i beliebige ganze rationale Funktionen von z sind.

Da in diesem Falle $Nm(\mathfrak{Q}) = Nm(1) = 1$ ist, so ist für das Quadrat der zugehörigen Determinante

$$4a)\quad D(1)^2 = |\xi_i^{(k)}|^2 = \prod_{\mathfrak{P}_a} (z - \alpha)^{a-1} = \frac{Nm(\mathfrak{Z})}{\mathfrak{p}_\infty^w} = D_2(z),$$

wo das Produkt nur über alle Verzweigungspunkte erstreckt zu werden braucht. Substituiert man endlich diesen Wert von $D_2(z)$ in (1) und zieht die Wurzel aus, so erhält man die elegante Gleichung

5) $$\frac{D(\mathfrak{Q})}{D(1)} = D_1(z) = \frac{Nm(\mathfrak{Q})}{\mathfrak{p}_\infty^q}.$$

Zu jedem Divisor $\mathfrak{Q}$, welcher keinen von den n Primfaktoren $\mathfrak{P}^{(\infty)}$ enthält, gehört ein Ideal $I(\mathfrak{Q})$, welches aus allen in dem Sinne durch $\mathfrak{Q}$ teilbaren Funktionen von $K(z, u)$ besteht, daſs ihr Verhalten für $(z = \infty)$ ganz beliebig sein kann. Die Theorie der Ideale stimmt vollständig mit derjenigen der algebraischen Divisoren überein, wenn man dort die n Primfaktoren $\mathfrak{P}_1^{(\infty)}, \mathfrak{P}_2^{(\infty)}, \ldots \mathfrak{P}_n^{(\infty)}$ als Einheiten ansieht. Unter der Norm eines zu einem Divisor $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$ gehörigen Ideales $I(\mathfrak{Q})$ verstehen wir die rationale Funktion von z, welche aus $\mathfrak{Q}$ hervorgeht, wenn man jeden seiner Primteiler $\mathfrak{P}_i$ durch den zugehörigen Linearfaktor $z - \alpha_i$ ersetzt, so daſs also:

$$Nm\,[I(\mathfrak{Q})] = (z - \alpha_1)^{\lambda_1} \ldots (z - \alpha_h)^{\lambda_h}$$

ist. Da andererseits allgemein $z - \alpha_i = \frac{Nm\,(\mathfrak{P}_i)}{\mathfrak{p}_\infty}$ ist, so ergiebt sich zwischen der Norm des Ideals $I(\mathfrak{Q})$ und der Norm des zugehörigen Divisors $\mathfrak{Q}$ die einfache Gleichung:

$$Nm\,[I(\mathfrak{Q})] = \frac{Nm\,(\mathfrak{Q})}{\mathfrak{p}_\infty^q}$$

wenn $q = \Sigma \lambda_i$ die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ ist. Unter Benutzung dieser Bezeichnung kann die Fundamentalgleichung (4) auch einfacher so geschrieben werden:

6) $$D(\mathfrak{Q}) = Nm\left(I(\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Z}^{\frac{1}{2}})\right)$$

Wir werden dem Begriff der Idealnorm in der weiteren Theorie niemals begegnen, dagegen vereinfacht sich in den Anwendungen derselben auf die Geometrie die Darstellung beträchtlich, wenn man ihn hinzuzieht.

Fünfzehnte Vorlesung.

Aufsuchung aller linear unabhängigen Multipla eines gegebenen Divisors. — Folgerungen: Die Verzweigungszahl einer Riemannschen Kugelfläche ist stets eine gerade Zahl. — Die komplementären algebraischen Systeme. — Ihre Grundeigenschaften. — Die Elementarteiler komplementärer Systeme. — Die komplementären Fundamentalsysteme und die zugehörigen komplementären Divisoren. — Anwendungen.

§ 1.

Durch die Ergebnisse des vorigen Abschnittes ist die Aufgabe, alle zu einem beliebigen Ideale $I(\mathfrak{Q})$ gehörigen Funktionen des Körpers zu finden, vollständig gelöst. Will man nun alle Funktionen des Körpers finden, welche Multipla des zu (I) gehörigen Divisors $\mathfrak{Q}$ sind, so hat man nur noch unter den Funktionen von $I(\mathfrak{Q})$ alle diejenigen auszusuchen, welche im Unendlichen endlich bleiben, welche also dort mindestens die Ordnung Null besitzen. Ist nämlich ξ eine solche Funktion, so enthält sie, da sie dem Ideal $I(\mathfrak{Q})$ angehört, jeden Primfaktor von $\mathfrak{Q}$ mindestens so oft wie $\mathfrak{Q}$ selbst und ist für jede andere endliche Stelle ebenfalls endlich; aber sie besitzt auch an keiner der n unendlich fernen Stellen einen Pol, da sie für $(z=\infty)$ von nicht negativer Ordnung ist.

Diese Multipla eines gegebenen Divisors sind für die in der Theorie der algebraischen Funktionen auftretenden Fragen allein wesentlich, während die Moduln und Ideale nur Hilfsbegriffe sind. Die Richtigkeit der letzteren Bemerkung erkennt man leicht daraus, dafs schon bei einer einfachen gebrochenen Substitution $z'=\frac{1}{z-\alpha_0}$ für die unabhängige Variable sowohl die Moduln als auch die Ideale sich vollständig ändern. Ist nämlich z. B. $(z=\alpha_0)$ eine endliche Stelle, der keiner der Punkte von $\mathfrak{Q}$ entspricht, so entspricht der Stelle $(z=\infty)$ die Stelle $(z'=0)$, während für $(z=\alpha_0)$ $(z'=\infty)$ wird. Bei dieser Substitution werden also die Funktionen η des Ideals $I(\mathfrak{Q})$ algebraische Funktionen von z', welche sich für $(z'=\infty)$ endlich verhalten, während sie für $(z'=0)$ in beliebiger Ordnung unendlich werden können. Dagegen werden wir sehen, dafs der Bereich aller Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$

allein von diesem abhängt und bei jeder umkehrbaren Transformation beider Variabeln derselbe bleibt.

Es sei nun ein Fundamentalsystem $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots \zeta^{(n)})$ für das Ideal $I(\mathfrak{Q})$ gegeben, und wir denken uns dasselbe von vornherein so umgeformt, dafs es in Bezug auf die Stelle $(z=\infty)$ normal ist; dann stimmen also in dem zugehörigen algebraischen Systeme

$$\begin{vmatrix} \zeta_1^{(1)} & \zeta_1^{(2)} & \dots & \zeta_1^{(n)} \\ \zeta_2^{(1)} & \zeta_2^{(2)} & \dots & \zeta_2^{(n)} \\ \vdots & & & \\ \zeta_n^{(1)} & \zeta_n^{(2)} & \dots & \zeta_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

die Kolonnenteiler für den unendlich fernen Punkt mit den Elementarteilern überein. Diese Umformung können wir nach dem auf S. 169 ausgesprochenen Satze stets durch eine umkehrbare Transformation mit ganzen rationalen Koeffizienten erreichen; das umgeformte System bleibt also, und das ist für die Folge sehr wichtig, ein Fundamentalsystem für das Ideal $I(\mathfrak{Q})$. Da an der Stelle $(z=\infty)$ nach der Voraussetzung keine Verzweigungspunkte übereinander liegen, so sind die Ordnungszahlen

$$r_1, \quad r_2, \quad \dots r_n$$

jener n Kolonnenteiler ganze Zahlen, welche wieder nach ihrer Gröfse so geordnet sein mögen, dafs $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_n$ ist. Ist dann r_s die letzte nicht negative unter diesen Zahlen, so sind von jenen n Elementen $\zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(s)}, \zeta^{(s+1)}, \dots \zeta^{(n)}$ nur die s ersten Multipla von $\mathfrak{Q}$, die $n-s$ letzten aber nicht mehr, da diese für $(z=\infty)$ von negativer Ordnungszahl, also nicht für alle n unendlich fernen Punkte endlich sind. Aus der Grundeigenschaft der normalen Systeme folgt aber weiter der allgemeine Satz, durch welchen jetzt auch die Hauptfrage (I) a. S. 204 in voller Allgemeinheit gelöst wird:

Alle Multipla des Divisors $\mathfrak{Q}$ und nur sie sind in der Form

$$\zeta = u_1\zeta^{(1)} + u_2\zeta^{(2)} + \cdots + u_s\zeta^{(s)}$$

enthalten, in welcher die Koeffizienten $u_1, \dots u_s$ beliebige ganze Funktionen der unabhängigen Variable z bzw. von den Graden $r_1, r_2, \dots r_s$ sind.

In der That sind ja alle jene Funktionen offenbar Vielfache von $\mathfrak{Q}$, da sie einmal Funktionen von $I(\mathfrak{Q})$ sind und da andererseits ihre Ordnung für die Stelle $(z=\infty)$ gleich oder gröfser als Null ist; ist nämlich

$$u_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}z + \cdots + a_{r_i}^{(i)}z^{r_i}$$

eine beliebige ganze Funktion vom r_i^{ten} oder von niedrigerem Grade in z, so ist ihre Ordnungszahl für $(z = \infty)$ gleich $-r_i$ oder gröfser; also ist in der That die Ordnung eines jeden Produktes $u_i \zeta^{(i)}$ gleich oder gröfser als Null. Wäre aber auch nur einer jener Koeffizienten, etwa u_i, von höherem als dem angegebenen Grade, oder wäre auch nur einer der folgenden Koeffizienten $u_{s+1}, \ldots u_n$ von Null verschieden, so wäre das bezügliche Glied $u_i \zeta_i$, also auch ζ selbst, für $(z = \infty)$ von negativer Ordnung, ζ wäre also sicher kein Vielfaches von $\mathfrak{Q}$.

Bezeichnet man also die

$$N = (r_1 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + (r_s + 1)$$

algebraischen Funktionen

$$\zeta^{(i)}, \quad z\zeta^{(i)}, \quad z^2\zeta^{(i)}, \ldots z^{r_i}\zeta^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

in irgend einer Reihenfolge durch

$$x_1, \quad x_2, \ldots x_N,$$

so bilden diese in der Weise ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$, dafs alle anderen Multipla x eindeutig in der Form

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_N x_N$$

mit konstanten Koeffizienten darstellbar sind.

Das hier erlangte Resultat ist von der bisher gemachten Voraussetzung, dafs sich an der Stelle $(z = \infty)$ keiner der Basispunkte $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_h$ und auch kein Verzweigungspunkt befindet, vollkommen unabhängig. Ist diese Voraussetzung nämlich nicht erfüllt, so braucht man ja nur in der Gleichung $f(u, z) = 0$ an Stelle von z die unabhängige Variable

$$z' = \frac{1}{z - \alpha_0}$$

einzuführen, wenn $(z = \alpha_0)$ irgend eine Stelle ist, für die jene beiden Voraussetzungen erfüllt sind. Dann entspricht wieder der Stelle $(z = \alpha_0)$ die Stelle $(z' = \infty)$. Bildet man dann für diese Variable z' ein Fundamentalsystem $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ des Ideals $I(\mathfrak{Q})$, welches für die Stelle $(z' = \infty)$ oder $(z = \alpha_0)$ normal ist und dessen Ordnungszahlen hier gleich $r_1, \ldots r_s, \ldots r_n$ sind, so erhält man in den N Elementen

$$\zeta^{(i)}, \quad z'\zeta^{(i)}, \quad z'^2\zeta^{(i)}, \ldots z'^{r_i}\zeta^{(i)}$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$ für z' als unabhängige Variable; ersetzt man jetzt also wieder umgekehrt z' durch $\frac{1}{z - \alpha_0}$, so erhält man in den N Elementen

$$\zeta^{(i)} \quad \frac{\zeta^{(i)}}{z-\alpha_0}, \quad \frac{\zeta^{(i)}}{(z-\alpha_0)^2}, \ldots \frac{\zeta^{(i)}}{(z-\alpha_0)^{r_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$ für die unabhängige Variable z, und jene Aufgabe ist somit ohne jede beschränkende Voraussetzung vollständig gelöst.

Wir stellen uns endlich die allgemeinere Aufgabe, alle Multipla von $\mathfrak{Q}$ aufzusuchen, welche in den n zu der regulären Stelle $(z = \alpha_0)$ gehörigen Punkten der Riemannschen Fläche mindestens von der Ordnung λ sind, wo λ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, während man für $\lambda = 0$ den soeben betrachteten Fall wiedererhält; ist $z - \alpha_0 = \frac{\mathfrak{z}_{z-\alpha_0}}{\mathfrak{n}_z}$, wo also der Zähler $\mathfrak{z}_{z-\alpha_0}$ aus den n voneinander verschiedenen Primfaktoren $\mathfrak{P}_1^{(\alpha_0)}, \mathfrak{P}_2^{(\alpha_0)}, \ldots \mathfrak{P}_n^{(\alpha_0)}$ besteht, welche an der regulären Stelle $(z = \alpha_0)$ untereinander liegen, so ist diese Aufgabe identisch mit der folgenden:

Es sollen alle Multipla des Divisors $\mathfrak{Q}\mathfrak{z}_{z-\alpha_0}^{\lambda}$ gefunden werden.

Sind nun in dem vorher betrachteten Systeme $(\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(\sigma)}, \ldots \zeta^{(n)})$ die σ ersten Elemente $\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(\sigma)}$ diejenigen, deren Ordnungszahlen $r_1, \ldots r_\sigma$ für die Stelle $(z = \alpha_0)$ gleich oder gröfser als λ sind, so zeigt man genau ebenso wie früher, dafs die

$$N_\lambda = (r_1 - \lambda + 1) + \cdots + (r_\sigma - \lambda + 1)$$

Elemente

$$\zeta^{(i)}, \quad \frac{\zeta^{(i)}}{z-\alpha_0}, \ldots \frac{\zeta^{(i)}}{(z-\alpha_0)^{r_i-\lambda}} \qquad (i = 1, 2, \ldots \sigma)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}\mathfrak{z}_{z-\alpha_0}^{\lambda}$ repräsentieren.

§ 2.

Wir wollen aus dem erlangten wichtigen Resultate zunächst einige Folgerungen ziehen.

Ist $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für einen beliebigen Divisor $\mathfrak{Q}$, dessen Ordnung gleich q sein möge, und welcher keinen der Primfaktoren $\mathfrak{P}^{(\infty)}$ enthält, und wird der Einfachheit wegen wieder die Stelle $(z = \infty)$ als regulär vorausgesetzt, so besitzt nach (4) a. S. 220 die Determinante

$$D(\mathfrak{Q}) = |\zeta_i^{(k)}| = \frac{Nm\left(\mathfrak{Q}\mathfrak{Z}^{\frac{1}{2}}\right)}{\mathfrak{p}_\infty^{q+\frac{w}{2}}}$$

in Bezug auf den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{p}_\infty$ der einblättrigen Kugelfläche die Ordnungszahl $-\left(q + \frac{w}{2}\right)$, wenn $w = \Sigma(a-1)$ die Ver-

zweigungszahl der Riemannschen Fläche bedeutet; dieselbe Ordnungszahl hat also die algebraische Funktion $\zeta_i^{(\varkappa)}$ in jedem der n zu $\mathfrak{p}_\infty$ gehörigen konjugierten Punkte $\mathfrak{P}_1^{(\varkappa)}, \ldots \mathfrak{P}_n^{(\varkappa)}$ der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, und diese Zahl mufs, da jene Punkte alle regulär sind, also jede Entwickelung nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreitet, notwendig selbst ganz sein. Da nun q ebenfalls ganz ist, so ergiebt sich dasselbe auch für $\frac{w}{2}$, es folgt also das wichtige Theorem:

Die Verzweigungszahl

$$w = \Sigma(a-1)$$

einer jeden Riemannschen Kugelfläche ist stets eine gerade Zahl.

Dieser Satz ist selbstverständlich unabhängig davon, dafs die Stelle $(z = \infty)$ regulär ist. Ein spezieller Fall dieses Theoremes ist der auf S. 197 bewiesene Satz, dafs die Anzahl der Verzweigungspunkte jeder zweiblättrigen Riemannschen Fläche stets gerade ist. Es bleibe dem Leser überlassen, denselben Satz direkt mit den im § 4 und § 5 der dreizehnten Vorlesung gegebenen Hilfsmitteln für die drei- und vierblättrigen Flächen, sowie auch für diejenigen Kugelflächen zu beweisen, welche den binomischen Gleichungen entsprechen.

Es sei das System $(\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(n)})$ wieder normal in Bezug auf die unendlich ferne Stelle, und es mögen

$$r_1, \quad r_2, \ldots r_n$$

die Ordnungszahlen seiner Kolonnenteiler für jene Stelle sein; dann sind dieselben ganze Zahlen, und ihre Summe ist n. S. 167 gleich der Ordnungszahl von $D(\mathfrak{Q})$ für jene Stelle, also gleich $-\left(q+\frac{w}{2}\right)$; hieraus erhalten wir also die elegante Gleichung

$$1) \qquad -\frac{w}{2} = q + r_1 + r_2 + \cdots + r_n,$$

welche wir später benutzen werden.

§ 3.

Zu jedem Systeme von n^2 Elementen mit nicht verschwindender Determinante,

$$(\eta_i) = \begin{Bmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \ldots & \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} & \ldots & \eta_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n^{(1)} & \eta_n^{(2)} & \ldots & \eta_n^{(n)} \end{Bmatrix},$$

gehört, wie bereits auf S. 133 ausgeführt wurde, ein anderes, das sogenannte **komplementäre System**

$$(\breve{\eta}) = \begin{pmatrix} \breve{\eta}_1^{(1)} & \breve{\eta}_1^{(2)} & \dots & \breve{\eta}_1^{(n)} \\ \breve{\eta}_2^{(1)} & \breve{\eta}_2^{(2)} & \dots & \breve{\eta}_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \breve{\eta}_n^{(1)} & \breve{\eta}_n^{(2)} & \dots & \breve{\eta}_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

welches aus dem zu (η) reciproken Systeme (η') einfach durch Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihen hervorging. Für dieses komplementäre System ist also z. B.

$$1) \qquad \breve{\eta}_1^{(1)} = \frac{H_1^{(1)}}{H} = \begin{vmatrix} \eta_2^{(2)} & \dots & \eta_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n^{(2)} & \dots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \dots & \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} & \dots & \eta_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n^{(1)} & \eta_n^{(2)} & \dots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

und allgemein

$$1a) \qquad \breve{\eta}_i^{(k)} = \frac{H_i^{(k)}}{H},$$

wo H die Determinante des Systems (η) und $H_i^{(k)}$ diejenige Unterdeterminante von H bezeichnet, welche aus H durch Weglassung der i^{ten} Zeile und k^{ten} Kolonne entsteht. Aus dieser Definition ergeben sich sofort die folgenden Fundamentaleigenschaften der komplementären Systeme:

> I. Ist (η), wie bisher angenommen wurde, ein algebraisches System von z und u, dessen n Zeilen also aus seiner ersten durch Vertauschung von u_1 mit $u_2, \dots u_n$ hervorgehen, so gilt dasselbe von dem komplementären Systeme.

In der That folgt zunächst aus der Gleichung (1), dafs $\breve{\eta}_1^{(1)}$ z. B. eine rationale Funktion von $u_1, u_2, \dots u_n$ ist, welche aber in $u_2, \dots u_n$ symmetrisch ist, mithin rational durch u_1 allein dargestellt werden kann. Vertauscht man hier nämlich etwa u_{n-1} mit u_n, so vertauschen sich sowohl in $H_1^{(1)}$ als auch in H die beiden letzten Horizontalreihen; also bleibt $\breve{\eta}_1^{(1)}$ bei dieser und ebenso auch bei jeder anderen Transposition von $u_2, \dots u_n$ ungeändert, d. h. es ist symmetrisch in $u_2, u_3, \dots u_n$, ist also wirklich rational von u_1 allein abhängig.

Vertauscht man aber etwa u_1 mit u_2, so vertauschen sich in dem ursprünglichen Systeme (η), also auch in dem komplementären Systeme $(\breve{\eta})$, nur die zweite und die erste Zeile, es geht also bei dieser Vertauschung z. B. $\breve{\eta}_1^{(1)}$ in $\breve{\eta}_2^{(1)}$ über u. s. w.; unsere Behauptung ist daher in allen ihren Teilen bewiesen.

Ist also $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ irgend ein rational unabhängiges System des Körpers $K(z, u)$, so existiert ein zu ihm komplementäres System $(\breve{\eta}^{(1)}, \breve{\eta}^{(2)}, \dots \breve{\eta}^{(n)})$ desselben Körpers, welches auf dem soeben angegebenen

Wege stets gefunden werden kann. Sind $|\eta|$ und $|\breve{\eta}|$ die Determinanten komplementärer Systeme, so war

$$|\eta| \cdot |\breve{\eta}| = 1;$$

ebenso leicht erkannten wir, dafs, wenn $(\breve{\eta})$ komplementär zu (η) ist, auch umgekehrt (η) das komplementäre System zu $(\breve{\eta})$ ist.

Geht das System $(\eta^{(1)}, \dots \eta^{(n)})$ durch die Substitution (a_{ik}) von nicht verschwindender Determinante in das System $(\zeta^{(1)}, \dots \zeta^{(n)})$ über, so besteht zwischen den zugehörigen algebraischen Matrizen die Gleichung

$$(\eta_i^{(k)})(a_{ik}) = (\zeta_i^{(k)}).$$

Durch Übergang zu den komplementären Systemen ergiebt sich aber nach dem auf S. 133 bewiesenen Satze (4) aus dieser Gleichung die folgende:

$$2) \qquad (\breve{\eta}_i^{(k)})(\breve{a}_{ik}) = (\breve{\zeta}_i^{(k)}),$$

d. h. es besteht der Satz:

> II. Geht das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ durch eine beliebige Transformation (a_{ik}) von nicht verschwindender Determinante in ein anderes $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots \zeta^{(n)})$ über, so geht das komplementäre System $(\breve{\eta}^{(1)}, \dots \breve{\eta}^{(n)})$ durch die komplementäre Transformation $(\breve{a}_{ik})$ in das komplementäre $(\breve{\zeta}^{(1)}, \dots \breve{\zeta}^{(n)})$ über.

Ist also speziell (η) äquivalent (ζ), so gilt das Gleiche von $(\breve{\eta})$ und $(\breve{\zeta})$.

> III. Ist das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)})$ für irgend eine Stelle, z. B. für $(z = \alpha)$, normal, so gilt dasselbe von dem komplementären $(\breve{\eta}^{(1)}, \breve{\eta}^{(2)}, \dots \breve{\eta}^{(n)})$. Sind dann ferner $r_1, r_2, \dots r_n$ die Exponenten der Kolonnenteiler von $(\eta_i^{(k)})$ für diese Stelle, so sind die entsprechenden Exponenten für das komplementäre System bzw. gleich $-r_1, -r_2, \dots -r_n$.

Ersetzt man nämlich z. B. in dem Ausdrucke (1) von $\breve{\eta}_1^{(1)}$ die n^2 Elemente $\eta_i^{(k)}$ durch ihre Entwickelungen nach Potenzen von $z - \alpha$, und beachtet dabei, dafs alle Elemente $\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}, \dots \eta_n^{(i)}$ einer und derselben Kolonne in der Form $(z-\alpha)^{r_i} G(z|\alpha)$ geschrieben werden können, weil $\eta^{(i)}$ nach der Voraussetzung für die Stelle $(z = \alpha)$ den Teiler $(z - \alpha)^{r_i}$ besitzt, so erkennt man, dafs die Determinante $\mathsf{H}_1^{(1)}$ im Zähler von $\breve{\eta}_1^{(1)}$ mindestens die $(r_2 + r_3 + \dots + r_n)^{\text{te}}$ Potenz von $z - \alpha$ enthält, während die Determinante H im Nenner genau die $(r_1 + r_2 + \dots + r_n)^{\text{te}}$ Potenz enthält, weil das System $(\eta_i^{(k)})$ für jene Stelle normal ist. Also beginnt der Quotient $\breve{\eta}_1^{(1)} = \frac{\mathsf{H}_1^{(1)}}{\mathsf{H}}$ mindestens mit $(z - \alpha)^{-r_1}$, und das Entsprechende beweist man von den konjugierten Elementen $\eta_2^{(1)}, \dots \eta_n^{(1)}$; es zeigt sich also, dafs die Teiler von $\breve{\eta}^{(1)}, \breve{\eta}^{(2)}, \dots \breve{\eta}^{(n)}$ für

jene Stelle mindestens die Exponenten $-r_1, -r_2, \ldots -r_n$ haben. Die Ordnungszahl der Determinante $|\check{\eta}|$ des komplementären Systems ist demnach mindestens gleich

$$-(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$$

und könnte nur dann gröfser als diese Zahl sein, wenn wenigstens eines der Elemente $\check{\eta}^{(i)}$ eine höhere Potenz als $(z-\alpha)^{-r_i}$ als Teiler enthielte. Da aber $|\check{\eta}| = \frac{1}{|\eta|}$ ist, so ist $\check{\eta}$ genau von der $-(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)^{\text{ten}}$ und nicht von höherer Ordnung; unsere Behauptung ist daher vollständig bewiesen.

Denkt man sich in dem normalen Systeme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ die Elemente so geordnet, dafs in den Kolonnenteilern $(z-\alpha)^{r_1}, \ldots (z-\alpha)^{r_n}$ die Exponenten eine aufsteigende Reihe bilden, so sind sie der Reihe nach der erste, zweite, ... n^{te} Elementarteiler der Matrix $(\eta_i^{(k)})$ für jene Stelle. Dann bilden aber in den Kolonnenteilern

$$(z-\alpha)^{-r_1}, (z-\alpha)^{-r_2}, \ldots (z-\alpha)^{-r_n}$$

des komplementären Systems die Exponenten eine absteigende Reihe; also sind die Potenzen

$$(z-\alpha)^{-r_n}, (z-\alpha)^{-r_{n-1}}, \ldots (z-\alpha)^{-r_1}$$

bzw. der erste, zweite, ... n^{te} Elementarteiler des komplementären Systems. Da dasselbe aber für jede endliche und die unendlich ferne Stelle der Fall ist, so ergiebt sich der Satz:

IIIa. Sind

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots E_n$$

der erste, zweite, ... n^{te} Elementarteiler eines beliebigen algebraischen Systems, so sind

$$\frac{1}{E_n}, \frac{1}{E_{n-1}}, \ldots \frac{1}{E_1}$$

die Elementarteiler des komplementären Systems. Dieselben sind also die reciproken Elementarteiler des ursprünglichen Systems in umgekehrter Reihenfolge.

Natürlich gilt derselbe Satz für die Elementarteiler reciproker Systeme, da bei der Vertauschung der Zeilen und Kolonnen diese Teiler nicht geändert werden.

IV. Ist das System (η) so beschaffen, dafs es für eine Stelle $(z = \alpha)$ entsprechend den dort vorhandenen Verzweigungspunkten $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \ldots \mathfrak{B}_c$ in Partialsysteme zerfällt, so gilt das

Gleiche auch von dem komplementären Systeme. Ist ferner z. B. das zu $\mathfrak{B}_a$ gehörende Partialsystem von (η) von der Ordnung ϱ, so besitzt das komplementäre Partialsystem die Ordnung $\bar{\varrho} = -(\varrho + a - 1)$, d. h. es besteht die Gleichung

$$3) \qquad \varrho + \bar{\varrho} = -(a-1).$$

Der erste Teil unserer Behauptung folgt aus dem auf S. 132 bewiesenen Satze der Determinantentheorie, daſs, wenn eine Matrix von n^2 Elementen z. B. in drei Partialsysteme bzw. von a^2, b^2, c^2 Elementen zerfällt, wenn es also die Form hat:

$$\begin{pmatrix} A, & 0, & 0 \\ 0, & B, & 0 \\ 0, & 0, & C \end{pmatrix},$$

dann die reciproke und somit auch die komplementäre Matrix in gleicher Weise zerfällt, und zwar so, daſs jedes Partialsystem derselben einfach zu dem entsprechenden Partialsysteme der ersten Matrix reciprok bzw. komplementär ist.

Zweitens ist aber unter der oben gemachten Voraussetzung das System für die Stelle $(z = a)$ normal, und die Exponenten $r_1, r_2, \dots r_n$ der Teiler seiner Elemente

$$\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(a)}; \quad \eta^{(a+1)}, \eta^{(a+2)}, \dots \eta^{(a+b)}; \quad \eta^{(a+b+1)}, \eta^{(a+b+2)}, \dots \eta^{(n)}$$

sind der Reihe nach

$$\frac{\varrho}{a}, \frac{\varrho+1}{a}, \dots \frac{\varrho+a-1}{a}; \quad \frac{\sigma}{b}, \frac{\sigma+1}{b}, \dots \frac{\sigma+b-1}{b}; \quad \frac{\tau}{c}, \frac{\tau+1}{c}, \dots \frac{\tau+c-1}{c}.$$

Nach dem soeben bewiesenen Satze III ist also auch das komplementäre System

$$4) \quad \bar{\eta}^{(1)}, \bar{\eta}^{(2)}, \dots \bar{\eta}^{(a)}; \quad \bar{\eta}^{(a+1)}, \bar{\eta}^{(a+2)}, \dots \bar{\eta}^{(a+b)}; \quad \bar{\eta}^{(a+b+1)}, \bar{\eta}^{(a+b+2)}, \dots \bar{\eta}^{(n)}$$

normal, und die Exponenten der Teiler seiner Elemente sind bzw.

$$4\text{a}) \quad -\frac{\varrho}{a}, -\frac{\varrho+1}{a}, \dots -\frac{\varrho+a-1}{a}; \quad -\frac{\sigma}{b}, -\frac{\sigma+1}{b}, \dots -\frac{\sigma+b-1}{b};$$
$$-\frac{\tau}{c}, -\frac{\tau+1}{c}, \dots -\frac{\tau+c-1}{c}.$$

Daher besitzen die drei Partialsysteme von $(\bar{\eta})$ bzw. die Ordnungszahlen $-(\varrho + a - 1)$, $-(\sigma + b - 1)$, $-(\tau + c - 1)$, da diese aus der Reihe (4a) der Exponenten die kleinsten sind; der obige Satz ist also vollständig bewiesen.

Um nun endlich den Fundamentalsatz über die komplementären Systeme einfach aussprechen zu können, führen wir den schon auf S. 219 benutzten Verzweigungsteiler

$$\mathfrak{Z} = \Pi \mathfrak{P}^{a-1}$$

ein, in welchem jeder Divisor $\mathfrak{P}$ so oft vorkommt, als seine Verzweigungsordnung $a - 1$ angiebt, und welcher also alle und nur die Divisoren enthält, welche Verzweigungspunkten der zugehörigen Riemannschen Fläche entsprechen. Da die Stelle $(z = \infty)$ als regulär vorausgesetzt wird, so enthält $\mathfrak{Z}$ hier nur solche Divisoren, welche endlichen Stellen entsprechen. Wir können nun jenen Satz folgendermaſsen aussprechen:

V. Ist $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für einen beliebigen Divisor $\mathfrak{Q}$, so ist das komplementäre System

$$(\breve{\zeta}^{(1)}, \breve{\zeta}^{(2)}, \ldots \breve{\zeta}^{(n)})$$

ein Fundamentalsystem für denjenigen Divisor $\bar{\mathfrak{Q}}$, welcher mit $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q}\bar{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}}$$

verbunden ist. Zwei solche Divisoren sollen ebenfalls k o m p l e m e n t ä r e T e i l e r genannt werden.

Unserer Voraussetzung zufolge ist nämlich das System

$$(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$$

für jede endliche Stelle $(z = a)$ einem anderen äquivalent, welches entsprechend den dort übereinander liegenden Punkten der Riemannschen Fläche in Partialsysteme zerfällt. Das Gleiche gilt also nach den Sätzen II und IV für das komplementäre System $(\breve{\zeta}^{(1)}, \breve{\zeta}^{(2)}, \ldots \breve{\zeta}^{(n)})$; nach dem auf S. 248 bewiesenen Theoreme ist also auch dieses ein Fundamentalsystem für einen anderen Divisor $\bar{\mathfrak{Q}}$. Sind ferner

$$\mathfrak{Q} = \Pi \mathfrak{P}^{\varrho}, \qquad \bar{\mathfrak{Q}} = \Pi \mathfrak{P}^{\bar{\varrho}}$$

die zu (ζ) und $(\breve{\zeta})$ gehörigen Divisoren, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (3) für ihr Produkt die Relation

$$4) \qquad \mathfrak{Q}\bar{\mathfrak{Q}} = \Pi \mathfrak{P}^{\varrho + \bar{\varrho}} = \Pi \mathfrak{P}^{-(a-1)} = \frac{1}{\mathfrak{Z}},$$

und damit der vollständige Beweis unserer Behauptung.*)

*) Ist die Stelle $(z = \infty)$ nicht regulär, so besteht offenbar zwischen zwei komplementären Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\bar{\mathfrak{Q}}$ ebenfalls die Gleichung (4) mit der Maſsgabe, daſs auf ihrer rechten Seite diejenigen Primteiler aus $\mathfrak{Z}$ fortzulassen sind, welche den unendlich fernen Verzweigungspunkten entsprechen.

Ist z. B. $\mathfrak{Q} = 1$, so bildet das zugehörige System $(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots \zeta^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für alle und nur die ganzen algebraischen Funktionen des Körpers $K(z, u)$. Dann ist also

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{\mathfrak{Z}} = \frac{1}{\Pi \mathfrak{P}_a^{a-1}},$$

d. h. das komplementäre System ist ein Fundamentalsystem für alle und nur die algebraischen Funktionen, welche in jedem im Endlichen liegenden a-blättrigen Verzweigungspunkte mindestens von der $-(a-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, während sie in den unendlich fernen Punkten beliebige positive oder negative Ordnungszahlen besitzen können.

§ 4.

Man kann die Beziehung zwischen zwei komplementären algebraischen Basen

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}) \quad \text{und} \quad (\breve{\eta}^{(1)}, \breve{\eta}^{(2)}, \ldots \breve{\eta}^{(n)})$$

in einer für die Anwendungen sehr bequemen Weise darstellen. Sind jene Basen nämlich komplementär, so ergiebt die Komposition der beiden zugehörigen algebraischen Systeme die Gleichung

$$1) \qquad \begin{pmatrix} \breve{\eta}_1^{(1)} & \breve{\eta}_2^{(1)} & \ldots & \breve{\eta}_n^{(1)} \\ \breve{\eta}_1^{(2)} & \breve{\eta}_2^{(2)} & \ldots & \breve{\eta}_n^{(2)} \\ \vdots & & & \\ \breve{\eta}_1^{(n)} & \breve{\eta}_2^{(n)} & \ldots & \breve{\eta}_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} & \ldots & \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} & \ldots & \eta_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_n^{(1)} & \eta_n^{(2)} & \ldots & \eta_n^{(n)} \end{pmatrix} = (1),$$

denn das System $(\breve{\eta}_i^{(k)})$ entsteht ja aus dem reciproken zu $(\eta_i^{(k)})$ durch Vertauschung der Zeilen und Kolonnen. Also können die n Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen komplementärer Systeme unter Benutzung der auf S. 117 gegebenen Bezeichnung der Spur so geschrieben werden:

$$2) \quad S(\eta^{(i)} \breve{\eta}^{(k)}) = \eta_1^{(i)} \breve{\eta}_1^{(k)} + \eta_2^{(i)} \breve{\eta}_2^{(k)} + \cdots + \eta_n^{(i)} \breve{\eta}_n^{(k)} = \delta_{ik} \quad \begin{pmatrix} \delta_{ik} = 0, \ i \gtrless k \\ \delta_{kk} = 1 \end{pmatrix}.$$

Führen wir also die beiden Linearformen

$$3) \qquad \begin{aligned} w &= v_1 \eta^{(1)} + v_2 \eta^{(2)} + \cdots + v_n \eta^{(n)} \\ \breve{w} &= \breve{v}_1 \breve{\eta}^{(1)} + \breve{v}_2 \breve{\eta}^{(2)} + \cdots + \breve{v}_n \breve{\eta}^{(n)} \end{aligned}$$

mit unbestimmten Koeffizienten v_i, $\breve{v}_k$ ein, so können wir jene n^2 Gleichungen (2) in eine zusammenfassen: Multipliziert man nämlich jede derselben mit dem zugehörigen Produkte $v_i \breve{v}_k$ und addiert sie dann alle, so ergiebt sich

$$S(w\breve{w}) = S[(\Sigma v_i \eta^{(i)})(\Sigma \breve{v}_k \breve{\eta}^{(k)})] = v_1 \breve{v}_1 + v_2 \breve{v}_2 + \cdots + v_n \breve{v}_n,$$

und besteht umgekehrt zwischen den beiden Linearformen w und $\breve{w}$ diese Gleichung, so sind die beiden Systeme $(\eta^{(i)})$ und $(\breve{\eta}^{(i)})$ komplementär,

denn aus jener Gleichung ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung die n^2 Relationen (2).

Zwei Systeme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ und $(\breve{\eta}^{(1)}, \breve{\eta}^{(2)}, \ldots \breve{\eta}^{(n)})$ sind also dann und nur dann komplementär, wenn zwischen den zugehörigen Linearformen w und $\breve{w}$ die Gleichung

$$4)\qquad S(w\breve{w}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \breve{v}_i$$

besteht.

Wir benutzen diese Definition, um zu dem auf S. 188 flg. betrachteten einfachsten Basissysteme

$$5)\qquad 1,\quad \eta,\quad \eta^2, \ldots \eta^{n-1}$$

das komplementäre zu berechnen, wenn η irgend eine Gröfse des Körpers $K(z, u)$ ist, welche durch die irreduktible Gleichung

$$6)\qquad g(\eta, z) = \eta^n + b_{n-1}\eta^{n-1} + \cdots + b_1\eta + b_0 = 0$$

definiert ist. Es seien

$$\eta_1,\quad \eta_2, \ldots \eta_n$$

die n konjugierten Wurzeln dieser Gleichung, und

$$\varphi(t) = v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \cdots + v_{n-1}t^{n-1}$$

eine beliebige ganze Funktion des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von t mit unbestimmten Koeffizienten, so besteht nach der Lagrangeschen Interpolationsformel für ein variables t die Identität

$$7)\qquad \begin{aligned} \varphi(t) = \varphi(\eta_1)\frac{g(t)}{(t-\eta_1)\,g'(\eta_1)} &+ \varphi(\eta_2)\frac{g(t)}{(t-\eta_2)\,g'(\eta_2)} + \cdots \\ &+ \varphi(\eta_n)\frac{g(t)}{(t-\eta_n)\,g'(\eta_n)}, \end{aligned}$$

oder kürzer geschrieben

$$7a)\qquad \varphi(t) = S\left(\varphi(\eta)\,\frac{g(t)}{(t-\eta)\,g'(\eta)}\right).$$

Denkt man sich in dem Quotienten

$$7b)\qquad \begin{aligned} \frac{g(t)}{(t-\eta_1)\,g'(\eta_1)} &= \frac{g(t)-g(\eta_1)}{t-\eta_1}\cdot\frac{1}{g'(\eta_1)} \\ &= \frac{1}{g'(\eta_1)}\left(\frac{t^n-\eta_1^n}{t-\eta_1} + b_{n-1}\frac{t^{n-1}-\eta_1^{n-1}}{t-\eta_1} + \cdots + b_2\frac{t^2-\eta_1^2}{t-\eta_1} + b_1\right) \end{aligned}$$

die Divisionen ausgeführt und die sich ergebende ganze Funktion des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von t nach Potenzen von t geordnet, so möge sich ergeben:

$$8)\qquad \frac{g(t)}{(t-\eta)\,g'(\eta)} = \breve{\eta}^{(0)} + \breve{\eta}^{(1)}t + \cdots + \breve{\eta}^{(n-1)}t^{n-1},$$

wenn η eine der n Wurzeln der Gleichung (6) bedeutet. Substituiert man diesen Wert in die Identität (7a), so kann sie folgendermafsen geschrieben werden:

$$S\,[(\bar{\eta}^{(0)} + \bar{\eta}^{(1)}t + \cdots + \bar{\eta}^{(n-1)}t^{n-1})(r_0 + r_1\eta + \cdots + r_{n-1}\eta^{n-1})]$$
$$= r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots + r_{n-1}t^{n-1},$$

und aus dieser Gleichung folgt mit Hilfe von (4), dafs die beiden Systeme

$$9)\qquad (1,\ \eta,\ \eta^2, \ldots \eta^{n-1})\quad (\bar{\eta}^{(0)},\ \bar{\eta}^{(1)}, \ldots \bar{\eta}^{(n-1)})$$

komplementär sind.

Führt man in (7b) die Division aus, so ergeben sich die folgenden einfachen Gleichungen zur Bestimmung der Elemente $\bar{\eta}^{(0)}, \bar{\eta}^{(1)}, \ldots \bar{\eta}^{(n-1)}$:

$$10)\qquad \begin{aligned} g'(\eta)\bar{\eta}^{(0)} &= \eta^{n-1} + b_{n-1}\eta^{n-2} + b_{n-2}\eta^{n-3} + \cdots + b_1 \\ g'(\eta)\bar{\eta}^{(1)} &= \eta^{n-2} + b_{n-1}\eta^{n-3} + \cdots + b_2 \\ g'(\eta)\bar{\eta}^{(2)} &= \eta^{n-2} + \cdots + b_3 \\ &\vdots \\ g'(\eta)\bar{\eta}^{(n-1)} &= 1. \end{aligned}$$

Als eine einfache Anwendung dieser Betrachtungen zeigen wir jetzt, wie unter Benutzung der komplementären Systeme die direkte Bestimmung der Verzweigung von $\mathfrak{R}$ aus den Elementarteilern

$$E_1(z),\quad E_2(z), \ldots E_n(z)$$

des algebraischen Systems

$$11)\qquad (1,\ \eta_k,\ \eta_k^2, \ldots \eta_k^{n-1})\qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

wesentlich vereinfacht werden kann.

Nach dem auf S. 229 bewiesenen Theoreme IIIa sind nämlich die Elementarteiler des komplementären Systems

$$11\text{a})\qquad (\bar{\eta}_k^{(0)},\ \bar{\eta}_k^{(1)},\ \bar{\eta}_k^{(2)}, \ldots \bar{\eta}_k^{(n-1)})$$

in (9) der Reihe nach bzw. gleich

$$\frac{1}{E_n(z)},\quad \frac{1}{E_{n-1}(z)}, \ldots \frac{1}{E_1(z)};$$

wir können daher zur Bestimmung jener Elementarteiler nach Belieben das System (11) selbst oder das komplementäre System (11a) benutzen. Multipliziert man aber alle Elemente $\bar{\eta}_k^{(h)}$ des komplementären Systems mit $g'(\eta)$, ersetzt sie dann durch ihre Ausdrücke in (10) und schreibt sie in umgekehrter Reihenfolge, so erkennt man ohne weiteres, dafs das so sich ergebende System

$$(1,\ \eta + b_{n-1},\ \eta^2 + b_{n-1}\eta + b_{n-2}, \ldots \eta^{n-1} + b_{n-1}\eta^{n-2} + \cdots + b_1)$$

dem ursprünglichen Systeme

$$(1,\ \eta,\ \eta^2, \ldots \eta^{n-1})$$

äquivalent ist, falls nur die Koeffizienten $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots b_1$ an der betrachteten Stelle von nicht negativer Ordnung sind, ein Fall, auf den der allgemeine ja leicht reduziert werden konnte.

Also ergiebt sich der Satz:

Die Elementarteiler des Systems

$$\left(\frac{1}{g'(\eta)}, \frac{\eta}{g'(\eta)}, \frac{\eta^2}{g'(\eta)}, \dots \frac{\eta^{n-1}}{g'(\eta)}\right)$$

sind den reciproken Elementarteilern des Systems

$$(1, \eta, \eta^2, \dots \eta^{n-1})$$

in umgekehrter Reihenfolge gleich.

Die Determinantenteiler und damit auch die Elementarteiler dieses Systems kann man aber ebenso einfach wie die des Systems

$$(1, \eta, \dots \eta^{n-1})$$

bestimmen; es besteht nämlich auch hier der Satz (s. S. 190):

Der gröfste gemeinsame Teiler aller Determinanten einer beliebigen λ^{ten} Ordnung des vollen Systems $\left(\frac{1}{g'(\eta)}, \frac{\eta}{g'(\eta)}, \dots \frac{\eta^{n-1}}{g'(\eta)}\right)$ von n Elementen stimmt überein mit dem Determinantenteiler gleicher Ordnung des Systems

$$\left(\frac{1}{g'(\eta)}, \frac{\eta}{g'(\eta)}, \dots \frac{\eta^{\lambda-1}}{g'(\eta)}\right), \tag{12}$$

welcher aus jenem durch Weglassung seiner $n-\lambda$ letzten Elemente entsteht.

In der That ist ja jede seiner Determinanten λ^{ter} Ordnung, etwa die folgende:

$$\left|\frac{\eta_i^{r_1}}{g'(\eta_i)} \; \frac{\eta_i^{r_2}}{g'(\eta_i)} \dots \frac{\eta_i^{r_\lambda}}{g'(\eta_i)}\right| = \frac{1}{g'(\eta_1)\dots g'(\eta_\lambda)} \left|\eta_i^{r_1}, \eta_i^{r_2}, \dots \eta_i^{r_\lambda}\right| \qquad (i=1, 2, \dots \lambda),$$

offenbar durch die erste unter ihnen

$$\left|\frac{1}{g'(\eta_i)}, \frac{\eta_i}{g'(\eta_i)}, \dots \frac{\eta_i^{\lambda-1}}{g'(\eta_i)}\right| = \frac{1}{g'(\eta_1)\dots g'(\eta_\lambda)} \left|1, \eta_i, \dots \eta_i^{\lambda-1}\right|$$

teilbar, welche dem obigen Partialsysteme (12) angehört.

So ergeben sich z. B. für die letzten Elementarteiler die folgenden Darstellungen:

$$D_1\left(\frac{1}{g'(\eta)}\right) = \frac{1}{E_n(z)} = \left(\frac{1}{g'(\eta_1)}, \frac{1}{g'(\eta_2)}, \dots \frac{1}{g'(\eta_n)}\right)$$

$$D_2\left(\frac{1}{g'(\eta)}, \frac{\eta}{g'(\eta)}\right) = \frac{1}{E_n(z)\, E_{n-1}(z)} = \left(\frac{1}{g'(\eta)}, \frac{\eta}{g'(\eta)}\right)$$

$$= \left(\dots \frac{\eta_i - \eta_k}{g'(\eta_i)\, g'(\eta_k)} \dots\right)$$

u. s. w., und so können für algebraische Körper höherer Ordnung die letzten Elementarteiler verhältnismäfsig einfach gefunden werden.

Sechzehnte Vorlesung.

Die eindeutige Transformation des Körpers $K(z, u)$ in einen anderen $K(x, y)$ bei beliebiger Annahme der unabhängigen Variabeln. — Die einer Variabeln x zugehörige Riemannsche Kugelfläche $\mathfrak{R}_x$ und ihr Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_x$. — Die Punkte der Flächen $\mathfrak{R}_z$ und $\mathfrak{R}_x$ nebst ihren Umgebungen entsprechen sich eindeutig. — Invariante Definition der Punkte $\mathfrak{P}$, ihrer Umgebung und der Ordnungszahlen. — Alle Kugelflächen $\mathfrak{R}_x$ des Körpers K sind zusammenhängend, die zugehörigen Gleichungen also irreduktibel.

§ 1.

Wir haben bisher den Körper $K(z, u)$ immer als die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von z und u angesehen unter der Voraussetzung, dafs u eine algebraische Funktion der unabhängigen Variabeln z, also mit dieser durch die Gleichung n^{ten} Grades

$$f(u, z) = 0$$

verbunden ist. Wir sahen dann, dafs jede andere Gröfse η jenes Körpers ebenfalls einer Gleichung n^{ten} Grades genügt, deren linke Seite entweder selbst irreduktibel oder die Potenz einer irreduktibeln Funktion von z und η ist, und dafs die Werte aller dieser Gröfsen auf der n-blättrigen Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ genau ebenso eindeutig ausgebreitet waren, wie die rationalen Funktionen von z allein auf der einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$.

In dieser Wahl der unabhängigen Variabeln z liegt aber eine Beschränkung, eine Willkürlichkeit, welche uns die weiteren Untersuchungen wesentlich erschweren würde. Wollten wir gerade diese unabhängige Variable immer beibehalten, so wäre dies ähnlich, wie wenn wir in der analytischen Geometrie alle Untersuchungen unter Zugrundelegung eines und desselben Koordinatensystems durchführen wollten. Die dort gerade betrachtete Kurve oder Fläche kann nämlich eine besondere Lage zu jenem Koordinatensysteme haben, durch welche die Betrachtung in willkürlicher Weise erschwert würde, und bei Veränderung des Koordinatensystems würden alle diese gewissermafsen selbstgeschaffenen Schwierigkeiten mit einem Male fortfallen. Daher ist es in der elementaren analytischen Geometrie eine unerläfsliche Bedingung, dafs man imstande sei, das Koordinatensystem in jedem

einzelnen Falle geeignet zu wählen, es dem Probleme möglichst eng anzupassen. Genau ebenso mufs man in der Theorie der algebraischen Funktionen imstande sein, jede Gröfse des Bereiches $K(z, u)$ als unabhängige Variable zu wählen. Während man dort an Stelle der Koordinaten (ξ, η) eines Punktes der Ebene die Koordinaten (ξ', η') desselben Punktes in Bezug auf ein neues Koordinatensystem einführt, handelt es sich hier darum, anstatt der beiden Gröfsen z und u des Körpers $K(z, u)$ in der allgemeinsten Weise zwei andere Gröfsen x und y desselben Körpers so einzuführen, dafs jede Gröfse ξ von K sowohl durch z und u als auch durch x und y rational ausdrückbar sei, und umgekehrt, dafs also die Körper $K(z, u)$ und $K(x, y)$ einander gleich sind.

Wir hatten bereits früher zwei spezielle Fälle dieser Aufgabe behandelt; einmal führten wir auf S. 205 an Stelle der unabhängigen Variabeln z die andere

$$z' = \frac{1}{z - \alpha_0}$$

ein; dann tritt an die Stelle des Körpers $K(z, u)$ der mit ihm übereinstimmende $K(z', u)$, und statt der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ erhalten wir die ihr Punkt für Punkt eindeutig entsprechende ebenfalls n-blättrige Fläche $\mathfrak{R}_{z'}$. Zweitens hatten wir im § 5 der neunten Vorlesung an Stelle der algebraischen Funktion u eine beliebige andere Gröfse U des Körpers $K(z, u)$ eingeführt und fanden, dafs dann und nur dann $K(z, u) = K(z, U)$ ist, wenn U ebenfalls Wurzel einer irreduktibeln Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Koeffizienten in z ist, während andernfalls $K(z, U)$ ein Unterkörper oder ein Divisor von $K(z, u)$ ist. In diesem Falle kann man also die Gröfse U innerhalb des Körpers $K(z, u)$ zwar nicht ganz willkürlich, wohl aber auf unendlich viele Arten so auswählen, dafs beide Körper identisch werden. Ist $K(z, U) = K(z, u)$, so sind die zugehörigen Riemannschen Flächen identisch.

Wir wollen diese Aufgabe jetzt in ihrem weitesten Umfange lösen; wir beweisen nämlich die Richtigkeit des folgenden wichtigen Satzes:

> Ist x eine beliebige nicht konstante Gröfse des Körpers $K(z, u)$, so kann man stets eine andere Gröfse y desselben Körpers so auswählen, dafs
> $$K(x, y) = K(z, u)$$
> ist.

Wählt man x beliebig, aber ein für allemal fest, und ist zunächst $\bar{y}$ eine beliebige andere Gröfse von $K(z, u)$, so bestehen infolge der Zugehörigkeit von x und $\bar{y}$ zu $K(z, u)$ zwei Gleichungen

$$x = \varphi(z, u), \quad y = \psi(z, u),$$

wo φ und ψ rationale Funktionen ihrer Argumente sind. Ist daher $Y = \Phi(x, \bar{y})$ irgend eine rationale Funktion von x und $\bar{y}$, also irgend eine Gröfse des Körpers $K(x, \bar{y})$, so ist

$$Y = \Phi[\varphi(z, u), \psi(z, u)] = \mathrm{X}(z, u)$$

auch rational durch z und u ausdrückbar; also gehören alle Elemente Y des Körpers $K(x, \bar{y})$ auch zu $K(z, u)$, oder der Körper $K(x, \bar{y})$ ist ein Teiler des Körpers $K(z, u)$. Es kommt also jetzt nur noch darauf an, an Stelle von $\bar{y}$ ein solches Element y von $K(z, u)$ zu wählen, dafs auch umgekehrt nicht nur jedes Element von $K(x, y)$ zu $K(z, u)$, sondern auch jedes Element von $K(z, u)$ zu $K(x, y)$ gehört, dafs also nicht blofs der letzte Körper ein Teiler des ersten, sondern auch der erste ein Teiler des letzten ist.

Offenbar wird dieser Bedingung dann und nur dann genügt, wenn x und y innerhalb $K(z, u)$ so angenommen werden, dafs die beiden Elemente z und u zu $K(x, y)$ gehören. Denn sind z und u rational durch x und y ausdrückbar, so gilt dasselbe von jeder rationalen Funktion von z und u, d. h. von jeder Gröfse des Körpers $K(z, u)$.

Wir beweisen nun den folgenden Satz:

> Ist x eine beliebige Gröfse von $K(z, u)$, so kann man in der linearen Funktion
>
> $$y = az + bu$$
>
> die Koeffizienten a und b auf unendlich viele Arten so bestimmen, dafs $K(x, y) = K(z, u)$ ist.

Es sei x ein beliebiges Element von $K(z, u)$; dann genügt x als Funktion von z einer irreduktibeln Gleichung, deren Grad in x gleich n oder gleich einem Teiler von n ist. Denken wir uns die linke Seite dieser Gleichung nicht nach Potenzen von x, sondern nach Potenzen von z geordnet, so erhalten wir eine Gleichung

$$1) \qquad z^e + b_{e-1}(x) z^{e-1} + \cdots + b_0(x) = 0,$$

aus welcher sich ergiebt, dafs auch umgekehrt z als Funktion von x einer irreduktibeln Gleichung eines bestimmten e^{ten} Grades genügt, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, und die wir genau ebenso behandeln können wie früher die ursprüngliche Gleichung $f(u, z) = 0$. Thun wir dies, so ergiebt sich genau wie früher folgendes Resultat:

> Die Gleichung (1) besitzt stets e Wurzeln
>
> $$z_1, \quad z_2, \ldots z_e,$$
>
> welche in der Umgebung jeder endlichen Stelle $(x = \beta)$ oder der unendlich fernen Stelle $(x = \infty)$ in Reihen entwickelt

werden können; dieselben schreiten im allgemeinen nach ganzen Potenzen und nur für eine endliche Anzahl von Verzweigungsstellen nach gebrochenen Potenzen des bezüglichen Linearfaktors $x - \beta$ bzw. $\frac{1}{x}$ fort und sind sämtlich voneinander verschieden. Eine rationale Funktion von $z_1, z_2, \ldots z_e$, welche bei jedem Umlaufe der unabhängigen Variabeln x ungeändert bleibt, speziell also jede symmetrische Funktion $S(z_1, z_2, \ldots z_e)$ dieser e Wurzeln, ist eine rationale Funktion von x.

Wir betrachten nun neben dieser unabhängigen Variabeln x die neue Gröfse des Körpers $K(z, u)$,

$$w = \lambda z + \mu u,$$

wo λ und μ zunächst noch unbestimmte Parameter bedeuten sollen, deren spätere geeignete Bestimmung wir uns vorbehalten. Dann genügt w als Element des Körpers $K(z, u)$ nebst den konjugierten Gröfsen einer Gleichung n^{ten} Grades

$$2) \qquad \Phi(w, z) = w^n + A_{n-1}(z) w^{n-1} + \cdots + A_0(z) = 0,$$

deren Koeffizienten rationale Funktionen von z sind und aufser z natürlich auch die Parameter λ und μ rational enthalten; aufserdem ist diese Gleichung offenbar für unbestimmte λ und μ irreduktibel, denn zerfiele sie in zwei Faktoren, so müfste dasselbe auch z. B. für $\lambda = 0$, $\mu = 1$ der Fall sein, was unmöglich ist, da ja dann w in u übergeht.

Betrachtet man nun diese Gleichung in der Umgebung irgend einer Stelle $(x = \beta)$ der neuen unabhängigen Variabeln x, ersetzt dann in $\Phi(w, z)$ z nacheinander durch die e Reihen

$$z_1, \quad z_2, \ldots z_e,$$

welche jener Stelle zugehören, und multipliziert die so sich ergebenden e Gleichungen

$$\Phi(w, z_i) = w^n + A_{n-1}(z_i) w^{n-1} + \cdots + A_0(z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots e)$$

miteinander, so ergiebt sich für w eine Gleichung des ne^{ten} Grades

$$3) \qquad \begin{aligned} \Psi(w, x) &= \Phi(w, z_1) \cdot \Phi(w, z_2) \ldots \Phi(w, z_e) \\ &= w^{ne} + B_1(x) w^{ne-1} + \cdots + B_{ne}(x) = 0, \end{aligned}$$

deren Koeffizienten nun offenbar rationale Funktionen von x sind, da ja $\Psi(w, x)$ eine symmetrische Funktion von $z_1, z_2, \ldots z_e$ ist.

Also ist w eine algebraische Funktion von x, und einem jeden Werte $x = \beta$ entsprechen die ne Entwickelungen, welche sich aus den e einzelnen Gleichungen

$$\Phi(w, z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots e)$$

ergeben würden.

In der Umgebung irgend einer Stelle $(x = \beta)$ der neuen unabhängigen Variabeln erhält man durch die früher angewandten Methoden nc Reihen
$$w_1, \quad w_2, \ldots w_{nc},$$
welche nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen von $x - \beta$ fortschreiten und in einer endlichen Umgebung jener Stelle die nc Wurzeln darstellen. Diese Wurzeln brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein; es seien
$$w_1, \quad w_2, \ldots w_\nu$$
diejenigen unter jenen nc Reihen, welche voneinander verschieden sind. Dann zeigt man leicht, dafs jede symmetrische Funktion dieser ν Wurzeln rational von x abhängt. Lässt man nämlich die unabhängige Variable x einen beliebigen Umlauf s machen, und sind $w_1', w_2', \ldots w_\nu'$ die so sich ergebenden Reihen, so sind diese ebenfalls Wurzeln der Gleichung $\Psi(w, x) = 0$, denn bei jenem Umlaufe ändern sich die Koeffizienten $B_i(x)$ der Gleichung $\Psi(w, x) = 0$ gar nicht; ferner sind aber jene neuen Reihen ebenfalls alle voneinander verschieden, denn wäre etwa $w_1' = w_2'$, so bliebe diese Gleichung auch bei dem inversen Umlaufe s^{-1} bestehen, es wäre also entgegen der obigen Annahme auch $w_1 = w_2$. Also ändern die ν Reihen $w_1, \ldots w_\nu$ bei jedem Umlaufe nur ihre Reihenfolge; irgend eine symmetrische Funktion derselben ist also eine rationale Funktion von x, da sie bei jedem Umlaufe dieser Variabeln ungeändert bleibt. Also genügen diese ν Wurzeln für sich einer algebraischen Gleichung
$$\psi(w, x) = (w - w_1) \ldots (w - w_\nu) = w^\nu + C_{\nu-1}(x) w^{\nu-1} + \cdots + C_0(x) = 0$$
des ν^{ten} Grades mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten, deren linke Seite ein Teiler der vorher gefundenen Funktion $\Psi(w, x)$ ist.

Man kann aber diese Gleichung aus der in (3) gefundenen $\Psi(w, x) = 0$ auch ohne Kenntnis ihrer nc Wurzeln ableiten. Die letztere besitzt nämlich dann und nur dann lauter verschiedene Wurzeln, wenn ihre Gleichungsdiskriminante
$$D(\Psi) = \Pi(w_i - w_k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots nc)$$
nicht identisch verschwindet. Ist aber $D(\Psi) = 0$, so hat $\Psi(w, x)$ mit ihrer nach w genommenen Ableitung $\Psi'(w, x)$ einen gemeinsamen Teiler, den wir durch das Euklidische Verfahren bestimmen und dann durch einfache Division beseitigen können. Die so sich ergebende Funktion $\psi(w, x)$ ist dann die linke Seite der gesuchten Gleichung $\psi(w, x) = 0$, deren ν Wurzeln
$$w_i = \lambda z_i + \mu u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$
nun sämtlich voneinander verschieden sind.

Für jede dieser ν Wurzeln w_i ist die Gleichung $\psi(w, x) = 0$ identisch, d. h. für jedes λ, μ erfüllt; ersetzt man nämlich w_i durch $\lambda z_i + \mu u_i$ und entwickelt die linke Seite nach Produkten von Potenzen von λ und μ, so mufs der Koeffizient eines jeden solchen Gliedes $\lambda^g \mu_h$ für sich identisch Null sein. Also bleibt jene Gleichung auch richtig, wenn sie beliebig oft nach λ oder μ differentiiert wird. Differentiiert man aber jene Gleichung

$$\psi(w, x) = 0 \qquad (w = \lambda z + \mu u)$$

das eine Mal nach λ, das andere Mal nach μ, und bedenkt dabei, dafs

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = z, \quad \frac{\partial w}{\partial \mu} = u$$

ist, so ergeben sich die beiden neuen Gleichungen

$$0 = \frac{d\psi}{d\lambda} = \psi'(w)\frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \psi'(w)z + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda},$$

$$0 = \frac{d\psi}{d\mu} = \psi'(w)\frac{\partial w}{\partial \mu} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = \psi'(w)u + \frac{\partial \psi}{\partial \mu};$$

in ihnen ist der Koeffizient

$$\psi'(w_i) = (w_i - w_1)(w_i - w_2) \ldots (w_i - w_\nu)$$

von z und u für jede der ν Wurzeln der Gleichung $\psi(w) = 0$ sicher von Null verschieden; man kann sie also nach z und u auflösen und erhält so unmittelbar die folgende Darstellung für z und u:

$$\text{4)} \qquad z = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}}{\psi'(w)}, \quad u = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial \mu}}{\psi'(w)},$$

d. h. es stellen sich die beiden Elemente z und u des Körpers $K(z, u)$ rational durch x und $w = \lambda z + \mu u$ dar, und hieraus folgt, dafs auch jede Gröfse ξ von $K(z, u)$ eine rationale Funktion von x und w ist.

Diese Darstellung ist immer giltig, welche Werte man auch den Unbestimmten λ und μ geben mag; nur müssen diese so gewählt werden, dafs die beiden Quotienten (4) nicht in unbestimmter Form erscheinen. Dieser Bedingung wird stets genügt, wenn nur der gemeinsame Nenner $\psi'(w)$, oder, was dasselbe ist, wenn die Diskriminante

$$D(w) = \Pi(w_i - w_k) = \Pi[\lambda(z_i - z_k) + \mu(u_i - u_k)]$$

nicht identisch verschwindet. Diese Diskriminante $D(w) = D(x, \lambda, \mu)$ ist aber eine rationale Funktion von x, deren Koeffizienten von λ und μ rational abhängen und welche, da $w_1, \ldots w_\nu$ für unbestimmte λ, μ voneinander verschieden sind, nicht identisch verschwindet. Wählt man also $\lambda = a$, $\mu = b$ irgendwie so, dafs $D(w, a, b)$ weder Null noch unendlich wird, so sind

$$x \quad \text{und} \quad y = az + bu$$

sicher zwei solche Gröſsen des Körpers $K(z, u)$, daſs nicht nur

$$x = R(z, u), \quad y = S(z, u) = az + bu,$$

sondern auch umgekehrt

$$z = R(x, y), \quad u = S(x, y),$$

daſs also in der That

$$K(x, y) = K(z, u)$$

ist; und zwar braucht man a und b nur so zu bestimmen, daſs von den ν Entwickelungen nach Potenzen von $(x - \beta)$

$$y_i = az_i + bu_i$$

in der Umgebung irgend einer Stelle $(x = \beta)$ nicht zwei zufälligerweise identisch ausfallen, was stets auf unendlich viele Arten, z. B. auch so geschehen kann, daſs man für a und b geeignete ganzzahlige Werte setzt.

§ 2.

Es sei nun $y = az + bu$ irgendwie dieser Anforderung gemäſs bestimmt und

1) $$g(y, x) = y^\nu + a_{\nu-1}(x)y^{\nu-1} + \cdots + a_0(x) = 0$$

diejenige Gleichung, welcher y als Funktion von x genügt. Behandeln wir dann die algebraische Funktion y von x genau ebenso wie früher die Funktion u von z und übertragen wir alle vorher gefundenen Resultate auf diese neuen Variabeln, so ergeben sich genau ebenso die folgenden Sätze:

Zu jeder nicht konstanten Gröſse x des Körpers K gehört eine ganz bestimmte Riemannsche Kugelfläche von ν Blättern, auf welcher alle Gröſsen des Körpers $K(x, y)$ eindeutig ausgebreitet sind und deren ν Blätter in einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten miteinander zusammenhängen. Wir wollen im folgenden die zu einer solchen Gröſse x gehörige Riemannsche Kugelfläche durch $\mathfrak{R}_x$ bezeichnen, so daſs also der bis jetzt stets betrachteten n-blättrigen Kugelfläche die Bezeichnung $\mathfrak{R}_z$ zu geben wäre. Ist Π ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{R}_x$, welcher der Stelle $(x = \beta)$ entsprechen möge und in dem etwa b Blätter dieser Fläche zusammenhängen, so ist jede Funktion ζ des Körpers in der Umgebung jener Stelle in eine konvergente Reihe entwickelbar, welche nach ganzen Potenzen von $(x - \beta)^{\frac{1}{b}}$ fortschreitet.

Wir zeigen nun zunächst, daſs die Punkte der Riemannschen Flächen $\mathfrak{R}_z$ und $\mathfrak{R}_x$ einander eindeutig entsprechen, und zweitens, daſs

auch die Definition der Ordnungszahlen einer Funktion in einem solchen Punkte von der Wahl der unabhängigen Variabeln vollständig unabhängig ist.

Eine Stelle $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ kann dadurch eindeutig und unabhängig von der zu Grunde gelegten Variabeln z definiert werden, dafs jede Funktion ξ des Körpers K dort einen ganz bestimmten konstanten Wert ξ_0 erhält, der auch Null oder unendlich grofs sein kann, und der sich aus der Entwickelung von ξ in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ für $(z = \alpha)$ ergiebt. Andererseits erkennt man jetzt aber leicht, dafs durch die so sich ergebenden Gleichungen $\xi = \xi_0$ auch eine einzige Stelle $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche bestimmt ist. Gäbe es nämlich z. B. auf $\mathfrak{R}_z$ zwei Stellen, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, in denen jede Funktion ξ denselben Wert ξ_0 annähme, so müfste ja zunächst z selbst in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ denselben Wert α erhalten, d. h. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ müfsten zwei von den bei $(z = \alpha)$ übereinander liegenden konjugierten Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ der Fläche $\mathfrak{R}_z$ sein. Nun folgt aber aus dem auf S. 217 bewiesenen Satze, dafs man stets eine Funktion ξ finden kann, welche in einem jener konjugierten Punkte, etwa in $\mathfrak{P}_1$, den Wert 1, in allen anderen aber den Wert 0 annimmt; es existieren also sicher nicht zwei unter diesen Punkten, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, wo die Werte aller Funktionen von K identisch sind. Durch die Gleichungen $\xi = \xi_0$ für alle Elemente von $K(z, u)$ ist also der Punkt $\mathfrak{P}$ sowohl auf $\mathfrak{R}_z$ als auch auf $\mathfrak{R}_x$ bestimmt, und da alle Funktionen ξ des Körpers $K(z, u) = K(x, y)$ sowohl auf $\mathfrak{R}_z$ als auch auf $\mathfrak{R}_x$ eindeutig ausgebreitet sind, so folgt, dafs die einzelnen Punkte beider Flächen einander eindeutig entsprechen, also auch auf beiden Flächen gleich bezeichnet werden können.

Ist nun $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$ oder $\mathfrak{R}_x$, so haben wir die Ordnungszahlen der Funktionen des Körpers K in $\mathfrak{P}$ folgendermafsen ebenfalls unabhängig von der Wahl der unabhängigen Variabeln definiert: Unter allen in $\mathfrak{P}$ verschwindenden Funktionen von K greifen wir eine solche π heraus, welche in $\mathfrak{P}$ von möglichst niedriger Ordnung, d. h. so verschwindet, dafs der Quotient $\frac{\zeta}{\pi}$ in $\mathfrak{P}$ endlich bleibt, wenn ζ irgend eine ebenfalls in $\mathfrak{P}$ verschwindende Funktion von K ist. Dafs eine solche Funktion π stets vorhanden ist und auf rationalem Wege gefunden werden kann, hat der soeben erwähnte Satz auf S. 217 gelehrt. Diese Funktion nun wählten wir als Mafsstab und sagten allgemein: Eine Funktion ζ besitzt in $\mathfrak{P}$ die Ordnungszahl ϱ, wenn ϱ derjenige Exponent von π ist, für welchen der Quotient $\frac{\zeta}{\pi^\varrho}$ endlich und von Null verschieden ist. Aus den Resultaten des vorigen Abschnittes folgt dann, dafs dieser Exponent ϱ für jede

Gröfse ζ von K einen bestimmten ganzzahligen Wert hat, der positiv, negativ oder Null sein kann und der vollständig unabhängig von der zu Grunde gelegten Variabeln x oder z, d. h. von der Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ oder $\mathfrak{K}_z$ ist, denn als Mafsstab wird ja hier nicht mehr eine gebrochene Potenz $(x-\beta)^{\frac{1}{b}}$ oder $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ des betreffenden Linearfaktors gewählt, sondern die durch eine nur dem Körper zukommende Eigenschaft charakterisierte Funktion π des Körpers K.

Wir zeigen endlich, dafs sich auch die unendlich kleinen Umgebungen eines Punktes $\mathfrak{P}$ auf den beiden Riemannschen Flächen eindeutig entsprechen, und definieren zunächst auch die Umgebung eines Punktes $\mathfrak{P}$ so, dafs sie von der Wahl der unabhängigen Variabeln z nicht mehr abhängt. Gehen wir zunächst von der Riemannschen Fläche $\mathfrak{K}_z$ aus; ist $\mathfrak{P}$ irgend ein Punkt derselben, $\mathfrak{P}'$ ein auf $\mathfrak{K}_z$ unendlich nahe liegender Punkt und U ein beliebiges Element von $K(z, u)$, welches in $\mathfrak{P}$ endlich ist, so unterscheidet sich wegen der Stetigkeit von U der Wert $U(\mathfrak{P}')$ von $U(\mathfrak{P})$ um eine unendlich kleine Gröfse, d. h. der absolute Betrag der Differenz

$$U(\mathfrak{P}') - U(\mathfrak{P})$$

ist beliebig klein, wenn $\mathfrak{P}'$ genügend nahe an $\mathfrak{P}$ gewählt wird, und das Gleiche gilt für jede Gröfse V von $K(z, u)$, welche in $\mathfrak{P}$ endlich ist. Dasselbe gilt aber auch umgekehrt: Ist $\mathfrak{P}'$ ein solcher Punkt, dafs für jede in $\mathfrak{P}$ endliche Funktion U des Körpers die Differenz $|U(\mathfrak{P}') - U(\mathfrak{P})|$ unendlich klein ist, so liegt $\mathfrak{P}'$ in einer unendlich kleinen Umgebung von $\mathfrak{P}$. Wählt man nämlich zuerst für U die unabhängige Variable z, so mufs der Wert, den z in $\mathfrak{P}'$ annimmt, dem Werte von z in $\mathfrak{P}$ benachbart sein, d. h. der Punkt $\mathfrak{P}'$ mufs entweder wirklich zu $\mathfrak{P}$ oder zu einem der zu $\mathfrak{P}$ konjugierten benachbart sein, welchen derselbe Wert von z entspricht. Wählen wir jetzt zweitens für U eine Funktion des Körpers, welche in $\mathfrak{P}$ gleich Eins wird, aber in allen konjugierten Punkten verschwindet, so unterscheidet sich $U(\mathfrak{P}')$ nach dem vorher Gesagten um sehr wenig von $U(\mathfrak{P}) = 1$, also um eine endliche Gröfse von dem gemeinsamen Werte Null, welchen U in allen konjugierten Punkten annimmt. Also kann $\mathfrak{P}'$ nicht einem der zu $\mathfrak{P}$ konjugierten Punkte benachbart sein, mufs also wirklich notwendig zur Umgebung von $\mathfrak{P}$ gehören. Es ergiebt sich also der wichtige Satz:

> Ein Punkt $\mathfrak{P}'$ gehört dann und nur dann zu einer unendlich kleinen Umgebung eines anderen Punktes $\mathfrak{P}$, wenn für eine jede in $\mathfrak{P}$ endliche Gröfse des Körpers $K(z, u)$ der absolute Betrag der Differenz $|U(\mathfrak{P}') - U(\mathfrak{P})|$ unterhalb einer beliebig kleinen Gröfse liegt.

Diese Definition enthält gar keine Beziehung auf die unabhängige Variable oder auf die zugehörige Riemannsche Fläche.*) Ist also $\mathfrak{P}'$ zu $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{R}_z$ benachbart, so gilt das Gleiche für die Fläche $\mathfrak{R}_x$, es besteht also der Satz:

> Die unendlich kleinen Umgebungen zweier entsprechenden Punkte auf den Kugelflächen $\mathfrak{R}_z$ und $\mathfrak{R}_x$ entsprechen sich Punkt für Punkt eindeutig.

Hierbei kann natürlich der Fall eintreten, dafs von den beiden entsprechenden Punkten der eine ein regulärer, der andere ein Verzweigungspunkt ist, so dafs die Umgebung des ersten eine kleine Kreisfläche, die des anderen eine kleine Schraubenfläche ist; aber auch in diesem Falle wird die eine kleine Fläche auf der anderen eindeutig, d. h. Punkt für Punkt abgebildet.

Beschreibt man auf $\mathfrak{R}_z$ eine beliebige kontinuierliche Kurve

$$\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P},$$

so entspricht ihr auf $\mathfrak{R}_x$ Punkt für Punkt eine kontinuierliche Kurve, welche die entsprechenden benachbarten Punkte

$$\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}$$

verbindet. Ist die erste Kurve geschlossen, d. h. kehrt sie nach $\mathfrak{P}_0$ zurück, so gilt dasselbe von der entsprechenden Kurve auf $\mathfrak{R}_x$. Jeder Kurve auf $\mathfrak{R}_z$ entspricht also eindeutig eine andere Kurve auf $\mathfrak{R}_x$ und jedem Umlaufe ein Umlauf.

Nun ist aber die Fläche $\mathfrak{R}_z$ zusammenhängend, weil die Grundgleichung $f(u, z) = 0$ irreduktibel ist; man kann also von jedem Punkte $\mathfrak{P}_0$ zu jedem anderen $\mathfrak{P}$ auf einer ganz innerhalb $\mathfrak{R}_z$ verlaufenden Kurve s gelangen. Hieraus folgt aber, dafs man auch auf der Fläche $\mathfrak{R}_x$ von jedem Punkte $\mathfrak{P}_0$ nach jedem anderen $\mathfrak{P}$ innerhalb von $\mathfrak{R}_x$ gelangen kann, d. h. auch die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_x$ ist zusammenhängend, oder die Grundgleichung (1) ist ebenfalls notwendig irreduktibel.

§ 3.

Da die Punkte $\mathfrak{P}$ und die Ordnungszahlen der Funktionen des Körpers unabhängig von der gewählten Variabeln z und der Kugel-

*) Aus den soeben gegebenen Beweisen ergiebt sich, dafs man zur vollständigen Bestimmung eines Punktes $\mathfrak{P}$ und seiner Umgebung nicht alle Gröfsen U des Körpers, sondern nur eine endliche Anzahl von ihnen wirklich zu untersuchen braucht.

fläche $\mathfrak{R}_z$ definiert worden sind, so gilt das Gleiche von den jenen Punkten zugeordneten Primteilern $\mathfrak{P}$ und den aus ihnen gebildeten Divisoren

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\varrho_1} \mathfrak{P}_2^{\varrho_2} \ldots \mathfrak{P}_m^{\varrho_m}.$$

Nun war der Grad der unabhängigen Variabeln z, welche wir in der Form

$$z = \frac{\mathfrak{z}_z}{\mathfrak{n}_z}$$

schreiben wollen, gleich n, d. h. gleich dem Grade des Körpers $K(z, u)$ in Bezug auf z, denn die Blätterzahl der zugehörigen Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$ war ja gleich dem Grade der irreduktibeln Gleichung für u, und somit besitzen der Zähler und der Nenner von z genau so viele gleiche oder verschiedene Primfaktoren, wie der Grad des Körpers angiebt.

Ersetzt man nun z durch die unabhängige Variable $x = \frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x}$, so sind auch hier im Zähler und Nenner soviele Primfaktoren enthalten, wie der Grad ν des Körpers in Bezug auf x angiebt.

Wir wollen im folgenden den bisher gleich ν gesetzten Grad einer Variabeln x von $K(z, u)$, d. h. die Anzahl der Primfaktoren, aus denen ihr Zähler und ihr Nenner besteht, durch n_x bezeichnen, so daſs also der früher n genannte Grad von z nun die Bezeichnung n_z erhalten würde. Dann können wir den folgenden Satz aussprechen:

Wählt man irgend eine Gröſse x von K vom Grade n_x als unabhängige Variable, so wird der Grad des Körpers K in Bezug auf sie gleich n_x; alle Elemente derselben sind also auf der zugehörigen n_x-blättrigen zusammenhängenden Kugelfläche $\mathfrak{R}_x$ eindeutig und im allgemeinen stetig ausgebreitet. Jede Gröſse des Körpers genügt einer irreduktibeln Gleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind und deren Grad n_x oder ein Teiler von n_x ist. In dieser Form könnte unser Satz auch auf die Konstanten x ausgedehnt werden, für die der Grad n_x gleich Null ist; dann wird eben die Gleichung für alle Gröſsen y vom nullten Grade, also von y unabhängig.

Statt der vorher gewählten speziellen Gröſse $y = az + bu$ kann man, wie auf S. 137 nachgewiesen wurde, als abhängige Variable irgend eine andere Gröſse y des Körpers K wählen, welche nur dem Körper $K(x, y)$ selbst und nicht etwa einem Unterkörper desselben angehört, für welche also der Grad der zugehörigen irreduktibeln Gleichung gleich n_x und nicht etwa gleich einem Teiler von n_x ist.

Im folgenden wollen wir uns für y allgemeiner irgend eine Gröſse des Körpers $K(z, u)$ gewählt denken; ihr Grad sei n_y und es sei

$$F(y, x) = 0$$

die irreduktible Gleichung, der sie als Funktion von x genügt. Dann ist ihr Grad in Bezug auf y gleich n_x oder einem Teiler von n_x, je nachdem $K(x, y)$ gleich $K(z, u)$ oder gleich einem Divisor von $K(z, u)$ ist. Sehen wir aber umgekehrt y als unabhängige, x als abhängige Variable an, so folgt genau ebenso, dafs der Grad von $F(y, x)$ in Bezug auf x gleich n_y oder gleich einem Teiler dieser Zahl ist, je nachdem $K(x, y)$ gleich $K(z, u)$ oder gleich einem Teiler dieses Körpers ist. Es ergiebt sich also der Satz:

Zwischen zwei beliebigen Elementen x und y des Körpers $K(z, u)$ besteht stets eine irreduktible Gleichung

$$F(x, y) = 0,$$

deren Grade in x und y bzw. gleich n_y und n_x oder Teiler dieser Zahlen sind. Der aus ihnen entstehende algebraische Körper $K(x, y)$ ist dann und nur dann gleich $K(z, u)$, wenn jene beiden Gradzahlen ihren gröfsten Wert haben.

Man sieht so, dafs man einen und denselben Körper K durch algebraische Gleichungen von ganz verschiedenem Grade vollständig definieren kann, und man kann leicht die Gleichung niedrigsten Grades für denselben auffinden. Ist nämlich

$$\xi = \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}$$

eine nicht konstante Gröfse des Körpers, deren Grad $n_\xi = \nu$ möglichst klein ist, so kann man eine andere Gröfse desselben Körpers so finden, dafs η durch eine irreduktible Gleichung ν^{ten} Grades

$$F(\eta, \xi) = \eta^\nu + b_{\nu-1}(\xi)\eta^{\nu-1} + \cdots + b_0(\xi) = 0$$

als Funktion von ξ definiert wird; dann ist von selbst $K(z, u) = K(\xi, \eta)$, und dieses ist die Gleichung des niedrigsten Grades, welche zur Bestimmung des Körpers hinreicht; alsdann sind alle Gröfsen des Körpers auf der ν-blättrigen Kugelfläche $\mathfrak{R}_\xi$ eindeutig ausgebreitet.

Ist speziell $\nu = 1$, giebt es also eine Funktion des Körpers, welche nur eine Nullstelle und nur einen Pol auf $\mathfrak{R}_z$ besitzt, und wählt man sie als unabhängige Variable, so genügt jede Gröfse von K einer Gleichung ersten Grades mit rationalen Koeffizienten in ξ, d. h. sie ist eine rationale Funktion von ξ allein; der algebraische Körper $K(z, u)$ ist also in diesem, aber auch nur in diesem Falle mit dem Körper $K(\xi)$ aller rationalen Funktionen von ξ identisch. In diesem Falle läfst sich also die n-blättrige Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$ auf die einfache Kugelfläche $\mathfrak{R}_\xi$ abbilden.

Ist ferner $\nu = 2$, giebt es also in $K(z, u)$ eine Gröſse ξ, welche zwei Nullstellen und zwei Pole hat, so kann man eine Gröſse η innerhalb K finden, welche mit ξ durch eine irreduktible quadratische Gleichung

$$\eta^2 + 2a(\xi)\eta + b(\xi) = 0$$

zusammenhängt, so daſs also

$$\eta = -a(\xi) \pm \sqrt{a^2 - b}$$

ist. Setzt man also

$$\zeta = \eta + a(\xi), \quad a^2(\xi) - b(\xi) = \Delta(\xi),$$

so ist die Gröſse ζ von $K(z, u)$ durch die reine Gleichung

$$\zeta^2 = \Delta(\xi)$$

bestimmt, und jede Gröſse η von $K(z, u)$ ist rational durch ξ und ζ, also in der Form

$$\eta = c_0(\xi) + c_1(\xi)\sqrt{\Delta(\xi)}$$

darstellbar. In diesem und nur in diesem Falle ist also der Körper $K(z, u)$ gleich dem quadratischen Körper $K\left(\xi, \sqrt{\Delta(\xi)}\right)$.

Man erkennt so, von welcher Bedeutung die Lösung der Aufgabe ist, innerhalb eines Körpers K ein Element von möglichst niedriger Ordnung zu bestimmen.

Ist β eine beliebige endliche Konstante und zerlegt man den Linearfaktor $x - \beta$ in seine Primfaktoren, so folgt aus der auf S. 156 durchgeführten Überlegung, daſs dieser denselben Nenner $\mathfrak{n}_x$ wie x selbst besitzt, daſs also $x - \beta$ ebenfalls von der Ordnung n_x ist. Ist also

$$x - \beta = \frac{\mathfrak{z}_{x-\beta}}{\mathfrak{n}_x},$$

so besteht der Zähler $\mathfrak{z}_{x-\beta}$ aus allen und nur den Primfaktoren $\mathfrak{P}$, welche den zu $(x = \beta)$ gehörenden Punkten von $\mathfrak{R}_x$ entsprechen, der Nenner aus allen denen, welche den zu $(x = \infty)$ gehörenden Stellen zugeordnet sind, mit der Maſsgabe, daſs ein solcher Primfaktor in der b^{ten} Potenz im Zähler oder Nenner auftritt, wenn der korrespondierende Punkt $\mathfrak{P}$ ein b-blättriger Verzweigungspunkt der Fläche $\mathfrak{R}_x$ ist, wenn also seine Verzweigungsordnung $b - 1$ ist.

So erhält man also auch hier eine endliche Anzahl von Verzweigungsfaktoren, und man erkennt, daſs zu jeder Kugelfläche $\mathfrak{R}_x$ ein Verzweigungsteiler

$$\mathfrak{Z}_x = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{b-1}$$

gehört, wo das Produkt auch hier wieder nur auf die Verzweigungspunkte erstreckt zu werden braucht, da ja für alle übrigen die Ver-

zweigungsordnung $b-1$ von selbst verschwindet. Also gehört auch zu jeder Gröfse x des Körpers K ein bestimmter Verzweigungsteiler, welcher sich im allgemeinen beim Übergange zu einer neuen unabhängigen Variabeln ändert. Ist aber speziell

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

eine lineare Funktion von x, so wird $\mathfrak{Z}_{x'} = \mathfrak{Z}_x$, wie man leicht erkennt.

Die Fundamentalaufgabe, alle linear unabhängigen Multipla eines beliebigen Divisors $\mathfrak{Q}$ in dem Körper K zu bestimmen, ist im § 1 der fünfzehnten Vorlesung zwar unter Zugrundelegung einer bestimmten Variabeln z gelöst worden, aber unsere Überlegungen lehren, dafs sie von dieser vollständig unabhängig ist. In der That können wir mit Hilfe der in der vierzehnten Vorlesung auseinandergesetzten Methoden auch für die unabhängige Variable x eine Basis

$$\xi^{(1)}, \quad \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n_x)}$$

für das zu $\mathfrak{Q}$ gehörige Ideal $I(\mathfrak{Q})$ finden, für welche aber jetzt natürlich die Elementenanzahl gleich n_x, d. h. gleich dem Grade von x ist. Zugleich können wir diese Basis so gewählt voraussetzen, dafs ihre Elemente für eine beliebige reguläre Stelle $(x = \beta_0)$ normal sind. Sind dann

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \ldots \sigma_{n_x} \qquad (\sigma_i \geqq \sigma_{i+1})$$

die Ordnungszahlen jener Elemente für diese Stelle, und ist σ_s die letzte nicht negative unter ihnen, so bilden die

$$N = (\sigma_1 + 1) + \cdots + (\sigma_s + 1)$$

Funktionen des Körpers K

$$\frac{\xi^{(i)}}{(x-\beta_0)^{t_i}} \qquad (t_i = 0, 1, \ldots \sigma_i)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$, und diese Zahl N ist vollständig unabhängig von der Wahl der Variabeln x innerhalb K.

Ist endlich $(\breve{\xi}^{(1)}, \breve{\xi}^{(2)}, \ldots \breve{\xi}^{(n_x)})$ das zu dem oben gefundenen komplementäre System, so ist dasselbe ein Fundamentalsystem für den komplementären Divisor $\bar{\mathfrak{Q}}$, welcher mit $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q}\bar{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_x}$$

verbunden ist. Man erkennt also, dafs sich der zu $\mathfrak{Q}$ komplementäre Divisor mit der Wahl der unabhängigen Variabeln ändert, weil der Verzweigungsteiler ein anderer wird.

Siebzehnte Vorlesung.

Die Divisorenklassen. — Die Haupt- oder Einheitsklasse. — Die Komposition der Klassen. — Der Integritätsbereich einer Klasse. — Lineare Darstellung aller ganzen Divisoren einer Klasse durch ein linear unabhängiges System. — Anwendung: Reduktion des Körpers $K(z, u)$ auf eine möglichst niedrige Ordnung. — Das Geschlecht des Körpers. — Bestimmung aller Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb einer beliebigen Divisorenklasse R. — Die Klassen vom Teiler $\mathfrak{D}$ und die primitiven Klassen.

§ 1.

Wir gehen jetzt dazu über, den grofsen Bereich der algebraischen Divisoren in Klassen einzuteilen und dann die gemeinsamen Eigenschaften aller Divisoren einer und derselben Klasse zu untersuchen.

Die einfachsten Divisoren sind diejenigen $\mathfrak{Q}_\xi$, welche einer algebraischen Funktion ξ des Körpers zugeordnet sind, für welche also

$$\mathfrak{Q}_\xi = \xi = e\,\frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}$$

ist; für sie giebt es also ein und nur ein Element ξ von K, dessen Nullstellen durch $\mathfrak{z}_\xi$ und dessen Pole durch $\mathfrak{n}_\xi$ auch ihrer Ordnungszahl nach vollständig bestimmt sind. Der multiplikative konstante Faktor e bestimmt sich nach der auf S. 153 gegebenen Festsetzung als der erste Entwickelungskoeffizient von ξ in der Umgebung eines ein für allemal fest angenommenen Punktes $\mathfrak{P}^{(0)}$. Alle diese Divisoren wollen wir in eine und dieselbe Klasse rechnen, die wir die Haupt- oder Einheitsklasse nennen und durch E oder, wo kein Mifsverständnis zu befürchten ist, mitunter auch durch (1) bezeichnen. Wir stellen also die Definition auf:

> Alle und nur die Divisoren $\mathfrak{Q}_\xi$, welche irgend einer algebraischen Funktion des Körpers gleich sind, gehören in eine Divisorenklasse, die sogenannte Einheitsklasse E. Diese Klasse besitzt mithin genau so viele Divisoren $\mathfrak{Q}_\xi$, als der Körper $K(z, u)$ Elemente ξ hat.

Durchläuft also ξ alle Funktionen von K, als Divisoren betrachtet, so kann man in leicht verständlicher Bezeichnung schreiben:

$$(E) = (\xi).$$

Da alle Funktionen ξ die Ordnung Null haben, so folgt, dafs alle Divisoren der Klasse E ebenfalls die Ordnung Null haben, dafs also ihr Zähler von demselben Grade ist wie ihr Nenner. Aber damit ist im allgemeinen keineswegs gesagt, dafs auch umgekehrt jeder Divisor $\mathfrak{Q}$ von der Ordnung Null der Hauptklasse angehört, also einer Funktion des Körpers gleich ist. Es wurde bereits auf S. 155 hervorgehoben, dafs dies zwar für den Körper $K(z)$ der rationalen Funktionen von z allein, aber im allgemeinen nicht für einen algebraischen Körper $K(z, u)$ der Fall ist, da z. B. schon ein Divisor $\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'}$ im allgemeinen nicht der Hauptklasse angehört, weil keine Gröfse ξ existiert, welche nur eine einzige Nullstelle und einen Pol besitzt. Dies ist (nach der Bemerkung auf S. 247 unten) dann und nur dann der Fall, wenn der algebraische Körper $K(z, u)$ einem rationalen Körper $K(\xi)$ gleich ist.

Wir wollen nun allgemeiner zwei Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ äquivalent nennen und sie in eine Klasse Q rechnen, wenn ihr Quotient $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'}$ eine Gröfse des Körpers $K(z, u)$ ist. Zwei Divisoren gehören also dann und nur dann in eine Klasse, wenn

$$\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'} = \xi$$

ist, wo ξ irgend eine algebraische Funktion des Körpers K bedeutet. Ist also $\mathfrak{Q}_0$ irgend ein Divisor, und durchläuft ξ alle Elemente des Körpers K, so sind alle Produkte $\xi \mathfrak{Q}_0$, als Divisoren betrachtet, zu $\mathfrak{Q}_0$ äquivalent. Denn ist

$$\mathfrak{Q} = \xi \mathfrak{Q}_0,$$

so ist wirklich

$$\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}_0} = \xi.$$

Umgekehrt sind aber in dem Bereiche $(\xi \mathfrak{Q}_0)$ auch alle zu $\mathfrak{Q}_0$ äquivalenten Divisoren enthalten. Denn ist $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}_0$, so ist ja $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}_0} = \xi$, wo ξ eine Gröfse von K bedeutet, d. h. es ist in der That $\mathfrak{Q} = \xi \mathfrak{Q}_0$. Die Divisoren einer Klasse bilden also einen Bereich von unendlich vielen Elementen, welche aber den Divisoren der Hauptklasse eindeutig zugeordnet sind, denn man erhält ja alle Divisoren desselben und jeden nur einmal, wenn man alle Elemente ξ oder $\mathfrak{Q}_\xi$ der Hauptklasse mit einem beliebig gewählten Divisor $\mathfrak{Q}_0$ dieser Klasse Q multipliziert. Man kann also hier in ähnlicher Bezeichnung wie oben schreiben:

$$(Q) = (\mathfrak{Q}_0 \xi),$$

wenn $\mathfrak{Q}_0$ irgend ein beliebig, aber fest ausgewählter Divisor der Klasse Q ist und ξ alle Elemente der Hauptklasse durchläuft.

Wir wollen diesen Divisor $\mathfrak{Q}_0$, durch welchen die Elemente der Hauptklasse (E) in die entsprechenden Elemente der Klasse (Q) verwandelt werden, den zur Klasse Q gehörigen Multiplikator nennen.

Ist speziell $\mathfrak{Q}_0$ irgend eine Funktion des Körpers, etwa gleich Eins, so enthält $(Q) = (\mathfrak{Q}_0 \xi) = (\xi)$ alle und nur diejenigen Divisoren, welche Gröfsen des Körpers K gleich sind; die vorher definierte Hauptklasse der Divisoren ist also in der That auch nach dieser Definition eine Divisorenklasse.

Man erkennt ohne weiteres, dafs die angegebene Definition der Äquivalenz den Bedingungen genügt, welche man an eine solche stellen mufs. Es bestehen nämlich die Sätze:

1. Jeder Divisor $\mathfrak{Q}$ ist sich selbst äquivalent, da $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}} = 1$ ist und die Zahl 1 der Hauptklasse angehört.

2. Sind zwei Divisoren einem dritten äquivalent, so sind sie untereinander äquivalent. Sind nämlich $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ zu $\mathfrak{Q}_0$ äquivalent und ist

$$\mathfrak{Q} = \xi \mathfrak{Q}_0, \quad \mathfrak{Q}' = \xi' \mathfrak{Q}_0,$$

so ist $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'} = \frac{\xi}{\xi'}$, gehört also der Hauptklasse an.

Alle Divisoren derselben Klasse haben dieselbe Ordnung, da jeder Divisor $\mathfrak{Q}_0 \xi$ die Ordnung q von $\mathfrak{Q}_0$ besitzt. Es soll q daher die Ordnung der Klasse (Q) genannt werden.

Es ergiebt sich so, dafs die Elemente $\mathfrak{Q}$ einer beliebigen Divisorenklasse $(Q) = (\mathfrak{Q}_0 \xi)$, abgesehen von dem gemeinsamen Faktor $\mathfrak{Q}_0$, mit den Elementen des Körpers K übereinstimmen. Jeder Funktion ξ des Körpers K entspricht dann eindeutig ein Divisor $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0 \xi$ der Klasse Q, welcher aus ξ durch Multiplikation mit dem festen Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ hervorgeht. Umgekehrt erhält man aus $\mathfrak{Q}$ die zugeordnete Funktion ξ, wenn man $\mathfrak{Q}$ durch den Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ dividiert.

Welchen Divisor der Klasse Q man hier als den gemeinsamen Multiplikator wählt, ist vollkommen gleichgiltig. Ist nämlich $\mathfrak{Q}_0'$ ein anderer Divisor der Klasse, ist also

$$\frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}_0'} = \xi_0,$$

so entspricht jetzt dem vorher betrachteten Divisor $\mathfrak{Q}$ eine andere Funktion $\bar{\xi}$ des Körpers, denn es ist

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0 \xi = \mathfrak{Q}_0' \frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}_0'} \xi = \mathfrak{Q}_0' (\xi_0 \xi) = \mathfrak{Q}_0' \bar{\xi}. \qquad (\bar{\xi} = \xi \xi_0)$$

Wählt man also statt des Multiplikators $\mathfrak{Q}_0$ einen anderen Divisor $\mathfrak{Q}_0'$, so findet man die den einzelnen Divisoren $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \ldots$ zugeordneten

Elemente $\overline{\mathfrak{x}}, \overline{\mathfrak{x}}', \ldots$ der Hauptklasse, indem man die diesen vorher zugeordneten Elemente $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \ldots$ alle mit derselben Gröfse $\xi_0 = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}'_0}$ multipliziert.

Man kann den Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ innerhalb der Klasse Q stets so wählen, dafs er einen oder mehrere gegebene Primteiler $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots \mathfrak{P}^{(r)}$ gar nicht, weder im Zähler noch im Nenner enthält. Sollte das nämlich für den ursprünglich gewählten Multiplikator nicht der Fall sein, so kann man statt seiner einen anderen äquivalenten

$$\mathfrak{Q}'_0 = \mathfrak{Q}_0 \cdot \frac{1}{\xi_0}$$

nehmen und die Funktion ξ_0 im Körper K nach S. 217 so wählen, dafs der Quotient

$$\mathfrak{Q}'_0 = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\xi_0}$$

die Primfaktoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots \mathfrak{P}^{(r)}$ garnicht enthält.

Hat man den Multiplikator $\mathfrak{Q}'_0$ so gewählt, so sind irgend zwei zugeordnete Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{Q}'_0$ der Hauptklasse E und der Klasse Q stets von derselben Ordnung in Bezug auf diese gegebenen Primfaktoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots \mathfrak{P}^{(r)}$, weil ja ihr Quotient $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{x}} = \mathfrak{Q}'_0$ gerade diese Divisoren nach dem vorher Gesagten nicht enthält.

§ 2.

Es seien jetzt

$$\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_2, \ldots \quad \mathfrak{x}_\mu$$

μ beliebige Funktionen des Körpers, und

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{x}_1}, \quad \mathfrak{Q}_{\mathfrak{x}_2}, \ldots \mathfrak{Q}_{\mathfrak{x}_\mu}$$

die ihnen eindeutig entsprechenden, auch der multiplikativen Konstante nach bestimmten Divisoren der Hauptklasse E, so dafs allgemein

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{x}_i} = e_i \cdot \frac{\mathfrak{z}_{\mathfrak{x}_i}}{\mathfrak{n}_{\mathfrak{x}_i}}$$

ist; dann stellt jede homogene lineare Funktion

$$\mathfrak{x} = c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2 + \cdots + c_\mu \mathfrak{x}_\mu \tag{1}$$

mit konstanten Koeffizienten für jedes Wertsystem $c_1, \ldots c_\mu$ ein Element des Körpers dar, welches durch jene Konstanten eindeutig bestimmt ist. Ist

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{x}} = e\,\frac{\mathfrak{z}_{\mathfrak{x}}}{\mathfrak{n}_{\mathfrak{x}}}$$

der zu ξ gehörige Divisor der Hauptklasse, und ersetzt man in (1) die Elemente des Körpers K durch die ihnen gleichen Divisoren, so ist $\mathfrak{Q}_\xi$ ebenfalls durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q}_\xi = c_1 \mathfrak{Q}_{\xi_1} + c_2 \mathfrak{Q}_{\xi_2} + \cdots + c_\mu \mathfrak{Q}_{\xi_\mu} \tag{1a}$$

eindeutig bestimmt und kann leicht mit Hilfe der folgenden Überlegung gefunden werden:

Es sei

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_{\xi_1}, \mathfrak{Q}_{\xi_2}, \ldots \mathfrak{Q}_{\xi_\mu})$$

der gröfste gemeinsame Teiler der μ Divisoren $\mathfrak{Q}_{\xi_i}$, d. h. derjenige Divisor, welcher jeden einzelnen Primfaktor $\mathfrak{P}$ so oft enthält, als er mindestens in allen μ Divisoren $\mathfrak{Q}_{\xi_i}$ auftritt; dann ist $\mathfrak{D}$ im allgemeinen ein gebrochener Divisor, und es bestehen die μ Gleichungen

$$\mathfrak{Q}_{\xi_i} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{G}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu),$$

wo jetzt $(\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_\mu)$ ganze Divisoren bedeuten, welche keinen Primfaktor gemeinsam haben.

Dann zeigt man leicht, dafs auch $\mathfrak{Q}_\xi$ durch den gröfsten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{D}$ teilbar ist, dafs also, wie auch die Koeffizienten c_i beschaffen sein mögen, stets die Gleichung besteht:

$$\mathfrak{Q}_\xi = \mathfrak{D}\mathfrak{G},$$

wo $\mathfrak{G}$ einen von den c_i abhängigen ganzen Divisor bedeutet.

Ist nämlich $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Primteiler und $\mathfrak{P}^\delta$ diejenige Potenz desselben, welche in $\mathfrak{D}$ enthalten ist, so sind alle μ Divisoren $\mathfrak{Q}_{\xi_i}$ oder also alle μ Funktionen ξ_i mindestens durch $\mathfrak{P}^\delta$ teilbar. Ist also der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}_z$ etwa ein α-blättriger Verzweigungspunkt, so bestehen in seiner Umgebung für $\xi_1, \ldots \xi_\mu$ die Entwickelungen

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= e_1 (z - \alpha)^{\frac{\delta}{\alpha}} + \cdots \\
\xi_2 &= e_2 (z - \alpha)^{\frac{\delta}{\alpha}} + \cdots \\
&\vdots \\
\xi_\mu &= e_\mu (z - \alpha)^{\frac{\delta}{\alpha}} + \cdots,
\end{aligned}$$

wo mindestens einer der μ Anfangskoeffizienten $e_1, e_2, \ldots e_\mu$ von Null verschieden ist. Also ergiebt sich für ξ oder $\mathfrak{Q}_\xi$ in der Umgebung desselben Punktes die Entwickelung

$$\xi = e (z - \alpha)^{\frac{\delta}{\alpha}} + \cdots,$$

wo der Anfangskoeffizient e durch die Gleichung

2) $$e = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_\mu e_\mu$$

bestimmt ist. Also ist ξ in der Umgebung einer jeden Stelle $\mathfrak{P}$ mindestens von derselben Ordnung wie der Divisor $\mathfrak{D}$ von $(\xi_1, \ldots \xi_\mu)$, d. h. es ist in der That $\mathfrak{Q} = \mathfrak{D}\mathfrak{G}$, was zu beweisen war.

Aus der Form (2) des Anfangskoeffizienten e in der Entwickelung von ξ folgen aber weiter unmittelbar die Sätze:

> 1. Man kann die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ auf unendlich viele Arten so bestimmen, dafs in der Funktion $\xi = \mathfrak{D}\mathfrak{G}$ der ganze Divisor $\mathfrak{G}$ beliebig viele gegebene Primteiler
>
> $$\mathfrak{P}^{(1)}, \quad \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\nu)}$$
>
> nicht enthält;

denn hierzu sind ja die Konstanten c_i nur so zu wählen, dafs die zu $\mathfrak{P}^{(1)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\nu)}$ gehörigen Anfangskoeffizienten (2) von Null verschieden sind.

> 2. Man kann die Konstanten $c_1, \ldots c_\mu$ stets so bestimmen, dafs der Divisor $\mathfrak{G}$ einen gegebenen Primteiler $\mathfrak{P}$ enthält;

denn zu diesem Zwecke brauchen ja die c_i nur so gewählt zu werden, dafs der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Anfangskoeffizient (2) verschwindet.

Da sich die Divisoren einer und derselben Klasse Q von den zugeordneten Divisoren der Hauptklasse E nur um einen und denselben Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ unterscheiden, so gelten die soeben gefundenen Sätze ohne weiteres auch für die Divisoren einer beliebigen Klasse, wenn wir festsetzen,

> dafs jede Gleichung zwischen beliebigen Gröfsen $\xi, \xi_1, \ldots \xi_\mu$ des Körpers K oder zwischen beliebigen Divisoren
>
> $$\mathfrak{Q}_\xi, \quad \mathfrak{Q}_{\xi_1}, \ldots \mathfrak{Q}_{\xi_\mu}$$
>
> der Hauptklasse E giltig bleibt, wenn man sie mit einem beliebigen von Null verschiedenen Divisor multipliziert, und dafs umgekehrt eine solche Gleichung innerhalb der Klasse Q besteht, wenn aus ihr durch Division mit dem Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ eine richtige Gleichung innerhalb der Hauptklasse E folgt.

Diese Festsetzung stimmt mit dem bekannten Satze überein, dafs eine Gleichung richtig bleibt, wenn man sie mit einer von Null verschiedenen Gröfse multipliziert.

Es sei $\mathfrak{Q}_0$ der Multiplikator für die Klasse Q, und es mögen

$$\mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{Q}_1, \quad \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_\mu$$

die den Divisoren der Hauptklasse

$$\mathfrak{Q}_\xi, \quad \mathfrak{Q}_{\xi_1}, \quad \mathfrak{Q}_{\xi_2}, \ldots \mathfrak{Q}_{\xi_\mu}$$

oder, was dasselbe ist, die den Elementen

$$\xi, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \ldots \xi_\mu$$

von K zugeordneten Divisoren der Klasse Q sein, so daſs also allgemein $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{Q}_{\xi_i}\mathfrak{Q}_0 = \xi_i\mathfrak{Q}_0$ ist. Multipliziert man nun die Gleichung (1) mit $\mathfrak{Q}_0$ und ersetzt die dann sich ergebenden Produkte $\mathfrak{Q}_{\xi_i}\mathfrak{Q}_0$ durch die ihnen gleichen Divisoren $\mathfrak{Q}_i$, so erhält man die Gleichung

3) $$\mathfrak{Q} = c_1\mathfrak{Q}_1 + c_2\mathfrak{Q}_2 + \cdots + c_\mu\mathfrak{Q}_\mu,$$

durch welche jetzt für jedes Wertsystem der (c_i) ein Divisor $\mathfrak{Q}$ der Klasse Q eindeutig bestimmt ist, nämlich derjenige, welcher dem durch (1) gegebenen Divisor $\mathfrak{Q}_\xi$ der Hauptklasse zugeordnet ist.

Diese Gleichung (3) zwischen den $(\mu + 1)$ Divisoren der Klasse (Q) besagt nur, daſs zwischen den zugeordneten Elementen $\xi, \xi_1, \ldots \xi_\mu$ der Hauptklasse die entsprechende Gleichung (1)

3a) $$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_\mu\xi_\mu$$

besteht, in welche diese durch Division mit dem gewählten Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ übergeht, wenn man allgemein

4) $$\frac{\mathfrak{Q}_i}{\mathfrak{Q}_0} = \xi_i, \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}_0} = \xi$$

setzt. Geht man dagegen umgekehrt von der Gleichung (3) aus, dividiert sie aber durch einen anderen Multiplikator $\mathfrak{Q}'_0$, so erhält man allerdings eine von (3a) verschiedene Gleichung des Körpers, welche aber eine notwendige Folge von dieser ist. Setzt man nämlich

4a) $$\frac{\mathfrak{Q}_i}{\mathfrak{Q}'_0} = \xi'_i, \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'_0} = \xi',$$

so geht aus (3) durch Division mit $\mathfrak{Q}'_0$ die Gleichung

3b) $$\xi' = c_1\xi'_1 + c_2\xi'_2 + \cdots + c_\mu\xi'_\mu$$

hervor, aber aus den Gleichungen (4) und (4a) folgt, daſs

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{\xi'_\mu}{\xi_\mu} = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}'_0} = \zeta_0$$

ist; also geht die zweite Gleichung (3b) aus der ersten (3a) durch Multiplikation mit dem Faktor ζ_0 hervor, die eine ist also dann und nur dann erfüllt, wenn auch die andere besteht.

Geht man umgekehrt von der ebenfalls richtigen Gleichung (3b) der Hauptklasse aus und multipliziert sie mit dem neuen Multiplikator $\mathfrak{Q}'_0$, so gelangt man wegen (4a) zu genau derselben Gleichung (3) wie vorher; diese Beziehung zwischen den Divisoren

$$\mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_\mu$$

von Q ist also von der Wahl des Multiplikators $\mathfrak{Q}_0$ ganz unabhängig.

Jeder homogenen linearen Gleichung zwischen beliebigen Elementen des Körpers, d. h. zwischen Divisoren der Hauptklasse entspricht also dieselbe Gleichung zwischen den zugeordneten Divisoren einer beliebigen Klasse Q, und zwar für einen ganz beliebig anzunehmenden Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$. Durch diese Gleichung (3) ist also für jedes Wertsystem $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ ein Divisor $\mathfrak{Q}$ der Klasse Q eindeutig bestimmt. Wir können das Verhalten von $\mathfrak{Q}$ in Bezug auf jeden Primteiler $\mathfrak{P}$ leicht feststellen. Zu diesem Zwecke wählen wir den Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ einfach so, daſs er $\mathfrak{P}$ weder im Zähler noch im Nenner enthält, was nach der auf S. 253 gemachten Bemerkung stets möglich ist. Dann enthalten nach Division mit $\mathfrak{Q}_0$ in der zugehörigen Gleichung

$$\xi = c_1\xi_1 + \cdots + c_\mu\xi_\mu$$

die zugeordneten Funktionen $\xi, \xi_1, \ldots \xi_\mu$ den Primteiler $\mathfrak{P}$ genau so oft, wie vorher die Divisoren $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_\mu$; es gelten daher für diesen, also auch für jeden Primfaktor genau die oben für die Divisoren der Hauptklasse gefundenen Sätze. Ist also wieder

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_\mu)$$

der gröſste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_\mu$, ist also allgemein

$$\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{D}\mathfrak{G}_i,$$

wo die ganzen Divisoren $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_\mu)$ den gröſsten gemeinsamen Teiler Eins haben, so ist auch

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{D}\mathfrak{G},$$

und man kann die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ stets so bestimmen, daſs $\mathfrak{G}$ entweder beliebig gegebene Primteiler nicht enthält, oder daſs $\mathfrak{G}$ einen gegebenen Primfaktor $\mathfrak{P}$ als Teiler besitzt; sind also speziell

$$\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_\mu$$

g a n z e Divisoren, so gilt dasselbe von jedem Divisor

$$\mathfrak{G} = c_1\mathfrak{G}_1 + \cdots + c_\mu\mathfrak{G}_\mu$$

für beliebige Werte der μ Konstanten c_i.

Wir wollen ν Divisoren $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_\nu$ l i n e a r u n a b h ä n g i g nennen, wenn zwischen ihnen keine lineare homogene Relation

$$5) \qquad c_1\mathfrak{Q}_1 + c_2\mathfrak{Q}_2 + \cdots + c_\nu\mathfrak{Q}_\nu = 0$$

mit konstanten Koeffizienten besteht, oder, was dasselbe ist, wenn die ν zugeordneten Funktionen der Hauptklasse $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$ linear unabhängig sind; denn aus einer Gleichung

$$5a) \qquad c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_\nu\xi_\nu = 0$$

würde ja durch Multiplikation mit $\mathfrak{Q}_0$ die entsprechende Gleichung (5) hervorgehen.

Ganz ebenso, wie wir hier lineare homogene Funktionen von μ Divisoren einer beliebigen Klasse Q untersucht haben, können wir auch homogene Funktionen höheren Grades in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen, doch soll hierauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden; wir werden später sehen, dafs dieses allgemeinere Problem unmittelbar auf das hier betrachtete zurückgeführt werden kann.

§ 3.

Sind

$$\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}', \quad \mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}'$$

irgend zwei Paare äquivalenter Divisoren, ist also

$$\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'} = \eta, \quad \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \zeta,$$

wo η und ζ zu $K(z, u)$ gehören, so ist auch

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R} \sim \mathfrak{Q}'\mathfrak{R}', \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} \sim \frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{R}'},$$

denn es ist

$$\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'} = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \eta\zeta, \quad \frac{\;\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}}\;}{\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{R}'}} = \frac{\;\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'}\;}{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'}} = \frac{\eta}{\zeta}.$$

Sind also (Q) und (R) zwei beliebige Divisorenklassen, so bilden alle Produkte $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ je zweier Divisoren von (Q) und (R) eine neue Klasse, welche durch (QR) bezeichnet werden soll. Ganz ebenso bilden alle Quotienten $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}}$, deren Zähler der Klasse (Q) und deren Nenner der Klasse (R) angehören, eine neue Klasse, welche durch $\left(\frac{Q}{R}\right)$ bezeichnet werden soll.

Sind q und r die Ordnungszahlen der Klassen Q und R, so besitzen QR und $\frac{Q}{R}$ offenbar die Ordnungszahlen $q + r$ und $q - r$. Die Hauptklasse E ist die einzige, durch deren Multiplikation oder Division eine beliebige Klasse Q nicht geändert wird, denn es ist ja

$$QE = Q, \quad \frac{Q}{E} = Q,$$

weil nur durch Multiplikation bzw. Division mit einer Gröfse des Körpers, d. h. einem Divisor der Hauptklasse, ein Divisor von Q in einen äquivalenten Teiler übergeht.

Ist ferner $\mathfrak{T}$ irgend ein Divisor der Klasse (QR), so kann $\mathfrak{T}$, und zwar auf unendlich viele Arten, in ein Produkt von zwei Faktoren $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ zerlegt werden, welche bzw. zu (Q) und zu (R) gehören. Sind näm-

lich $\overline{\mathfrak{Q}}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ irgend zwei Divisoren von (Q) und (R), so gehört ja das Produkt $\overline{\mathfrak{Q}}\overline{\mathfrak{R}}$ ebenfalls zu der Klasse (QR), es ist also

$$\overline{\mathfrak{Q}}\overline{\mathfrak{R}} \sim \mathfrak{T},$$

d. h. es ist

$$\mathfrak{T} = \xi \overline{\mathfrak{Q}}\overline{\mathfrak{R}},$$

wo ξ der Hauptklasse angehört. Also ist

$$\mathfrak{T} = \overline{\mathfrak{Q}}\overline{\mathfrak{R}}\xi = \mathfrak{Q}\mathfrak{R},$$

d. h. gleich einem Produkte der beiden Faktoren

$$\mathfrak{Q} = \overline{\mathfrak{Q}}, \quad \mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}}\xi,$$

welche bzw. zu (Q) und zu (R) gehören, und zwar kann einer derselben, etwa $\mathfrak{Q} = \overline{\mathfrak{Q}}$, innerhalb der Klasse (Q) ganz beliebig angenommen werden; der zweite ist dann innerhalb (R) eindeutig bestimmt. Genau ebenso beweist man, dafs auch jeder Divisor der Klasse $\left(\frac{Q}{R}\right)$ auf unendlich viele Arten als ein Quotient $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}}$ dargestellt werden kann, dessen Zähler zu (Q) und dessen Nenner zu (R) gehört.

Sind also $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zwei spezielle Divisoren der beiden Klassen Q und R, durchlaufen ferner ξ und η alle Divisoren der Hauptklasse, sind also

$$(\mathfrak{Q}\xi) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{R}\eta)$$

alle Divisoren der Klassen (Q) und (R), so sind alle Divisoren der Klassen (QR) und $\left(\frac{Q}{R}\right)$ und nur sie in der Form

$$(\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\bar{\xi}) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}}\bar{\eta}\right)$$

enthalten, wo auch $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ wie stets im folgenden alle Divisoren der Hauptklasse durchlaufen.

Aus diesen Sätzen folgt, dafs man mit den Divisorenklassen genau ebenso rechnen kann wie mit gewöhnlichen Zahlen, solange es nur auf Multiplikationen und Divisionen ankommt. Speziell folgt aus der Gleichung

$$(Q)(R) = (T)$$

durch Auflösung

$$(R) = \left(\frac{T}{Q}\right).$$

Sind ferner (Q), (R) und (M) beliebige Divisorenklassen, so folgt aus der Gleichung

$$(Q)(M) = (R)(M)$$

ohne weiteres die andere:

$$(Q) = (R);$$

denn sind $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$ irgendwelche Divisoren jener drei Klassen, so ist ja

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{M} \sim \mathfrak{R}\mathfrak{M},$$

also gehört der Quotient

$$\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}}$$

der Hauptklasse an, es ist also in der That $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{R}$, mithin $Q = R$.

§ 4.

Unter den Divisoren einer Klasse (Q) sind diejenigen besonders wichtig, welche ganz sind, also keinen Nenner haben. Sie bilden einen Teilbereich jener Klasse, welcher ihr Integritätsbereich genannt und durch $[Q]$ bezeichnet werden soll.

Ist $\mathfrak{G}$ irgend ein ganzer Divisor der Klasse Q, ζ das zugeordnete Element der Hauptklasse und $\mathfrak{Q}_0$ der Multiplikator, so ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_0 \zeta$$

ein ganzer Divisor, also folgt

$$\zeta = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Q}_0},$$

d. h. der Divisor $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann ganz, wenn die zugeordnete Funktion ζ des Körpers ein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ ist.

Sind

$$\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2, \dots \mathfrak{G}_\mu$$

irgend welche ganze Divisoren der Klasse (Q), so ist, wie oben bewiesen, jede homogene lineare Funktion

$$\mathfrak{G} = c_1 \mathfrak{G}_1 + c_2 \mathfrak{G}_2 + \cdots + c_\mu \mathfrak{G}_\mu$$

ebenfalls ein ganzer Divisor von (Q).

Wir zeigen nun, dafs man stets alle ganzen Divisoren einer beliebigen Klasse (Q) homogen und linear durch eine Anzahl linear unabhängiger ganzer Divisoren darstellen kann, und zwar durch ein endliches ganz bestimmtes Verfahren.

Die Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots \mathfrak{G}_\mu$ bilden dann und nur dann ein linear unabhängiges System ganzer Divisoren der Klasse (Q), wenn die zugeordneten Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_\mu$ der Hauptklasse ebenfalls linear unabhängig und sämtlich Multipla des Divisors

$$\overline{\mathfrak{Q}}_0 = \frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$$

sind. Ist umgekehrt $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_N$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, so bilden die zugeordneten Divisoren

$$\zeta_1 \mathfrak{Q}_0, \quad \zeta_2 \mathfrak{Q}_0, \dots \zeta_N \mathfrak{Q}_0$$

ein vollständiges System $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_N)$ von linear unabhängigen ganzen Divisoren der Klasse (Q), denn es ist ja erstens

$$\mathfrak{Q}_0 \zeta_i = \mathfrak{Q}_0 \cdot \frac{1}{\mathfrak{Q}_0} \mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

also ganz; ferner sind jene N Divisoren $\mathfrak{G}_i$ auch linear unabhängig, da die zugeordneten Funktionen ζ_i unabhängig sind; und endlich bilden sie auch ein vollständiges System unabhängiger ganzer Divisoren, denn wäre etwa ein ganzer Divisor $\mathfrak{G}_0$ von (Q) nicht durch $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_N$ darstellbar, so wäre die zugeordnete Funktion ζ_0 ein Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, aber nicht durch $\zeta_1, \ldots \zeta_N$ darstellbar, und dies verstöfst gegen die gemachte Annahme, dafs $\zeta_1, \ldots \zeta_N$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ bilden.

Mit Hilfe der im § 1 der fünfzehnten Vorlesung abgeleiteten Resultate sind wir aber imstande, ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0} = \overline{\mathfrak{Q}}_0$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur ein Fundamentalsystem

$$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)})$$

für den Körper $K(z, u)$ und den Divisor $\overline{\mathfrak{Q}}_0$ zu bilden, welches in Bezug auf eine reguläre Stelle $(z = \alpha_0)$ normal ist. Sind dann wieder

$$r_1, \quad r_2, \ldots r_n$$

die Ordnungszahlen jener Funktionen in Bezug auf die Stelle $(z = \alpha_0)$, und sind $r_1, \ldots r_s$ diejenigen unter ihnen, welche positiv oder Null sind, so bilden die

$$N = (r_1 + 1) + \cdots + (r_s + 1)$$

Funktionen

$$1) \qquad \xi^{(i)}, \quad \frac{\xi^{(i)}}{z - \alpha_0}, \quad \frac{\xi^{(i)}}{(z - \alpha_0)^2}, \ldots \frac{\xi^{(i)}}{(z - \alpha_0)^{r_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla für $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, und unsere Aufgabe ist damit vollständig gelöst.

Diese Bestimmung ist natürlich ganz unabhängig davon, welcher Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$ zur Zuordnung benutzt wird. Wählen wir $\mathfrak{Q}_0'$ statt $\mathfrak{Q}_0$, und ist

$$\frac{\mathfrak{Q}_0'}{\mathfrak{Q}_0} = \xi_0,$$

so erhalten wir aus dem vorigen Systeme (1) ein Fundamentalsystem für alle Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0'}$, indem wir einfach alle seine N Funktionen mit ξ_0 multiplizieren, denn während die ersteren alle in der Form

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{Q}_0}, \quad \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{Q}_0}, \ldots \frac{\mathfrak{G}_N}{\mathfrak{Q}_0}$$

darstellbar waren, sind die anderen in der Form

$$\frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{Q}'_0}, \frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{Q}'_0}, \dots \frac{\mathfrak{G}_N}{\mathfrak{Q}'_0}$$

enthalten, die Zähler sind also ungeändert geblieben.

Wir wollen die Anzahl N der linear unabhängigen ganzen Divisoren der Klasse (Q) die Dimension von (Q) nennen und durch $\{Q\}$ bezeichnen; sind also $r_1, r_2, \dots r_s$ die Exponenten derjenigen Elementarteiler des algebraischen Systems $(\xi_i^{(k)})$ für die Stelle $(z = \alpha_0)$, welche nicht negativ sind, so ist die Dimension der Klasse (Q) durch die Gleichung gegeben:

$$2)\qquad \{Q\} = (r_1 + 1) + \dots + (r_s + 1).$$

Ist die Ordnung q der Klasse Q speziell kleiner als n, so kann keine einzige unter den n Ordnungszahlen r_i positiv sein; denn wäre auch nur $r_1 = 1$, so wären nach (1) ξ_1 und $\frac{\xi_1}{z-\alpha_0}$ Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, es bestünden also die beiden Gleichungen

$$\xi_1 = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Q}_0}, \quad \frac{\xi_1}{z-\alpha_0} = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{Q}_0},$$

wo $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ ganze Divisoren q^{ter} Ordnung sind; also ergäbe sich durch Division

$$z - \alpha_0 = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}'},$$

wo der rechts stehende Quotient vom Grade q oder von niedrigerem Grade ist, je nachdem die Divisoren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ einen gemeinsamen Teiler haben oder nicht. Da aber $z - \alpha_0$ vom n^{ten} Grade ist, so mufs in diesem Falle sicher $q \geqq n$ sein.

Ist also $q < n$, so sind die Ordnungszahlen der Elemente

$$(\xi^{(1)}, \dots \xi^{(n)})$$

für die Stelle $(z = \alpha_0)$ alle Null oder negativ; in diesem Falle ist also die Dimension der Klasse Q durch die einfachere Gleichung gegeben:

$$\{Q\} = s,$$

wenn $\xi^{(s)}$ das letzte Element nullter Ordnung in $(z = \alpha_0)$ ist. Ist also der Grad einer Klasse kleiner als n, so kann ihre Dimension höchstens gleich n sein.

Ist jetzt wieder Q eine beliebige Klasse algebraischer Divisoren von der Ordnung q, in welcher q nur so grofs angenommen ist, dafs ihre Dimension N sicher gröfser als Eins ist, und sind wieder $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(N)})$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}_0$, so dafs

$$\eta^{(i)} = \frac{\mathfrak{G}_i}{\mathfrak{Q}_0} \qquad (i = 1, 2, \dots N),$$

ist, so ist der Quotient

$$x = \frac{c_1 \eta^{(1)} + \cdots + c_{N-1} \eta^{(N-1)}}{\eta^{(N)}} = \frac{c_1 \mathfrak{G}_1 + \cdots + c_{N-1} \mathfrak{G}_{N-1}}{\mathfrak{G}_N} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_N}$$

für jedes Wertsystem $c_1, \ldots c_{N-1}$ eine Gröfse des Körpers, deren Grad gleich oder kleiner als q ist, je nachdem die N ganzen Divisoren $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_N$ teilerfremd sind oder einen gemeinsamen Teiler $\mathfrak{D}$ besitzen, denn nur dieser Teiler hebt sich für unbestimmte c_i fort. Wegen der Unabhängigkeit der N Gröfsen $\eta^{(i)}$ kann x für keine Wahl der Koeffizienten c_i eine Konstante werden, da aus der Gleichung $x = c$ die Relation

$$c_1 \eta^{(1)} + \cdots + c_{N-1} \eta^{(N-1)} - c\eta^{(N)} = 0$$

folgen würde. Wir können nun die $N-1$ im Zähler von x homogen auftretenden Konstanten $c_1, \ldots c_{N-1}$ nach S. 255 Nr. 2 stets so bestimmen, dafs der Zähler von x mindestens $N-2$ Primfaktoren mit dem Nenner gemeinsam hat, welche sich also fortheben. Auf diese Weise ergiebt sich für x eine nicht konstante Gröfse des Körpers, deren Grad gleich

$$q - N + 2$$

oder noch kleiner wird. Es ergiebt sich also der allgemeine Satz:

> Ist Q eine Divisorenklasse, deren Dimension mindestens gleich zwei ist, so kann man auf rationalem Wege eine nicht konstante Gröfse x des Körpers finden, deren Grad
>
> 3) $$n_x \leqq q - \{Q\} + 2$$
>
> ist; legt man diese als unabhängige Variable zu Grunde, so geht $K(z, u)$ in einen Körper von derselben Ordnung über.

Da der Grad n_x immer mindestens gleich Eins bleibt, so ergiebt sich die Ungleichung

4) $$q \geqq \{Q\} - 1,$$

welche gilt, sobald die Dimension $\{Q\}$ mindestens gleich zwei ist. Wir werden sehr bald in dem Riemann-Rochschen Satze den allgemeinsten Ausdruck für diese Beziehung kennen lernen.

Ist endlich $q < n$ und s die Anzahl der Elemente $\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(s)}$, welche sich im Punkte $(z = \alpha_0)$ regulär verhalten, so kann man auf dem hier angegebenen Wege den Grad des Körpers mindestens auf die Zahl $q - s + 2$ erniedrigen.

Aus der genauen Gleichung (2) leiten wir endlich noch eine ungenaue ab, welche mitunter mit Nutzen angewendet wird. Da alle auf r_s folgenden Ordnungszahlen $r_{s+1}, \ldots r_n$ negativ sind, also höchstens den Wert -1 haben, so ist

$$5) \quad \{Q\} = (r_1+1) + \cdots + (r_s+1) \geq (r_1+1) + \cdots + (r_s+1) + \cdots + (r_n+1) \geq (r_1 + \cdots + r_n) + n,$$

und da die Summe $\sum_1^n r_i$ der Ordnungszahlen der Elemente $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_n$ nach dem auf S. 226 bewiesenen Satze gleich $-\left(\bar{q} + \frac{w}{2}\right)$ ist, wenn $\bar{q} = -q$ die Ordnung von $\mathfrak{Q}_0 = \frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ ist, so folgt aus (5) die elegante Ungleichheit

$$5\text{a}) \qquad \{Q\} > q - \left(\frac{w}{2} - n\right).$$

Wir wollen die von der Wahl des Divisors $\mathfrak{Q}$ unabhängige ganze Zahl

$$\frac{w}{2} - n + 1$$

nach Riemann durch p bezeichnen und sie das Geschlecht des Körpers $K(z, u)$ nennen. Wir werden sehr bald den wichtigen Nachweis führen, dafs diese Zahl nur scheinbar von der Wahl der Variabeln z oder der zugehörigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ abhängt, dafs vielmehr für jede Variable x des Körpers $K(z, u)$

$$\frac{w_x}{2} - n_x + 1 = p$$

ist. Diese Zahl ist also eine und zwar die wichtigste Invariante des Körpers K. Führen wir sie schon hier in die Gleichung (5a) ein, so geht sie über in

$$5\text{b}) \qquad \{Q\} \geqq q - p + 1.$$

Auch diese Ungleichung wird später in dem Riemann-Rochschen Satze durch eine fundamentale Gleichung ersetzt werden.

Ersetzen wir endlich in der Ungleichung (3) ebenfalls $\{Q\}$ durch den soeben gefundenen nicht gröfseren Wert $q - p + 1$, so geht die dort gefundene obere Grenze für n_x in $p + 1$ über, und man erhält den Satz:

Man kann den Grad des Körpers $K(z, u)$ stets mindestens auf $p + 1$ erniedrigen, wenn p das Geschlecht desselben ist.

Wir schliefsen hier noch zwei für die Folge wichtige Bemerkungen an. Für eine beliebige Klasse (Q), deren Ordnung q eine negative Zahl ist, wird

$$\{Q\} = 0;$$

denn jeder ganze Divisor von (Q) müfste ja die negative Ordnungszahl q haben, was unmöglich ist.

Dasselbe ist für jede Klasse von der Ordnung Null der Fall, welche nicht die Einheitsklasse ist, denn ein ganzer Divisor kann nur

dann die Ordnung Null haben, wenn er gleich Eins ist; in diesem Falle ist aber $Q = E$, weil allein diese Klasse die Konstanten enthält. Also ist endlich

$$\{E\} = 1,$$

denn in der Hauptklasse sind die Konstanten die einzigen linear unabhängigen ganzen Elemente.

§ 5.

Wir verallgemeinern jetzt das im vorigen Paragraphen gefundene Resultat, indem wir uns folgende Aufgabe stellen:

> Es sollen alle Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb einer beliebigen Klasse (R) gefunden werden.

Ist speziell (R) die Hauptklasse (E), so ist diese Aufgabe bereits in der fünfzehnten Vorlesung gelöst und als das Hauptproblem in der ganzen Theorie der algebraischen Funktionen bezeichnet worden. Wir weisen jetzt nach, daſs die hier vorgelegte Aufgabe unmittelbar auf jene zurückgeführt werden kann.

Alle Divisoren $\mathfrak{R}$ der zu untersuchenden Klasse R können in der Form

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{Q}}$$

dargestellt werden, wo $\mathfrak{Q}$ den gegebenen Divisor bedeutet und $\overline{\mathfrak{Q}}$ der Reihe nach alle Divisoren der Klasse $\left(\frac{R}{Q}\right)$ durchläuft. Soll also $\mathfrak{R}$ ein ganzes Multiplum von $\mathfrak{Q}$ sein, so ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $\overline{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor der Klasse $\left(\frac{R}{Q}\right)$ ist. Bilden umgekehrt

1) $$\overline{\mathfrak{G}}_1, \ \overline{\mathfrak{G}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{G}}_\mu$$

ein vollständiges System von linear unabhängigen ganzen Divisoren der Klasse $\left(\frac{R}{Q}\right)$, so bilden die μ Produkte

2) $$\mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{G}}_1, \ \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{G}}_2, \ldots \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{G}}_\mu$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$ innerhalb der Klasse (R); denn einmal sind die Divisoren (2) linear unabhängig, weil es die Divisoren (1) sind, zweitens gehören sie der Klasse (R) an, weil die Divisoren (1) der Klasse $\left(\frac{R}{Q}\right)$ angehören, und drittens kann es innerhalb der Klasse (Q) kein Vielfaches $\mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{G}}_0$ geben, welches durch die Elemente (2) nicht homogen und linear darstellbar wäre, weil ja sonst auch der ganze Divisor $\overline{\mathfrak{G}}_0$ der Klasse $\left(\frac{R}{Q}\right)$ nicht durch

das System (1) dargestellt werden könnte, welches dann also nicht vollständig wäre.

Es ergiebt sich hieraus der wichtige Satz:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla eines beliebigen Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb einer Divisorenklasse (R) ist gleich

$$\left\{\frac{R}{Q}\right\},$$

also gleich der Dimension der Klasse $\left(\frac{R}{Q}\right)$, wenn (Q) die Klasse des betrachteten Divisors ist; sie ist also von der speziellen Wahl von $\mathfrak{Q}$ innerhalb der Klasse (Q) ganz unabhängig.

Ist speziell (R) die Hauptklasse (E), so ist die Anzahl der linear unabhängigen algebraischen Funktionen, welche Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ sind, gleich der Dimension

$$\left\{\frac{1}{Q}\right\}$$

der durch den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ bestimmten Klasse; man erkennt also auch hier, dafs jene Anzahl ganz unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{Q}$ innerhalb der Klasse (Q) ist.

Ist (Q) von höherer oder gleicher Ordnung wie (R), so ist nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung

$$\left\{\frac{R}{Q}\right\} = 0,$$

weil die Ordnungszahl $r - q$ der Klasse $\left(\frac{R}{Q}\right)$ Null oder negativ ist. Nur in dem Falle, dafs $Q = R$ ist, ist

$$\left\{\frac{Q}{Q}\right\} = \{E\} = 1.$$

Im ersten Falle enthält also die Klasse (R) kein einziges Multiplum irgend eines Divisors $\mathfrak{Q}$ der Klasse (Q). Ist dagegen $R = Q$, so ist eben $\mathfrak{Q}_0$ selber das einzige Multiplum von $\mathfrak{Q}_0$ innerhalb der Klasse Q.

§ 6.

Wir betrachten jetzt zum Abschlusse dieser Untersuchungen alle ganzen Divisoren einer beliebigen Klasse (Q). Es sei $\{Q\} = \mu$, und es möge

$$\mathfrak{G}_1,\quad \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_\mu$$

ein vollständiges System linear unabhängiger ganzer Divisoren von (Q) bedeuten. Jeder andere ganze Divisor von (Q) ist dann eindeutig in der Form

$$\mathfrak{G} = c_1\mathfrak{G}_1 + c_2\mathfrak{G}_2 + \cdots + c_\mu\mathfrak{G}_\mu$$

darstellbar. Haben ferner die μ Divisoren $\mathfrak{G}_i$ den gemeinsamen Teiler $\mathfrak{D}$, so ist $\mathfrak{D}$ ebenfalls ganz, und jeder andere ganze Divisor $\mathfrak{G}$ von Q ist ebenfalls ein Multiplum von $\mathfrak{D}$, also gleich $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}}$.

Es sei nun allgemein

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}}_i;$$

ist dann D die zu $\mathfrak{D}$ gehörige Klasse, so bilden die μ teilerfremden ganzen Divisoren

$$\overline{\mathfrak{G}}_1, \quad \overline{\mathfrak{G}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{G}}_\mu,$$

welche aus den ganzen Divisoren $\mathfrak{G}_i$ durch Weglassung des gemeinsamen Teilers $\mathfrak{D}$ hervorgehen, ein Fundamentalsystem für die Klasse

$$\overline{Q} = \frac{Q}{D};$$

denn diese μ Divisoren gehören erstens offenbar alle zu dieser Klasse, zweitens sind sie linear unabhängig, und drittens ist jeder ganze Divisor $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\overline{Q}$ in der Form

$$\overline{\mathfrak{G}} = c_1\overline{\mathfrak{G}}_1 + c_2\overline{\mathfrak{G}}_2 + \cdots + c_\mu\overline{\mathfrak{G}}_\mu$$

enthalten, weil das Produkt $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$ zu Q gehört, also in der Form $c_1\mathfrak{G}_1 + \cdots + c_\mu\mathfrak{G}_\mu$ darstellbar ist. Da die μ Divisoren $\overline{\mathfrak{G}}_1, \ldots \overline{\mathfrak{G}}_\mu$ teilerfremd sind, so kann man innerhalb $\overline{Q}$ einen Divisor

$$\overline{\mathfrak{G}}_0 = \bar{c}_1\overline{\mathfrak{G}}_1 + \cdots + \bar{c}_\mu\overline{\mathfrak{G}}_\mu$$

so auswählen, daſs er beliebig viele beliebig gegebene Primfaktoren nicht enthält; wir denken uns speziell den Divisor $\overline{\mathfrak{G}}_0$ so gewählt, daſs er zu $\mathfrak{D}$ relativ prim ist.

Ist also Q eine beliebige Klasse, $\mathfrak{D}$ der Teiler aller ihrer ganzen Divisoren; ist ferner D die Klasse von $\mathfrak{D}$, und

$$Q = D\overline{Q},$$

so besitzen die beiden Klassen Q und $\overline{Q}$ dieselbe Dimension μ, d. h. es ist

$$\{Q\} = \{\overline{Q}\};$$

ferner aber zeigt man leicht, daſs für die andere Klasse

$$\{D\} = 1$$

ist, daſs nämlich jene Klasse nur den einen ganzen Divisor $\mathfrak{D}$ enthält. In der That, existierte auſser $\mathfrak{D}$ auch nur noch ein anderer ganzer Divisor $\mathfrak{D}'$ innerhalb D, und ist $\overline{\mathfrak{G}}_0$ der oben bestimmte zu $\mathfrak{D}$ teiler-

fremde Divisor von $\overline{Q}$, so würde ja das Produkt $\mathfrak{D}'\mathfrak{G}_0$ ein ganzer Divisor von Q, also als solcher notwendig durch $\mathfrak{D}$ teilbar sein, und dies ist unmöglich, da $\mathfrak{G}_0$ zu $\mathfrak{D}$ relativ prim und $\mathfrak{D}'$ von $\mathfrak{D}$ verschieden ist, also notwendig mindestens einen Primfaktor $\mathfrak{P}$ weniger oft enthält, als $\mathfrak{D}$.

Eine Klasse Q soll eine Klasse vom Teiler $\mathfrak{D}$ heifsen, wenn ihre ganzen Divisoren den gröfsten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{D}$ besitzen. Ist speziell $\mathfrak{D} = 1$, sind also die ganzen Divisoren von Q teilerfremd, so heifse Q eine primitive Klasse oder eine Klasse vom Teiler Eins. Vermittelst der Gleichung

$$Q = D\overline{Q}$$

kann jede Klasse vom Teiler $\mathfrak{D}$ als Produkt einer primitiven Klasse $\overline{Q}$ gleicher Dimension und einer anderen Klasse D vom Teiler $\mathfrak{D}$ dargestellt werden, deren Dimension aber gleich Eins ist. Ist speziell Q eine primitive Klasse, so ist $\mathfrak{D} = 1$, $D = E$, und es ist also auch in diesem äufsersten Falle $\{D\} = \{E\} = 1$.

Achtzehnte Vorlesung.

Die Integralfunktionen ω rationaler Differentiale. — Die logarithmischen Stellen derselben. — Die Residuen. — Die Vieldeutigkeit der Integralfunktionen auf der einblättrigen Kugelfläche. — Änderung der Integrationsvariabeln. — Der zu einem rationalen Differentiale gehörige Differentialteiler. — Die zu dem Körper $K(z)$ gehörige Differentialklasse. — Beziehung der Integralfunktion zu ihrem Differentialteiler. — Die Integrale zweiter und dritter Gattung. — Abhängigkeit der Integrale ω vom Integrationswege. — Anwendung der Eulerschen und der Cauchyschen Integraldefinitionen auf die Funktionen ω. — Die Periodizitätsmoduln der Integrale ω. — Die Summe aller Residuen einer rationalen Funktion von z ist stets gleich Null.

§ 1.

Wir wenden uns jetzt zu einer genaueren Untersuchung zunächst derjenigen Funktionen, welche aus den rationalen Differentialen durch Integration hervorgehen. Später werden wir dann, und das ist unsere Hauptaufgabe, auch die Integralfunktionen algebraischer Differentiale, oder die sogenannten Abelschen Integrale mit denselben Methoden eingehend untersuchen.

Es sei zunächst $\zeta = \varphi(z)$ eine beliebige Gröfse des Körpers $K(z)$ der rationalen Funktionen von z; dann ist nach der bekannten Eulerschen Definition das unbestimmte Integral

$$1)\qquad \omega = \int \zeta dz$$

des rationalen Differentiales ζdz die allgemeinste Funktion von z, deren nach z genommene Ableitung gleich ζ ist, d. h. ω ist als Funktion von z durch die Differentialgleichung

$$2)\qquad \frac{d\omega}{dz} = \zeta$$

definiert. Da für den Integranden ζ in der Umgebung jedes Punktes $\mathfrak{p}$ der einblättrigen Kugelfläche eine Entwickelung

$$\zeta = a_h (z - \alpha)^h + a_{h+1} (z - \alpha)^{h+1} + \cdots$$

besteht, welche innerhalb desjenigen Kreises mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{p}$ gleichmäfsig konvergiert, dessen Peripherie durch den nächsten Pol von ζ hindurchgeht, so kann diese Reihe gliedweise integriert werden, und die Integration liefert für ω eine, abgesehen von einer additiven Konstante ω_0, eindeutig bestimmte Reihe für ω

$$3) \qquad \omega = \omega_0 + \frac{a_h}{h+1}(z-\alpha)^{h+1} + \frac{a_{h+1}}{h+2}(z-\alpha)^{h+2} + \cdots,$$

wo jedoch, falls ζ ein Glied

$$\frac{a_{-1}}{z-\alpha}$$

enthalten sollte, das zugehörige Entwickelungsglied von ω gleich

$$a_{-1}\lg(z-\alpha)$$

ist. Auch dieses Glied wächst bei unbegrenzter Annäherung der Variabeln z an die Stelle α über jedes Mafs hinaus, aber so schwach, dafs, wie bekannt und leicht zu beweisen ist, jede Potenz $\frac{1}{(z-\alpha)^\delta}$ mit noch so kleinem positiven Exponenten stärker gegen den Wert ∞ konvergiert. Genau dasselbe gilt auch bei der Entwickelung des Integrals ω in der Umgebung der unendlich fernen Stelle für das Glied $a_1 \lg z$; auch dieses wird für $(z=\infty)$ ebenfalls unendlich grofs, konvergiert aber schwächer gegen diesen Wert als jede noch so kleine positive Potenz z^δ von z. Wir könnten also ein solches Glied $\lg(z-\alpha)$ (bzw. $\lg z$) in Bezug auf seinen Charakter in der Umgebung der Stelle $(z=\alpha)$ [bzw. $(z=\infty)$] als ein Glied von unendlich kleiner, aber negativer Ordnung bezeichnen.

Der einzige Unterschied zwischen den rationalen Funktionen ζ von z und den zugehörigen Integralen ω ist also der, dafs in den Entwickelungen der letzteren ein solches logarithmisches Glied auftreten kann; doch kann dies nur an einer endlichen Anzahl von Stellen $\mathfrak{p}$ eintreten; ist nämlich $\mathfrak{p}$ eine im Endlichen liegende Stelle, so mufs sie notwendig zu den Polen des Integranden ζ gehören, damit in der Entwickelung (2) überhaupt ein Glied der $(-1)^{\text{ten}}$ Ordnung auftreten kann. Die unendlich ferne Stelle dagegen braucht kein Pol von ζ zu sein, da hier das logarithmische Glied durch die Integration des Gliedes erster Ordnung $\frac{a_1}{z}$ erhalten wird.

Wir wollen eine endliche bzw. die unendlich ferne Stelle $\mathfrak{p}$ eine *logarithmische Stelle* der Integralfunktion ω nennen, wenn in dem zugehörigen Funktionenelement $\omega(\mathfrak{p})$ das Glied $\lg(z-\alpha)$ bzw. $\lg z$ auftritt, mag dieses aufserdem noch Glieder von niedrigerer negativer

Ordnung enthalten oder nicht. Nur in diesen Stellen unterscheidet sich das Verhalten der Integralfunktionen ω von dem der rationalen Funktionen von z. Für jede endliche Stelle $\mathfrak{p}$ und die unendlich ferne Stelle der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ besitzt also das zugehörige Element der Integralfunktion die Entwickelung

$$\omega(\mathfrak{p}) = \varrho \lg(z-\alpha) + \mathfrak{P}(z|\alpha),$$

wo $\mathfrak{P}(z|\alpha)$ eine Potenzreihe von $(z-\alpha)$ bezeichnet, welche höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von $(z-\alpha)$ enthält. Der Koeffizient ϱ ist nur für die in endlicher Anzahl vorhandenen logarithmischen Stellen von Null verschieden. Diese Zahl ϱ ist die wichtigste Invariante für den analytischen Charakter des Funktionenelementes $\omega(\mathfrak{p})$; man kann dieselbe leicht aus dem zugehörigen Elemente $\zeta(\mathfrak{p})$ des Integranden bestimmen: Ist nämlich $\mathfrak{p}$ ein endlicher Punkt, so ergiebt sich durch Differentiation nach z

$$\zeta(\mathfrak{p}) = \frac{d\omega(\mathfrak{p})}{dz} = \frac{\varrho}{z-\alpha} + \mathfrak{P}'(z|\alpha),$$

wo die Ableitung $\mathfrak{P}'(z|\alpha)$ kein Glied von der $(-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthält. Also ist ϱ einfach der Koeffizient von $\frac{1}{z-\alpha}$ in der Entwickelung von $\zeta(\mathfrak{p})$. Ist dagegen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$ der unendlich ferne Punkt, wo also $z-\alpha$ durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen ist, so dafs $\lg\left(\frac{1}{z}\right) = -\lg z$ wird, so ergiebt sich durch Differentiation der dann giltigen Gleichung

$$\omega(\mathfrak{p}_\infty) = -\varrho \lg z + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

nach z die Gleichung

$$\zeta(\mathfrak{p}_\infty) = -\frac{\varrho}{z} + \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{z}\right),$$

in diesem Falle ist also ϱ der *negative* Koeffizient von $\frac{1}{z}$ in der Entwickelung des Elementes $\zeta(\mathfrak{p}_\infty)$. Wegen der Bedeutung dieser Koeffizienten für das Element der Integralfunktion hat Cauchy demselben einen besonderen Namen gegeben. Er bezeichnet den Koeffizienten ϱ von $\frac{1}{z-\alpha}$ bezw. von $\left(-\frac{1}{z}\right)$ in dem Funktionenelemente $\zeta(\mathfrak{p})$ bzw. von $\zeta(\mathfrak{p}_\infty)$ als das *Residuum des Differentiales* $d\omega$ *für die Stelle* $\mathfrak{p}$. Dann gilt der Satz:

Ist ϱ das Residuum des Differentiales $d\omega$ für eine Stelle $\mathfrak{p}$, so ist in der Umgebung dieser Stelle die Integralfunktion

$$\omega(\mathfrak{p}) = \varrho \lg(z-\alpha) + \mathfrak{P}(z|\alpha).$$

Das Residuum besitzt also nur für die logarithmischen Stellen einen von Null verschiedenen Wert.

Aus der Definition des Residuums folgt sofort der Satz:

Sind $d\omega_1, d\omega_2, \dots d\omega_\mu$ μ beliebige Differentiale, $\varrho^{(1)}, \varrho^{(2)}, \dots \varrho^{(\mu)}$ ihre Residuen für eine beliebige Stelle $\mathfrak{p}$ und $c_1, c_2, \dots c_\mu$ beliebige Konstanten, so ist

$$c_1 \varrho^{(1)} + c_2 \varrho^{(2)} + \cdots + c_\mu \varrho^{(\mu)}$$

das Residuum für das Differential von $c_1 \omega_1 + \cdots + c_\mu \omega_\mu$ in Bezug auf dieselbe Stelle.

Es sei nun $\mathfrak{p}_0$ ein im Endlichen liegender Punkt, für welchen ζ regulär ist, und es möge

$$\zeta = a_0 + a_1 (z - \alpha_0) + a_2 (z - \alpha_0)^2 + \cdots$$

die Entwickelung von ζ in der Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ sein; dann ist auch das Integral ω in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ durch das Funktionenelement

$$\omega = \omega_0 + a_0 (z - \alpha_0) + \frac{a_1}{2} (z - \alpha_0)^2 + \cdots$$

dargestellt, und dasselbe kann nun über die ganze Kugelfläche $\mathfrak{K}$ mit Ausnahme der nur in endlicher Anzahl vorhandenen Pole von ζ und des unendlich fernen Punktes fortgesetzt werden. Ist $\mathfrak{p}'$ ein zu $\mathfrak{p}_0$ benachbarter Punkt und sind ω' und ζ' die Fortsetzungen von ω und ζ für $\mathfrak{p}'$ als Mittelpunkt, so folgt aus den Elementen der Funktionentheorie, dafs auch ω' und ζ' durch die Gleichung

$$\frac{d\omega'}{dz} = \zeta'$$

verbunden sind, weil für eine Potenzreihe die Ableitung ihrer Fortsetzung ω' gleich der Fortsetzung ζ' ihrer Ableitung ist. Also genügt die durch das Element ω nebst allen seinen Fortsetzungen definierte analytische Funktion in ihrem ganzen Bereiche der Differentialgleichung (2). Auch für die vorher ausgeschlossenen einzelnen Stellen $\overline{\mathfrak{p}}$ giebt es ein bis auf eine additive Konstante ω_0 eindeutig bestimmtes Element, durch welches ω in der Umgebung von $\overline{\mathfrak{p}}$ dargestellt wird, und diese Konstante ω_0 bestimmt sich in jedem Falle eindeutig durch die Forderung, dafs das Element $\bar{\omega}$ das auf einem bestimmten Wege von $\mathfrak{p}_0$ aus fortgesetzte Integral von ζdz in der Umgebung von $\overline{\mathfrak{p}}$ darstellen soll.

Während der Integrand ζ eine auf der ganzen Kugelfläche eindeutig definierte Funktion des Ortes ist, so dafs der Wert der Funktion ζ in $\mathfrak{p}$ nur von diesem Punkte selbst, nicht aber von dem Wege abhängt, auf welchem das Element $\zeta(\mathfrak{p}_0)$ von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}$ fortgesetzt wurde, gilt dies von dem zugehörigen Integrale $\omega(\mathfrak{p})$ im allgemeinen

nicht, vielmehr wird sich der Wert des zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Elementes $\omega(\mathfrak{p})$ mit dem zur Fortsetzung benutzten Wege $(\mathfrak{p}_0\mathfrak{p})$ ändern können; weil aber die Ableitung von ω eine eindeutige Funktion des Ortes ist, so können die verschiedenen Werte, welche ω in demselben Punkte $\mathfrak{p}$ bei verschiedenen Fortsetzungswegen erhält, sich nur durch eine Konstante, d. h. durch den Wert von ω_0 unterscheiden. Es wird später unsere Aufgabe sein, die Abhängigkeit der Integrationskonstante ω_0 von dem Wege $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}$ aufzusuchen; jetzt wollen wir zuerst den arithmetischen Charakter eines solchen Integrals ebenso zu ergründen suchen, wie wir dies bereits im Anfange dieser Vorlesungen für die rationalen Funktionen des Körpers $K(z)$ gethan haben. Zu diesem Zwecke wollen wir uns zunächst von der Willkürlichkeit frei machen, welche in der Wahl von z als Integrationsvariabeln liegt.

§ 2.

Man kann ein und dasselbe Integral ω oder das zugehörige Differential

1) $$d\omega = \zeta dz$$

in sehr verschiedener Weise darstellen, wenn man die Integrationsvariable z durch eine beliebige linear gebrochene Funktion derselben:

2) $$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

ersetzt, welche mit z durch eine eindeutig umkehrbare Substitution zusammenhängt, falls die Substitutionsdeterminante

$$\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$$

ist. In diesem Falle ist nämlich in der That auch umgekehrt

2a) $$z = \frac{-\delta z' + \beta}{\gamma z' - \alpha},$$

und offenbar ist dies die allgemeinste, eindeutig umkehrbare Transformation, welche innerhalb des Körpers $K(z)$ möglich ist. Führen wir in (1) an Stelle von z und dz z' und dz' ein, und ist ζ' die Funktion von z', welche dann als Integrand auftritt, so wird

$$d\omega = \zeta dz = \zeta' dz',$$

d. h. die beiden Integranden ζ und ζ' hängen durch die Gleichung

3) $$\frac{dz'}{dz} = \frac{\zeta}{\zeta'}$$

miteinander zusammen. Differenziert man aber die zwischen z und z' bestehende Gleichung (2), so ergiebt sich für die linke Seite von (3) der Wert

3a) $$\frac{dz'}{dz} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung können wir, falls γ von Null verschieden ist, als Divisorenquotienten schreiben; sie ist eine rationale Funktion von z, welche für $(z = \infty)$ eine Nullstelle zweiter Ordnung, für $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ einen Pol zweiter Ordnung hat und sonst überall den Charakter einer Einheitsfunktion besitzt. Nun besitzt aber die Variable z selbst für $(z = \infty)$ einen einfachen Pol, während dasselbe für die Variable z' in Bezug auf die Stelle $\left(z = -\frac{\delta}{\gamma}\right)$ gilt, wie die Gleichung (2) lehrt; die jenen beiden Stellen zugehörigen Primfaktoren sind also einfach die Nenner der beiden Variabeln z und z'. Bezeichnen wir also diese durch $\mathfrak{n}_z$ und $\mathfrak{n}_{z'}$, so kann man die obige Gleichung (3a) folgendermaſsen schreiben:

$$\text{3b)} \qquad \frac{dz'}{dz} = \frac{\mathfrak{n}_z^2}{\mathfrak{n}_{z'}^2}.$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein, auch wenn $\gamma = 0$ sein sollte; in diesem Falle wird nämlich

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{dz'}{dz} = \frac{\alpha}{\delta};$$

alsdann fallen aber die Pole von z und z' zusammen, es ist also

$$\frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{n}_{z'}} = 1$$

in Übereinstimmung mit der obigen Gleichung. Aus (3) und (3b) ergiebt sich also der folgende Satz:

Ist
$$d\omega = \zeta dz = \zeta' dz'$$
die Darstellung desselben Differentials für die beiden Integrationsvariabeln z und z', so besteht zwischen den beiden Integranden ζ und ζ' die Gleichung

$$\frac{\zeta}{\zeta'} = \frac{\mathfrak{n}_z^2}{\mathfrak{n}_{z'}^2}.$$

Der Quotient

$$\mathfrak{w}_\omega = \frac{\zeta}{\mathfrak{n}_z^2} = \frac{\zeta'}{\mathfrak{n}_{z'}^2}$$

ist also ein rationaler Divisor, welcher von der Wahl der Integrationsvariabeln z ganz unabhängig ist, vielmehr nur von dem Differentiale $d\omega$ selbst abhängt; derselbe soll daher der zu $d\omega$ gehörige Differentialteiler genannt werden.

Umgekehrt ist auch das Differential $d\omega$ durch den zugehörigen Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ vollständig charakterisiert, denn es ist ja für die Integrationsvariable z der zugehörige Integrand ζ durch die Gleichung

$$\zeta = \mathfrak{w}_\omega \mathfrak{n}_z^2,$$

also das Integral ω durch

$$\omega = \int \mathfrak{w}_\omega \mathfrak{n}_z^2 dz$$

bestimmt.

Jeder Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega = \frac{\zeta}{\mathfrak{n}_z^2}$ ist offenbar von der $(-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, und umgekehrt entspricht jedem Divisor $\mathfrak{w}$ von der $(-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ein und nur ein Differential $d\omega$ oder ein einziges Integral ω. Ist nämlich $\mathfrak{w}$ irgend ein Divisor $(-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist das Produkt $\mathfrak{w}\mathfrak{n}_z^2$ ein Divisor nullter Ordnung, es giebt also eine eindeutig bestimmte rationale Funktion ζ von z, deren Nullstellen und Pole genau mit dem Zähler und Nenner von $\mathfrak{w}\mathfrak{n}_z^2$ identisch sind und deren Anfangskoeffizient in $\mathfrak{P}_0$ durch die multiplikative Konstante von $\mathfrak{w}\mathfrak{n}_z^2$ vollständig definiert wird. Also ist das Integral

$$\omega = \int \zeta dz = \int \mathfrak{w}\mathfrak{n}_z^2 dz$$

dasjenige, zu welchem der beliebig gegebene Differentialteiler $\mathfrak{w}$ gehört. Alle rationalen Divisoren einer und derselben Ordnung waren aber untereinander äquivalent, sie gehörten in eine und dieselbe Klasse; also bildet die Gesamtheit aller und nur der Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ eine Klasse W der $(-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Differentialklasse des Körpers $K(z)$ genannt werden soll.

Jeder Divisor $\mathfrak{w}_\omega$ dieser Klasse W entspricht also einem und nur einem rationalen Integrale ω genau ebenso, wie jeder Divisor der nullten Ordnung einem einzigen Element des Körpers $K(z)$ entspricht, und die Untersuchung der Divisoren $\mathfrak{w}_\omega$ dieser Klasse liefert uns die vollständige Theorie der rationalen Differentiale.

Auch hier können und wollen wir das Verhalten eines Integrals ω in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{p}$ der Kugelfläche dadurch charakterisieren, dafs wir ihr wieder den gleichbezeichneten Primfaktor $\mathfrak{p}$ zuordnen, und zwar definieren wir jetzt die Teilbarkeit des Integrals durch einen Primteiler $\mathfrak{p}$ folgendermafsen:

> Ist $\omega = \int \zeta dz$ ein beliebiges Integral, ω_0 die zugehörige Integrationskonstante, so ist $\omega - \omega_0$ genau durch den Divisor $\mathfrak{p}^\varrho$ teilbar, wenn die Entwickelung von $\omega - \omega_0$ in der Umgebung der zugehörigen Stelle $\mathfrak{p}$ in dem früheren Sinne die Ordnungszahl ϱ besitzt. Beginnt jedoch diese Entwickelung speziell mit $\lg(z-a)$ (bzw. $\lg z$ für die Stelle $z=\infty$), so wollen wir sagen, dafs $\omega - \omega_0$ durch $\lg \mathfrak{p}$ teilbar ist.

Das Integral besitzt also dann und nur dann in $\mathfrak{p}$ eine Unstetigkeitsstelle, wenn die gliedweise Integration von ζdz eine Entwickelung

$$\omega - \omega_0 = -\frac{a_{-h}}{(h-1)}\frac{1}{(z-\alpha)^{h-1}} - \cdots - \frac{a_{-2}}{z-\alpha} + a_{-1}\lg(z-\alpha)$$
$$+ a_0(z-\alpha) + \frac{a_1}{2}(z-\alpha)^2 + \cdots$$

ergiebt, wenn also $\omega - \omega_0$ oder, was hier dasselbe ist, wenn ω selbst den zugehörigen Primfaktor $\mathfrak{p}$ in einer negativen Potenz enthält, bzw. durch $\lg \mathfrak{p}$ teilbar ist; dagegen besitzt $\omega - \omega_0$ in $\mathfrak{p}$ dann und nur dann eine Nullstelle, wenn jene Differenz durch eine positive Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist.

Wir sagen nun, ein Integral ω verhält sich an einer Stelle $\mathfrak{p}$ regulär, wenn die Differenz $\omega - \omega_0$ in $\mathfrak{p}$ genau von der ersten Ordnung verschwindet, wenn also in der Umgebung derselben die Entwickelung besteht:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1(z-\alpha) + \omega_2(z-\alpha)^2 + \cdots,$$

wo ω_0 die Integrationskonstante und ω_1 von Null verschieden ist. Dann zeigt man jetzt sehr leicht, dafs ein Integral ω in allen und nur den Punkten $\mathfrak{p}$ nicht regulär ist, welche in dem zugehörigen Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ enthalten sind.

Es sei nämlich ω das vorgelegte Integral, $\mathfrak{w}_\omega$ der zugehörige Differentialteiler und $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primteiler, von dem wir annehmen wollen, dafs er genau d Male in $\mathfrak{w}_\omega$ enthalten ist, wobei d positiv, negativ oder Null sein kann.

Wir wählen nun die Integrationsvariable z nur so, dafs $\mathfrak{p}$ nicht die Unendlichkeitsstelle von z, dafs also $\mathfrak{n}_z$ nicht gleich $\mathfrak{p}$ ist. Dann ist

$$d\omega = \zeta dz,$$

wo die rationale Funktion von z:

$$\zeta = \mathfrak{w}_\omega \mathfrak{n}_z^2$$

den Primfaktor $\mathfrak{p}$ ebenfalls genau in der d^{ten} Potenz enthält. Also erhält man in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}$ die Entwickelung

$$d\omega = \zeta dz = [a_d(z-\alpha)^d + a_{d+1}(z-\alpha)^{d+1} + \cdots]\, dz,$$

und durch gliedweise Integration dieser Reihe ergiebt sich also

$$\omega - \omega_0 = \frac{a_d}{d+1}(z-\alpha)^{d+1} + \cdots$$

oder in dem speziellen Falle, dafs $d = -1$ ist,

$$\omega - \omega_0 = a_{-1}\lg(z-\alpha) + \cdots,$$

d. h. es besteht der Satz:

Ist $\mathfrak{p}$ ein d-facher Teiler des zu ω gehörigen Differentialteilers, so ist das Integral $\omega - \omega_0$ genau durch $\mathfrak{p}^{d+1}$ oder genau durch $\lg \mathfrak{p}$ teilbar, je nachdem $d \gtrless -1$ oder $d = -1$ ist. ω ist also dann und nur dann in Bezug auf $\mathfrak{p}$ regulär, wenn $d = 0$, wenn also $\mathfrak{p}$ gar nicht in $\mathfrak{w}_\omega$ enthalten ist. Schreibt man den Differentialteiler in Form eines Quotienten

$$\mathfrak{w}_\omega = \frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{n}_\omega},$$

so enthält der Nenner alle und nur die Punkte, welche den sämtlichen Unendlichkeitsstellen des Integrals ω entsprechen; und zwar gehört zu jedem einfachen Primteiler von $\mathfrak{n}_\omega$ eine logarithmische Unendlichkeitsstelle, zu jeder Primfaktorenpotenz $\mathfrak{p}^m$ ein Pol der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung in dem Integrale. Ebenso enthält der Zähler $\mathfrak{z}_\omega$ alle und nur die Stellen, für welche $\omega - \omega_0$ von höherer als der ersten Ordnung verschwindet.

§ 3.

Aus dem am Ende des vorigen Abschnittes bewiesenen Satze folgt, daſs der Nenner eines jeden Differentialteilers stets zwei Primfaktoren mehr enthält, als der Zähler: Also giebt es kein Integral ω, welches auf der ganzen Kugelfläche endlich ist, und auch keines, welches nur an einer Stelle logarithmisch unendlich wird; denn dazu müſste der Nenner des zugehörigen Differentialteilers entweder Eins sein, oder nur aus einem einzigen Primfaktor bestehen, was beides unmöglich ist.

Die einfachsten Integrale sind also diejenigen, deren Differentialteiler die Form hat:

$$\mathfrak{w}_\omega = \frac{1}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'},$$

wo also für den zugehörigen Integranden $\zeta = \mathfrak{w}_\omega \mathfrak{n}_z^2$ die Gleichung besteht:

$$\zeta = \frac{\mathfrak{p}_\infty^2}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'};$$

hier sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ zwei beliebige Primfaktoren, welche auch einander gleich sein können, während $\mathfrak{p}_\infty = \mathfrak{n}_z$ den dem unendlich fernen Punkte entsprechenden Primteiler bedeutet.

Es ist leicht, das zu diesem Differentialteiler gehörige Integral aufzustellen; bei geeigneter Wahl der multiplikativen Konstanten wird es, falls $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ voneinander verschieden und $z - \alpha$ und $z - \alpha'$ die zugehörigen Linearfaktoren sind,

$$1)\quad \omega = (\alpha - \alpha')\int \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\alpha')} = \lg(z-\alpha) - \lg(z-\alpha') = \lg \frac{z-\alpha}{z-\alpha'},$$

und man erkennt leicht, daſs die Residuen von $d\omega$ für $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ bzw. $+1$ und -1 sind.

Ist dagegen $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, so ist das zugehörige Integral

$$\text{1a)} \qquad \omega = -\int \frac{dz}{(z-\alpha)^2} = \frac{1}{z-\alpha}.$$

Man erkennt an der expliciten Form jener Integrale ohne weiteres, daſs das erste nur in den Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, und zwar logarithmisch, das zweite nur in $\mathfrak{p}$, und zwar von der ersten Ordnung unendlich wird, während beide in $\mathfrak{p}_\infty$ endlich bleiben. Das zuletzt gefundene ist das erste in der Reihe der folgenden Elementarintegrale:

$$\text{1b)} \qquad -\frac{1}{(\varrho-1)}\int \frac{dz}{(z-\alpha)^\varrho} = \frac{1}{(z-\alpha)^{\varrho-1}} \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots),$$

welche ebenfalls nur an einer einzigen Stelle einen Pol der $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung haben. Fällt speziell der Punkt $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}_\infty$ zusammen, so wird der Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ gleich $\frac{1}{\mathfrak{p}_\infty \mathfrak{p}'}$, also der zugehörige Integrand

$$\zeta = \frac{\mathfrak{p}_\infty}{\mathfrak{p}'} = \frac{1}{z-\alpha'};$$

falls aber auch $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$ wird, so wird $\zeta = 1$. Diesen beiden Fällen entsprechen die einfachen Integrale

$$\text{2)} \qquad \omega = \int \frac{dz}{z-\alpha'} = \lg(z-\alpha')$$

$$\text{2a)} \qquad \omega = \int dz = z,$$

von denen das erste in $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}_\infty$ logarithmisch, das letzte in $\mathfrak{p}_\infty$ von der ersten Ordnung unendlich wird; und den Integralen (1b) entsprechen hier die allgemeineren

$$\text{2b)} \qquad \omega = (\varrho+1)\int z^\varrho\, dz = z^{\varrho+1}.$$

Wir werden später sehen, daſs für die Abelschen Integrale, d. h. für die Integralfunktionen algebraischer Differentiale, im allgemeinen auch solche Funktionen existieren, welche allenthalben endlich sind. Diese wollen wir Integrale erster Gattung nennen. Man nennt ferner die Integrale, welche nur eine polare Unstetigkeit von beliebig hoher Ordnung besitzen, Elementarintegrale zweiter Gattung, und endlich diejenigen, welche nur zwei logarithmische Unstetigkeitsstellen haben, Elementarintegrale dritter Gattung. Für das hier betrachtete Gebiet ergiebt sich also der folgende Satz:

> Unter den Integralfunktionen rationaler Differentiale giebt es keine Integrale erster Gattung; die Elementarintegrale zweiter Gattung sind hier rationale Funktionen von z, nämlich
>
> $$-\frac{1}{\varrho-1}\int \frac{dz}{(z-\alpha)^\varrho} = \frac{1}{(z-\alpha)^{\varrho-1}} \quad \text{oder} \quad (\varrho+1)\int z^\varrho\, dz = z^{\varrho+1};$$

nur das Elementarintegral dritter Gattung ist transcendent, nämlich gleich

$$\lg \frac{z-\alpha}{z-\alpha'}, \quad \text{oder} \quad \lg(z-\alpha')$$

je nachdem der Punkt $(z=\alpha)$ im Endlichen liegt oder der unendlich ferne Punkt ist.

Wir werden später sehen, dafs jedes Abelsche Integral als homogene lineare Funktion der Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung dargestellt werden kann. Hier ist dieser Satz eine unmittelbare Folge der auf S. 16 bewiesenen Thatsache, dafs jede Gröfse des Körpers $K(z)$ in Partialbrüche zerlegt werden kann. Ist nämlich $\omega = \int \zeta dz$, so kann ζ homogen und linear durch eine endliche Anzahl einfacher Funktionen dargestellt werden, welche die Form haben:

$$\frac{1}{(z-\alpha)^{\varrho}}, \quad \frac{1}{z-\alpha}, \quad z^{\sigma} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 2, 3, \ldots \\ \sigma = 0, 1, \ldots \end{pmatrix};$$

hieraus folgt aber durch Multiplikation mit dz und darauf folgender Integration, dafs jedes Integral ω gleich einer Summe von Elementarintegralen von der Form

$$\int \frac{dz}{(z-\alpha)^{\varrho}}, \quad \int \frac{dz}{(z-\alpha)}, \quad \int z^{\sigma} dz$$

ist, und dies sind ja gerade die vorher betrachteten Elementarintegrale zweiter und dritter Gattung.

§ 4.

Wir wollen jetzt genauer untersuchen, in welcher Weise ein Integral

$$\omega = \int \zeta dz$$

vom Integrationswege abhängt; wir werden da auf die beiden aus der Funktionentheorie bekannten Definitionen des bestimmten Integrals hingeführt, an welche an dieser Stelle nur kurz erinnert werden soll.

Es sei

$$1) \qquad \zeta = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

das Element einer analytischen Funktion in der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{p}_0$ der Kugelfläche; ist dann $\mathfrak{p}$ ein innerhalb des Konvergenzbereiches von ζ liegender Punkt, und z der zugehörige Wert der Variabeln, so ist

$$2) \qquad \omega(\mathfrak{p}_0) = \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} \zeta dz = a_0(z-z_0) + \frac{a_1}{2}(z-z_0)^2 + \frac{a_2}{3}(z-z_0)^3 + \cdots$$

das zwischen den Grenzen $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}$ genommene bestimmte Integral von ζdz, nämlich das auch in Bezug auf die additive Konstante völlig bestimmte Element der Integralfunktion, welches sich auf Null reduziert,

wenn der Punkt $\mathfrak{p}$ innerhalb des Bereiches der Potenzreihe auf irgend einem Wege mit $\mathfrak{p}_0$ zur Koincidenz gebracht wird.

Es liege nun der reguläre endliche Punkt $\mathfrak{p}$ aufserhalb des Konvergenzbereiches der Reihe (1). Wir denken uns jetzt das Integral (2) auf einem beliebig, aber fest gegebenen Wege s von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}$ fortgesetzt, welcher nicht durch einen der Pole von ζ hindurchgeht. Es seien $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\varrho$ eine Reihe von Punkten auf der

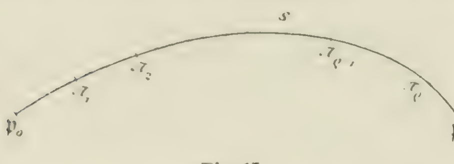


Fig. 17.

Kurve s, welche so gewählt sind, dafs jeder folgende π_{i+1} in dem Konvergenzbereiche der Fortsetzung $\omega(\pi_i)$ sich befindet, welche dem Mittelpunkte π_i entspricht, so gelangt man, von $\omega(\mathfrak{p}_0)$ ausgehend, nach einer endlichen Anzahl von Fortsetzungen zu einem eindeutig bestimmten Funktionenelemente

$$\omega(\pi_\varrho) = g_0 + g_1(z - z_\varrho) + g_2(z - z_\varrho)^2 + \cdots,$$

welches das auf dem Wege s gebildete bestimmte Integral genannt und ebenfalls durch $\int\limits_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} \zeta dz$ bezeichnet wird. Dasselbe ist auch vollständig durch die beiden Eigenschaften charakterisiert, dafs seine Ableitung nach z gleich ζ ist, und dafs es gleich Null wird, sobald der Punkt $\mathfrak{p}$ auf dem Wege s nach $\mathfrak{p}_0$ zurückgeht.

Man kann aber dasselbe Integral, wie Cauchy gezeigt hat, noch auf andere Art definieren und mit jeder vorgegebenen Genauigkeit berechnen. Zu diesem Zwecke schalten wir zwischen $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}$ auf dem Wege s beliebig viele Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\mu$ nach irgend einem Gesetze, aber so ein,

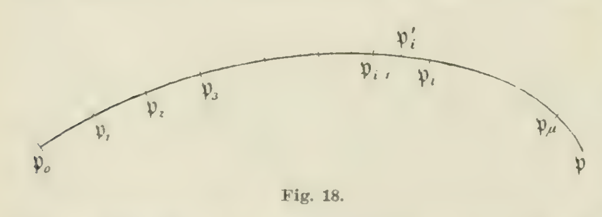


Fig. 18.

dafs dieselben mit wachsendem μ unendlich nahe aneinander rücken. Es seien dann $z_0, z_1, z_2, \ldots z_\mu, z$ die zu $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}$ gehörigen Werte von z, und es sei allgemein ζ_i der Wert des Integranden ζ in einem in dem Intervalle $(\mathfrak{p}_{i-1}, \ldots \mathfrak{p}_i)$ beliebig angenommenen Punkte $\mathfrak{p}_i'$, welcher auch mit $\mathfrak{p}_{i-1}$ oder mit $\mathfrak{p}_i$ zusammenfallen kann. Dann beweist man in der Integralrechnung, dafs die Summe

$$\zeta_1(z_1 - z_0) + \zeta_2(z_2 - z_1) + \cdots + \zeta_{\mu+1}(z - z_\mu)$$

mit wachsendem μ gegen einen nur von ζ und dem Wege s abhängigen Grenzwert konvergiert. Derselbe ist eine analytische Funktion der komplexen Variabeln z, welche sich auf Null reduziert, sobald der

Punkt $\mathfrak{p}$ auf dem Wege s gegen $\mathfrak{p}_0$ konvergiert; und durch die Anwendung des Mittelwertsatzes ergiebt sich leicht, daſs ihre nach z genommene Ableitung gleich ζ ist. Der Grenzwert jener Summe ist also mit dem vorher definierten bestimmten Integrale $\int\limits_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} \zeta dz$ identisch.

Fällt der Endpunkt $\mathfrak{p}$ des Integrationsweges mit einem der Pole von ζ oder dem Südpole $\mathfrak{p}_\infty$ der Kugelfläche zusammen, so ist der Wert des zugehörigen Integrals in bekannter Weise als doppelter Grenzwert zu definieren, so daſs z. B.

$$\int\limits_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_\infty} \zeta dz = \lim_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_\infty} \int\limits_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} \zeta dz$$

ist, wenn $\mathfrak{p}$ auf dem vorgeschriebenen Wege s in $\mathfrak{p}_\infty$ übergeht.

Wir denken uns nun ein Funktionenelement $\omega(\mathfrak{p}_0)$ der Integralfunktion auf einem geschlossenen, keine Unstetigkeitsstelle von ω enthaltenden Wege s auf der Kugelfläche fortgesetzt und wieder nach $\mathfrak{p}_0$ zurückgeführt; dann kann man entweder wieder zu demselben Elemente $\omega(\mathfrak{p}_0)$ zurückgeführt werden, oder jenes Element geht nach diesem Umlaufe in ein anderes zu $\mathfrak{p}_0$ gehöriges Element über, welches sich aber nach der früher gemachten Bemerkung nur um eine additive Konstante von $\omega(\mathfrak{p}_0)$ unterscheiden kann. Wir untersuchen, welcher von diesen beiden Fällen bei einem gegebenen Umlaufe eintritt.

Wir beweisen nun wörtlich ebenso wie auf S. 80 den folgenden Fundamentalsatz, durch den diese Frage vollständig gelöst wird:

> Umschlieſst die Umlaufskurve s keinen einzigen der logarithmischen Punkte von ω, so bleibt $\omega(\mathfrak{p}_0)$ bei einem Umlaufe längs s ungeändert.

Ändert sich nämlich $\omega(\mathfrak{p}_0)$ bei einem Umlaufe längs s, so können wir s wieder durch eine Kurve $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ in zwei geschlossene Kurven s_1 und s_2 der gleichen Art zerlegen und zeigen, daſs sich $\omega(\mathfrak{p})$ bei mindestens einem dieser kleineren Umläufe ebenfalls ändern muſs. Ist dies für s_1 der Fall und teilt man dann das Gebiet s_1 in gleicher Weise in zwei Teile und fährt so fort, so zeigt sich genau wie a. a. O., daſs sich $\omega(\mathfrak{p}_0)$ nur dann bei einem Umlaufe s ändern kann, wenn es im Innern von s mindestens einen

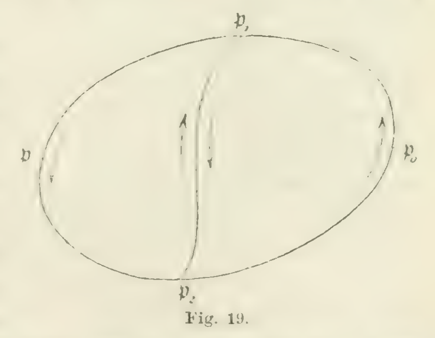


Fig. 19.

Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ giebt, für welchen dasselbe gilt, wenn man $\omega(\mathfrak{p})$ auf einer beliebig kleinen geschlossenen Kurve σ um $\bar{\mathfrak{p}}$ herum fortsetzt.

Ist aber $\mathfrak{p}$ kein logarithmischer Punkt und

$$\omega(\overline{\mathfrak{p}}) = a_d(z-\overline{\alpha})^d + a_{d+1}(z-\overline{\alpha})^{d+1} + \cdots$$

das zugehörige Funktionenelement, während die Ordnungszahl d auch negativ sein kann, und wählt man die Umlaufskurve σ so klein, dafs sie ganz in dem Konvergenzbereiche von $\omega(\overline{\mathfrak{p}})$ liegt, so kann man auch hier einfach die Änderung dieses Funktionenelementes untersuchen, wenn die Variable z den Umlauf σ um $\overline{\mathfrak{p}}$ ausführt. Dann ergiebt sich aber genau wie auf S. 83 flg., dafs die Potenzreihe $\omega(\overline{\mathfrak{p}})$ bei jenem Umlaufe ganz ungeändert bleibt, und damit ist unser Satz vollständig bewiesen. Wir können dasselbe Resultat ebenso wie auf S. 82 folgendermafsen aussprechen:

> Setzt man ein Element $\omega(\mathfrak{p}_0)$ der Integralfunktion von einem Punkte $\mathfrak{p}_0$ zu einem anderen $\mathfrak{p}$ auf zwei verschiedenen Wegen s und s' fort, welche keinen der logarithmischen Punkte jenes Integrals einschliefsen, so gelangt man beide Male zu demselben Elemente $\omega(\mathfrak{p})$.

§ 5.

Der am Ende des vorigen Abschnittes bewiesene Satz ermöglicht es uns nun, den Bereich $\mathfrak{K}$ der Funktion ω so zu beschränken, dafs sie eine eindeutige Funktion des Ortes wird. Es seien nämlich

$$\mathfrak{p}^{(1)}, \quad \mathfrak{p}^{(2)}, \ldots \mathfrak{p}^{(\mu)}$$

alle logarithmischen Punkte von ω, und $\mathfrak{p}^{(0)}$ ein beliebiger anderer Punkt von $\mathfrak{K}$. Führen wir dann von $\mathfrak{p}^{(0)}$ nach jedem der μ Punkte $\mathfrak{p}^{(i)}$ einen Schnitt S_i so, dafs die μ Schnitte

$$S_1, \quad S_2, \ldots S_\mu$$

weder sich selbst noch einander durchsetzen, so erhalten wir eine zerschnittene, aber zusammenhängende Kugelfläche $\overline{\mathfrak{K}}$, und aus dem soeben erwähnten Satze folgt, dafs ein beliebiges Element $\omega(\mathfrak{p}_0)$ des Integrals nebst seinen Fortsetzungen auf $\overline{\mathfrak{K}}$ eine eindeutige Funktion des Ortes ist. Setzt man nämlich $\omega(\mathfrak{p}_0)$ auf zwei verschiedenen, aber ganz innerhalb $\overline{\mathfrak{K}}$ verlaufenden Wegen fort, so können diese niemals einen oder mehrere von den Punkten $\overline{\mathfrak{p}}_i$ einschliefsen; es ist also in der That $\omega(\mathfrak{p})$ auf $\overline{\mathfrak{K}}$ eine eindeutige Funktion des Ortes. Sie ist auch offenbar mit Ausnahme der in endlicher Anzahl vorhandenen Pole von ω eine überall stetige Funktion des Ortes.

Dagegen können sich zwei Elemente $\omega(\mathfrak{p})$ und $\omega(\mathfrak{p}')$, welche zwei unendlich nahen gegenüberliegenden Punkten auf den beiden Ufern

eines Schnittes S_i entsprechen, sehr wohl voneinander unterscheiden. Da aber zwei solche Punkte auf $\mathfrak{K}$ unendlich benachbart sind, obwohl für $\mathfrak{K}$ nicht dasselbe gilt, so können sich die Funktionenelemente $\omega(\mathfrak{p})$ und $\omega(\mathfrak{p}')$ nur um eine noch unbekannte Konstante c_i unterscheiden, d. h. es ist

$$\omega(\mathfrak{p}') = \omega(\mathfrak{p}) + c_i.$$

Setzt man nun beide Elemente $\omega(\mathfrak{p}')$ und $\omega(\mathfrak{p})$ längs des Schnittes zu zwei ebenfalls benachbarten Punkten $\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{p}_1$ fort, so bleibt jene Gleichung bestehen, d. h. es ist auch

$$\omega(\mathfrak{p}_1') = \omega(\mathfrak{p}_1) + c_i,$$

und dasselbe ist für alle Punkte längs des ganzen Schnittes S_i der Fall. Um diese für den ganzen Schnitt S_i unveränderliche Konstante ein für alle Male in eindeutig bestimmter Weise zu bezeichnen, denken wir uns jeden dieser Schnitte S_i von $\mathfrak{p}^{(0)}$ als Anfangspunkt nach $\mathfrak{p}^{(i)}$ als Endpunkt gezogen und nennen wieder dasjenige Ufer von S_i das rechte bzw. das linke, welches sich beim Fortgange in positiver Richtung auf der rechten bzw. linken Seite befindet. Sind dann $\mathfrak{p}_\lambda$ und $\mathfrak{p}_\varrho$ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer von S_i einander gegenüberliegende Punkte von $\mathfrak{K}$, so soll die für den ganzen Schnitt konstante Differenz

$$c_i = \omega(\mathfrak{p}_\lambda) - \omega(\mathfrak{p}_\varrho) \tag{1}$$

der zu S_i gehörige Periodizitätsmodul genannt werden.

Es ist jetzt sehr leicht, den zu einem solchen Schnitte S_1 gehörigen Periodizitätsmodul c_1 aus der für den Punkt $\mathfrak{p}^{(1)}$ giltigen Entwickelung zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wählen wir die beiden gegenüberliegenden Punkte $\mathfrak{p}_\lambda$ und $\mathfrak{p}_\varrho$ so nahe an $\mathfrak{p}^{(1)}$, daſs sie beide innerhalb des Konvergenzbereiches des Elementes $\omega(\mathfrak{p}^{(1)})$ liegen.

Setzt man nun das Element $\omega(\mathfrak{p}_\varrho)$ auf einem kleinen Kreise um den Mittelpunkt $\mathfrak{p}^{(1)}$ herum nach $\mathfrak{p}_\lambda$, also so fort, daſs das Innere des Kreises links bleibt, so geht $\omega(\mathfrak{p}_\varrho)$ in das Element $\omega(\mathfrak{p}_\lambda)$ über, welches sich von $\omega(\mathfrak{p}_\varrho)$ eben um die Konstante c_1 unterscheidet. Liegt der Punkt $\mathfrak{p}^{(1)}$ im Endlichen auf der Kugel, und ist $\bar{\mathfrak{p}}^{(1)}$ sein Bild in der Horizontalebene, so entspricht einer Umkreisung im positiven Umlaufssinne von $\mathfrak{p}^{(1)}$ eine Umkreisung im gleichen Sinne von $\bar{\mathfrak{p}}^{(1)}$. In diesem Falle ist also das zu $\mathfrak{p}^{(1)}$ gehörige Funktionenelement

$$\omega(\mathfrak{p}_{(1)\varrho}) = \varrho_1 \lg(z-\alpha) + \psi(z\,|\,\alpha), \tag{2}$$

wenn ϱ_1 das zu $\mathfrak{p}^{(1)}$ gehörige Residuum des Differentiales $d\omega$ bedeutet, $\psi(z\,|\,\alpha)$ nach ganzen Potenzen von $z-\alpha$ fortschreitet und

sich demnach bei jener Umkreisung von $\mathfrak{p}^{(1)}$ gar nicht ändert. Ist nun für den Punkt $\mathfrak{p}_\varrho$

$$z - \alpha = re^{\varphi_0 i}, \quad \lg(z-\alpha) = \lg r + \varphi_0 i,$$

so bleibt bei dem positiven Umlaufe von $\mathfrak{p}_\varrho$ nach $\mathfrak{p}_\lambda$ r ungeändert, während φ_0 in $\varphi_0 + 2\pi$ übergeht. Es vermehrt sich also bei jenem Umlaufe $\varrho_1 \lg(z-\alpha)$ um $2\pi i \varrho_1$, und dasselbe gilt wegen (2) auch für das ganze Element $\omega(\mathfrak{p}_\varrho)$; also ist in diesem Falle der gesuchte Periodizitätsmodul $c_1 = 2\pi i \varrho_1$, d. h. gleich dem Residuum des Differentiales $d\omega$ für jene Stelle, multipliziert mit $2\pi i$.

Ist dagegen $\mathfrak{p}^{(1)}$ speziell der Südpol O' der Kugelfläche, so entspricht einem Umlaufe um O' auf einem sehr kleinen Kreise, bei welchem O' links bleibt, eine Umkreisung des Nullpunktes der Horizontalebene auf einem sehr grofsen Kreise, bei welcher der Nullpunkt stets rechts bleibt, also eine Umkreisung des Nullpunktes im negativen Umlaufssinne. Ist also in diesem Falle das zu $\mathfrak{p}^{(1)}$ gehörige Funktionenelement

$$\omega(\mathfrak{p}^{(1)}) = -\varrho_1 \lg z + \psi\left(\frac{1}{z}\right),$$

wo ϱ_1 wieder das zu $\mathfrak{p}^{(1)} = \mathfrak{p}_\infty$ zugehörige Residuum von $d\omega$ ist, und setzt man wiederum für den Punkt $\mathfrak{p}_\varrho$

$$z = re^{\varphi_0 i}, \quad \lg z = \lg r + \varphi_0 i,$$

so bleibt bei jenem negativen Umlaufe wieder r ungeändert, während jetzt φ_0 in $\varphi_0 - 2\pi$ übergeht. Also wird auch in diesem Falle

$$\omega(\mathfrak{p}_\lambda) = \omega(\mathfrak{p}_\varrho) + 2\pi i \varrho_1,$$

d. h. der gesuchte Periodizitätsmodul c_1 ist gleich $+2\pi i \varrho_1$, d. h. wiederum gleich dem Residuum ϱ_1 für die Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ multipliziert mit $2\pi i$. Es ergiebt sich also der allgemeine Satz:

> Der Periodizitätsmodul für den einem logarithmischen Punkte zugeordneten Schnitt ist stets gleich dem Residuum des Differentiales für jenen Schnitt, multipliziert mit $2\pi i$.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir jetzt den Wert der Integralfunktion für einen ganz beliebigen Integrationsweg darstellen. Wir denken uns dieselbe von einem beliebigen Elemente $\overline{\omega}(\mathfrak{p}_0)$ aus auf der ganzen zerschnittenen Kugelfläche $\overline{\mathfrak{K}}$ fortgesetzt und bezeichnen mit $\overline{\omega}(\mathfrak{p})$ das so sich ergebende eindeutig bestimmte, zu einem Punkte $\mathfrak{p}$ gehörige Funktionenelement. Heben wir jetzt die Beschränkung auf, dafs der Integrationsweg die μ Schnitte $S_1, S_2, \ldots S_\mu$ nicht überschreiten darf, so müssen wir jedesmal, wenn der Weg s z. B. den Schnitt S_1 überschreitet, $\pm 2\pi i \varrho_1$ hinzufügen, wo das positive oder das negative Vor-

zeichen zu wählen ist, je nachdem s jenen Schnitt vom linken nach dem rechten oder vom rechten nach dem linken Ufer überschreitet; wir wollen einen solchen Übergang je nach den beiden möglichen Richtungen einen positiven oder einen negativen Übergang nennen. Für einen ganz beliebig gewählten Integrationsweg s von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}$ hin ergiebt sich also

$$\omega(\mathfrak{p}) = \bar{\omega}(\mathfrak{p}) + (m_1 \varrho_1 + m_2 \varrho_2 + \cdots + m_\mu \varrho_\mu) 2\pi i,$$

wo $m_1, m_2, \ldots m_\mu$ positive oder negative ganze Zahlen oder Null sind und wo allgemein m_i die Anzahl der positiven Übergänge von s über den Schnitt S_i vermindert um die der negativen angiebt.

Wir wollen dieses Resultat benutzen, um eine wichtige Eigenschaft der Residuen eines beliebigen Differentiales $d\omega$ abzuleiten. Es seien wieder $\mathfrak{p}^{(1)}, \mathfrak{p}^{(2)}, \ldots \mathfrak{p}^{(\mu)}$ alle diejenigen Punkte von $\mathfrak{K}$, für welche seine Residuen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$ von Null verschieden sind, d. h. alle logarithmischen Punkte des zugehörigen Integrals

$$\omega = \int \zeta dz.$$

Es seien dann wieder $S_1, S_2, \ldots S_\mu$ die Schnitte, welche die logarithmischen Punkte $\mathfrak{p}^{(i)}$ mit dem regulären Punkte $\mathfrak{p}^{(0)}$ verbinden. Bilden wir dann das um $\mathfrak{p}^{(0)}$ auf einem kleinen Kreise in positiver Richtung erstreckte Integral, so ist es gleich Null, weil es keinen logarithmischen Punkt umschliefst; andererseits ist es gleich $2\pi i(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\mu)$, weil der Integrationsweg jeden Schnitt in der Richtung vom rechten zum linken Ufer überschreitet. Also ergiebt sich der Satz:

Die Summe aller Residuen eines beliebigen rationalen Differentiales $d\omega$ ist stets gleich Null.

Derselbe Satz kann auch direkt aus der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion gefolgert werden. Da nämlich jedes Differential $d\omega$ als Summe einer endlichen Anzahl von Differentialen zweiter und dritter Gattung

$$\frac{dz}{(z-\alpha)^\varrho}, \quad \frac{dz}{z-\alpha}, \quad z^\sigma dz \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 2, 3, \ldots \\ \sigma = 0, 1, \ldots \end{pmatrix}$$

mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist, so braucht wegen des auf S. 272 bewiesenen Satzes nur gezeigt zu werden, dafs die Summe der Residuen für jedes von diesen Differentialen für sich gleich Null ist. Aber die beiden ersten Differentiale besitzen offenbar nirgends ein von Null verschiedenes Residuum, weil ihr Integral keine logarithmische

Stelle hat, und das Differential $\frac{dz}{z-\alpha}$ hat an der Stelle $(z=\alpha)$ das Residuum $+1$, für $(z=\infty)$ das Residuum -1, da für grofse Werte von z

$$\frac{1}{z-\alpha}=\frac{1}{z}+\frac{\alpha}{z^2}+\cdots$$

ist, und damit ist jener Satz direkt bewiesen.

Alle hier gefundenen Sätze für die Integrale rationaler Differentiale ergeben sich als ganz spezielle Fälle aus der Theorie der Integrale algebraischer Differentiale oder der Abelschen Integrale, zu deren Untersuchung wir jetzt übergehen. Wir hielten es aber für zweckmäfsig, diese einfacheren Funktionen für sich zu betrachten, um an diesem Beispiele die allgemeine Theorie deutlich machen und um die hier gewonnenen Resultate für die allgemeine Untersuchung verwerten zu können.

Neunzehnte Vorlesung.

Die Integralfunktionen algebraischer Differentiale oder die Abelschen Integrale. — Ihre logarithmischen Stellen. — Die Residuen der algebraischen Differentiale. — Der zu einem Abelschen Integrale gehörige Differentialteiler. — Das Geschlecht des Körpers $K(z, u)$. — Die zu dem Körper $K(z, u)$ gehörige Differentialklasse W. — Die Fundamentalaufgabe in der Theorie der Abelschen Integrale und ihre vollständige Lösung. — Anwendung: Aufstellung eines vollständigen Systems von unabhängigen Integralen erster Gattung. — Die Anzahl derselben ist dem Geschlechte des Körpers $K(z, u)$ gleich. — Der Riemann-Rochsche Satz. — Folgerungen: Bestimmung eines vollständigen Systems unabhängiger Integrale mit gegebenen Unstetigkeitsbedingungen.

§ 1.

Wir gehen jetzt dazu über, die in den früheren Vorlesungen gefundenen Resultate für die Untersuchung der Integralfunktionen algebraischer Differentiale, der sogenannten Abelschen Integrale, zu verwenden.

Wir wollen hier wieder von dem algebraischen Körper $K(z, u)$ ausgehen, wo z eine beliebig, aber fest gewählte unabhängige Variable jenes Körpers ist; wir betrachten also die Elemente des Körpers K als rationale Funktionen von z und u oder auf der n-blättrigen Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$. Es sei nun ξ eine beliebige Funktion des Körpers. Dann verstehen wir wieder unter dem unbestimmten Integrale des Differentials ξdz

$$\omega(z) = \int \xi dz$$

eine jede Funktion $\omega(z)$, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d\omega}{dz} = \xi$$

genügt und durch sie bis auf eine additive Konstante für jede Stelle der Fläche $\mathfrak{R}_z$ eindeutig definiert ist, da der Integrand ξ auf der ganzen Riemannschen Kugelfläche eine eindeutige Funktion des Ortes ist.

In der That, ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Fläche $\mathfrak{R}_z$, und zwar um gleich den allgemeinsten Fall zu betrachten, ein a-blättriger Verzweigungspunkt derselben, so lautet die Entwickelung von ξ in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ folgendermaſsen:

$$\xi = e_d(z-\alpha)^{\frac{d}{a}} + e_{d+1}(z-\alpha)^{\frac{d+1}{a}} + \cdots,$$

mit der Maſsgabe, daſs, falls $\mathfrak{P}$ die unendlich ferne Stelle ($z = \infty$) entspricht, $z - \alpha$ durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen ist. Da diese Potenzreihe in endlicher Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ gleichmäſsig konvergiert, so findet man die Entwickelung des Integrals ω in der Umgebung von $\mathfrak{P}$, abgesehen von einer Konstanten, dadurch, daſs man jene Reihe gliedweise integriert. Wir wollen diese Konstante im folgenden stets durch ω_0 bezeichnen.

Beachten wir nun wieder, daſs bei Weglassung der Integrationskonstanten allgemein für einen beliebigen positiven oder verschwindenden oder negativen Wert von λ, der nicht $= -1$ ist,

$$\int (z-\alpha)^\lambda \, dz = \frac{1}{\lambda+1}(z-\alpha)^{\lambda+1},$$

dagegen für $\lambda = -1$

$$\int \frac{dz}{z-\alpha} = \lg(z-\alpha)$$

ist, so erkennen wir, daſs das gesuchte Integral $\omega - \omega_0$ in der Umgebung einer jeden Stelle $\mathfrak{P}$ ebenfalls in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, welche für jede reguläre Stelle $\mathfrak{P}$ nach ganzen Potenzen von $z - \alpha$, für einen a-blättrigen Verzweigungspunkt nach Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet, welche ferner kein konstantes Glied und nur eine endliche Anzahl von Gliedern negativer Ordnung enthalten kann. Der einzige Unterschied gegen die algebraischen Funktionen besteht darin, daſs, falls in der Entwickelung des Integranden das Glied

$$\frac{r}{z-\alpha}$$

vorkommt, das Integral $\omega - \omega_0$ wieder das logarithmische Glied

$$r \cdot \lg(z-\alpha)$$

enthält, während für die Umgebung eines der unendlich fernen Punkte $\mathfrak{P}^{(\infty)}$ durch die Integration des Gliedes

$$\frac{\bar{r}}{z}$$

in dem Integrale das logarithmische Glied $\bar{r}\lg z$ auftreten kann, welches wieder schwächer unendlich wird, als jede Potenz von $z - \alpha$ mit einem noch so kleinen negativen Exponenten. Auch diese Stellen sollen l o g a r i t h m i s c h e S t e l l e n von ω genannt werden, und man zeigt genau wie auf S. 271, daſs jedes Integral ω nur eine endliche Anzahl von logarithmischen Stellen besitzen kann. Beachten wir also nur, daſs für einen a-blättrigen Verzweigungspunkt das Entwickelungselement

nicht $z-\alpha$ sondern $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ ist, so sehen wir genau ebenso, wie auf S. 271, dafs für eine jede Stelle $\mathfrak{P}$ das zugehörige Element $\omega(\mathfrak{P})$ der Integralfunktion durch eine Gleichung bestimmt ist:

$$1)\qquad \omega(\mathfrak{P}) = \varrho \lg (z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + \psi(z|\alpha),$$

wo ϱ für alle und nur die logarithmischen Stellen von Null verschieden ist, während $\psi(z|\alpha)$ eine Reihe bedeutet, welche nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet und nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen von $z-\alpha$ enthält. Auch hier wird der somit eindeutig bestimmte Koeffizient ϱ von $\lg (z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ das Residuum des Differentiales $d\omega$ für die Stelle $\mathfrak{P}$ genannt. Durch Differentiation nach z folgt aus (1) die Gleichung

$$\xi(\mathfrak{P}) = \frac{d\omega(\mathfrak{P})}{dz} = \frac{\varrho}{a}\cdot\frac{1}{z-\alpha} + \psi'(z|\alpha),$$

falls $\mathfrak{P}$ eine endliche, und

$$\xi(\mathfrak{P}) = \frac{d\omega(\mathfrak{P})}{dz} = -\frac{\varrho}{a}\cdot\frac{1}{z} + \psi'\left(\frac{1}{z}\right),$$

falls $\mathfrak{P}$ eine der unendlich fernen Stellen ist; also ist in den beiden unterschiedenen Fällen $\pm\frac{\varrho}{a}$ der Koeffizient von $\frac{1}{z-\alpha}$ bzw. von $\frac{1}{z}$ in der Entwickelung des Integranden $\xi(\mathfrak{P})$; es ergiebt sich somit der Satz:

> Ist r der Koeffizient von $\frac{1}{z-\alpha}$ bzw. von $\frac{1}{z}$ in der Entwickelung des Integranden ξ in der Umgebung eines endlichen bzw. unendlich fernen Punktes $\mathfrak{P}$ von der Verzweigungsordnung $a-1$, so ist das Residuum des Differentiales ξdz gleich $+ar$ bzw. gleich $-ar$.

Auch für die Abelschen Integrale können und wollen wir ihr Verhalten in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ dadurch charakterisieren, dafs wir derselben wieder den gleichbezeichneten Primfaktor $\mathfrak{P}$ zuordnen, und zwar definieren wir jetzt die Teilbarkeit des Integrals durch den Primfaktor $\mathfrak{P}$ folgendermafsen:

> Ist ω ein Abelsches Integral $\int \xi dz$ und ω_0 die zugehörige Konstante, so ist $\omega-\omega_0$ durch den Divisor $\mathfrak{P}^{\sigma}$ teilbar, wenn die Entwickelung der Differenz $\omega-\omega_0$ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ in dem früheren Sinne die Ordnungszahl σ besitzt; beginnt jedoch diese Entwickelung speziell mit $\lg(z-\alpha)$, so wollen wir sagen, dafs $\omega-\omega_0$ durch $\lg\mathfrak{P}$ teilbar ist.

Das Integral besitzt also an der Stelle $\mathfrak{P}$ eine Unstetigkeitsstelle, wenn $\omega-\omega_0$ oder, was dasselbe ist, wenn ω den Primfaktor $\mathfrak{P}$ in

einer negativen Potenz enthält oder durch $\lg\mathfrak{P}$ teilbar ist; es verhält sich in $\mathfrak{P}$ regulär, wenn $\omega - \omega_0$ durch eine positive Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar ist.

Ist ξ dem Divisor $\mathfrak{Q}_\xi$ äquivalent, so ist das Verhalten von $\omega - \omega_0$ an jeder einzelnen Stelle $\mathfrak{P}$ durch die Potenz des zugehörigen Primfaktors $\mathfrak{P}^r$ vollkommen bestimmt, welche in ξ enthalten ist; jedoch ist dieser Zusammenhang nicht für jeden Punkt in gleicher Weise zu charakterisieren, wir müssen vielmehr die Fälle unterscheiden, wo $\mathfrak{P}$ ein regulärer oder ein Verzweigungspunkt oder ein unendlich ferner Punkt der Riemannschen Fläche ist. Ist z. B. für einen regulären Punkt ξ von positiver Ordnung

$$\xi = e_r(z-\alpha)^r + e_{r+1}(z-\alpha)^{r+1} + \cdots,$$

so ergiebt sich durch Integration

$$\omega - \omega_0 = \int \xi\, dz = \frac{e_r}{r+1}(z-\alpha)^{r+1} + \frac{e_{r+1}}{r+2}(z-\alpha)^{r+2} + \cdots,$$

d. h. $\omega - \omega_0$ ist genau durch $\mathfrak{P}^{r+1}$ teilbar, wenn der Integrand den Divisor $\mathfrak{P}^r$ besitzt. Dagegen folgt für einen a-blättrigen Verzweigungspunkt aus

$$\xi = e_r(z-\alpha)^{\frac{r}{a}} + e_{r+1}(z-\alpha)^{\frac{r+1}{a}} + \cdots$$

die Entwickelung

$$\omega - \omega_0 = \frac{a e_r}{r+a}(z-\alpha)^{\frac{r+a}{a}} + \cdots,$$

d. h. $\omega - \omega_0$ enthält den Divisor $\mathfrak{P}^{r+a}$, wenn der Integrand ξ durch $\mathfrak{P}^r$ teilbar war, und noch gröſser wird die Anzahl der Möglichkeiten, wenn man den Fall negativer Ordnungszahlen mit berücksichtigt und auſserdem noch zuläſst, daſs die Stelle $(z = \alpha)$ auch die unendlich ferne sein kann.

Diese Unregelmäſsigkeit rührt aber einfach daher, daſs wir für die Entwickelung eine bestimmte Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ zu Grunde gelegt haben, denn alle hier geschilderten Besonderheiten hängen ja von der Wahl der unabhängigen Variabeln und der zugehörigen Kugelfläche ab, und sie können beseitigt werden, wenn man die Variable z durch eine andere ersetzt; dann treten aber andere besondere Punkte auf. Um nun ein für allemal sämtliche Besonderheiten zu beseitigen, wollen wir im nächsten Paragraphen eine Darstellung der algebraischen Differentiale $d\omega = \xi dz$ angeben, welche eine Verallgemeinerung der a. S. 275 für die rationalen Differentiale gefundenen ist und welche ebenso wie die Darstellung der Funktionen ξ des Körpers K durch

den zugehörigen Divisor $\mathfrak{Q}_z$ ganz unabhängig von der Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$ ist; wir werden dann die Beziehungen zwischen dem Differentiale $d\omega$ und dem zugehörigen bestimmten Integrale $\omega - \omega_0$ in Bezug auf jeden Primfaktor in überraschend einfacher Weise angeben können.

§ 2.

Es seien ξ und η zwei beliebige nicht konstante Gröfsen des Körpers K, und es möge

$$F(\xi, \eta) = 0$$

die zwischen ihnen bestehende irreduktible algebraische Gleichung sein. Dann ergiebt sich aus ihr durch Differentiation die Gleichung

$$\text{1)} \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{\partial F}{\partial \eta}} = -\frac{F'_\xi}{F'_\eta},$$

d. h. das Verhältnis der beiden Differentiale $d\xi$ und $d\eta$ ist als rationale Funktion von ξ und η eine Gröfse des Körpers K, welche also durch den zu ihr gehörenden Divisor vollständig bestimmt ist. Wir stellen uns daher die für das Folgende fundamentale Aufgabe, diesen Divisor zu berechnen.

Wegen der Gleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dz} : \frac{d\xi}{dz}$$

genügt es offenbar, zu bestimmen, wie oft ein beliebiger Primdivisor $\mathfrak{P}$ in jedem der beiden Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dz}$ und $\frac{d\eta}{dz}$ enthalten ist, wenn z irgend eine Gröfse des Körpers ist, die als unabhängige Variable angenommen wird. Der Einfachheit wegen wollen wir z so wählen, dafs der betrachtete Punkt $\mathfrak{P}$ einem endlichen Punkte $(z = \alpha)$ der zugehörigen Riemannschen Fläche entspricht, und es bestehe für die Funktion ξ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ die folgende Entwickelung:

$$\xi - \xi_0 = \xi_d (z - \alpha)^{\frac{d}{a}} + \xi_{d+1} (z - \alpha)^{\frac{d+1}{a}} + \cdots,$$

wo also ξ_0 das konstante Glied in der Entwickelung von ξ bedeutet, und die Ordnungszahl d von $\xi - \xi_0$ positiv oder auch negativ sein kann; dann enthält also der Linearfaktor $\xi - \xi_0$ genau die d^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$. Durch Differentiation dieser Gleichung nach z ergiebt sich also

$$\frac{d\xi}{dz} = \xi_d \cdot \frac{d}{a} (z - \alpha)^{\frac{d-a}{a}} + \cdots.$$

Enthält also $\xi - \xi_0$ die Potenz $\mathfrak{P}^d$, so ist $\frac{d\xi}{dz}$ genau durch $\mathfrak{P}^{d-a}$ teilbar, wenn die Stelle $\mathfrak{P}$ für die Kugelfläche $\mathfrak{K}_z$ ein a-blättriger Verzweigungspunkt ist. Da aber das Analoge auch für die Funktion η gilt, so ergiebt sich zunächst das folgende einfache Resultat:

Sind ξ_0 und η_0 die zu ξ und η gehörigen konstanten Glieder in der Entwickelung dieser Funktionen in der Umgebung der beliebigen Stelle $\mathfrak{P}$, und sind die Linearfaktoren $\xi - \xi_0$ und $\eta - \eta_0$ bzw. durch $\mathfrak{P}^d$ und $\mathfrak{P}^e$ teilbar, so ist der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ genau durch $\mathfrak{P}^{e-d}$ teilbar, es ist also

$$2)\qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{e-d},$$

wenn das Produkt über alle Punkte $\mathfrak{P}$ erstreckt wird oder aber auch nur über die in endlicher Anzahl vorhandenen, für welche der Exponent $e - d \gtrless 0$ ist.

Denselben Divisor können wir aber, und das ist das Wesentliche, auf andere Art, und zwar in geschlossener Form darstellen. Wählen wir ξ als unabhängige Variable, so gehört zu ihr eine Riemannsche Kugelfläche $\mathfrak{R}_\xi$ und ein bestimmter Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_\xi$, welcher alle und nur die Verzweigungsfaktoren $\mathfrak{P}$ dieser Fläche $\mathfrak{R}_\xi$ enthält, jeden zu der Potenz erhoben, welche seine Ordnungszahl angiebt; das Entsprechende gilt für die Funktion η. Es sei nun

$$\xi = \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta},$$

und es seien $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{Z}_\eta$ die Verzweigungsteiler bzw. für die Funktionen ξ und η. Dann gilt der folgende wichtige Satz:

Sind ξ und η zwei beliebige Gröfsen des Körpers K, so besteht immer die Gleichung

$$3)\qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} : \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}.$$

Zum Beweise dieses Satzes brauchen wir nur zu zeigen, dafs der rechts stehende Quotient jeden Primfaktor $\mathfrak{P}$ in der $(e-d)^{\text{ten}}$ Potenz enthält, und dies ist offenbar geschehen, sobald wir nachgewiesen haben, dafs für ein beliebiges ξ der Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ genau durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ teilbar ist und dafs das Analoge für η gilt.

Ist nun $\mathfrak{P}$ zunächst eine im Endlichen liegende Stelle der Fläche $\mathfrak{R}_\xi$, und enthält der zugehörige Linearfaktor $\xi - \xi_0$ die Potenz $\mathfrak{P}^d$ von $\mathfrak{P}$, so ist, wie auf S. 248 gezeigt wurde, $\mathfrak{P}$ eine endliche Verzweigungs-

stelle der $(d-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, also ist $\mathfrak{Z}_\xi$ durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ teilbar, während in $\mathfrak{n}_\xi$ der Divisor $\mathfrak{P}$ gar nicht auftritt, weil $\mathfrak{P}$ im Endlichen liegt. Also ist $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ in diesem Falle wirklich genau durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ teilbar.

Ist dagegen $\mathfrak{P}$ eine der unendlich fernen Stellen für $\mathfrak{R}_\xi$, ist also $d = -\delta$ negativ, so ist $\mathfrak{n}_\xi$ durch $\mathfrak{P}^\delta$ teilbar, und $\mathfrak{P}$ entspricht also einem im Unendlichen liegenden Verzweigungspunkte der $(\delta - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung; der Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_\xi$ enthält also genau die Potenz $\mathfrak{P}^{\delta-1}$. Daher ist der Quotient $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ durch $\mathfrak{P}^{\delta-1-2\delta} = \mathfrak{P}^{-\delta-1} = \mathfrak{P}^{d-1}$ teilbar, die aufgestellte Behauptung ist also vollständig bewiesen. Ebenso zeigt man, dafs der Quotient $\frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2}$ genau $\mathfrak{P}^{e-1}$ enthält, und damit ist die Richtigkeit der obigen Gleichung (3) dargethan.

Aus diesem Satze ziehen wir zunächst eine merkwürdige und für das Weitere sehr wichtige Folgerung. Da nämlich der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ wegen (1) eine Funktion des Körpers K ist, so sind die beiden Divisoren

$$\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2}$$

auf der rechten Seite der Gleichung (3) einander notwendig äquivalent, und daher sind ihre Ordnungszahlen einander gleich, wie auch ξ und η innerhalb des Körpers angenommen sein mögen. Sind also ξ und η zwei beliebige Funktionen des Körpers, sind n_ξ und n_η ihre Grade, und w_ξ und w_η die Ordnungen ihrer Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{Z}_\eta$, so ist stets

$$w_\xi - 2n_\xi = w_\eta - 2n_\eta,$$

d. h. die Zahl $w - 2n$ ist eine Invariante des Körpers, denn sie ist unabhängig von der Wahl der zu Grunde gelegten Variabeln. Nach S. 226 ist w eine gerade, also die schon früher eingeführte Zahl

$$p = \frac{1}{2} w - n + 1$$

eine ganze Zahl, welche für jede Gröfse von K den gleichen Wert besitzt. Wir nannten dieselbe auf S. 264 das Geschlecht von K und bezeichneten sie bereits als eine der wichtigsten Invarianten des Körpers.

§ 3.

Jedes Differential, das zu dem Körper K gehört, kann je nach der Wahl der Integrationsvariabeln in sehr verschiedenen Formen geschrieben werden. Ist ξ die Integrationsvariable, ζ_ξ der Integrand, so ist das zugehörige Differential

$$d\omega = \zeta_\xi d\xi,$$

und beim Übergange zu einer anderen Integrationsvariabeln η erhält man

$$d\omega = \zeta_\xi d\xi = \zeta_\xi \frac{d\xi}{d\eta} d\eta = \zeta_\eta d\eta,$$

wenn $\zeta_\eta = \zeta_\xi \cdot \frac{d\xi}{d\eta}$ gesetzt wird. Sind also ζ_ξ und ζ_η die Integranden für ein und dasselbe Differential $d\omega$, wenn man das eine Mal ξ, das andere Mal η als Integrationsvariable zu Grunde legt, so sind diese beiden Gröfsen des Körpers K durch die Gleichung

$$\frac{\zeta_\xi}{\zeta_\eta} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} : \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$$

miteinander verbunden, d. h. es besteht für zwei beliebige Gröfsen ξ und η von K die Gleichung

$$\zeta_\xi \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} = \zeta_\eta \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} = \mathfrak{w}_\omega,$$

wo also $\mathfrak{w}_\omega$ ein algebraischer Divisor ist, welcher nur von dem Differential $d\omega$, aber in keiner Weise von der Wahl der Integrationsvariabeln ξ oder η abhängt, und der dem Integrale ω oder dem Differentiale $d\omega$ zugehörige Differentialteiler genannt werden soll. Umgekehrt ist aber auch das Integral ω durch den zugehörigen Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmt, denn für eine beliebige Integrationsvariable ξ ist ja dann

$$\zeta_\xi = \frac{\mathfrak{w}_\omega \cdot \mathfrak{n}_\xi^2}{\mathfrak{Z}_\xi} \quad \text{und} \quad d\omega = \zeta_\xi d\xi.$$

Alle Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ sind untereinander äquivalent, sie gehören also einer und derselben Divisorenklasse (W) an; denn ist für zwei beliebige Differentiale:

$$d\omega = \zeta_\xi d\xi,$$
$$d\omega' = \zeta'_\xi d\xi,$$

so ist ja für die zugehörigen Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ und $\mathfrak{w}_{\omega'}$

$$\frac{\mathfrak{w}_\omega}{\mathfrak{w}_{\omega'}} = \frac{\zeta_\xi}{\zeta'_\xi},$$

d. h. jener Quotient ist eine Gröfse von K, und da $\mathfrak{w}_\omega = \zeta_\xi \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ ist, so ist die Klasse (W) mit der Klasse aller Divisoren identisch, welche äquivalent dem Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ sind, wenn ξ irgend eine Gröfse des Körpers bedeutet. Es kann demnach die Klasse (W) aller Differentiale auch als die Klasse $\left(\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}\right)$ bezeichnet werden. Umgekehrt entspricht auch

jeder Divisor $\mathfrak{w}$ dieser Klasse einem Differentiale $d\omega$; denn ist $\mathfrak{w}$ äquivalent $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$, so besteht ja eine Gleichung

$$\mathfrak{w} = \zeta \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2},$$

wo ζ eine Gröfse des Körpers K ist, d. h. $\mathfrak{w}$ entspricht dem Differentiale

$$d\omega = \zeta d\xi.$$

Wie also alle und nur die Divisoren der Hauptklasse allen Gröfsen des Körpers K gleich sind, so entsprechen alle und nur die Divisoren der Klasse $(W) = \left(\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}\right)$ allen Differentialen $d\omega$, welche zu diesem Körper K gehören. Die Ordnung der Differentialklasse $\left(\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}\right)$ ist

$$w - 2n = 2p - 2,$$

ist also im allgemeinen von Null verschieden. In dem vorher behandelten Beispiele der rationalen Differentiale war $p = 0$, da für die einblättrige Kugelfläche $\mathfrak{K}_z$ offenbar $w = 0$, $n = 1$ ist; alle Differentialteiler waren dort von der $(-2)^{\text{ten}}$ Ordnung; hier ist die Ordnung durch den Wert der Hauptinvariante p vollständig bestimmt. Während dort aber jeder Divisor der $(-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ein Differentialteiler war, ist das hier im allgemeinen nicht der Fall, sondern die Klasse (W) der Differentialteiler bildet ebenso einen Teilbereich aller Divisoren der $(2p-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, wie die Hauptklasse einen Teilbereich aller Divisoren nullter Ordnung bildet. Die Untersuchung dieser Divisorenklasse fällt also auch hier vollständig mit der Betrachtung aller Abelschen Differentiale zusammen. Bezeichnen wir wieder denjenigen innerhalb der Klasse (Q) beliebig anzunehmenden Multiplikator $\mathfrak{Q}_0$, durch welchen alle Divisoren der Hauptklasse in die zugeordneten der Klasse (Q) übergehen, als den Multiplikator für die Klasse (Q), so kann man als Multiplikator für die Differentialklasse irgend einen Divisor

$$\mathfrak{Q}_0 = \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$$

wählen, wenn ξ eine Gröfse des Körpers K bedeutet. Diesem Multiplikator entspricht dann die Darstellung der Differentiale $d\omega$ in der Form $\zeta_\xi d\xi$, d. h. die Wahl von ξ als unabhängige Variable; denn dann ist ja $\zeta_\xi = \frac{\mathfrak{w}_\omega \mathfrak{n}_\xi^2}{\mathfrak{Z}_\xi}$, also in der That der zugeordnete Divisor der Differentialklasse gleich $\zeta_\xi \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} = \mathfrak{w}_\omega$.

Wir fragen nun zunächst, wie sich das einem Abelschen Differentiale $d\omega$ zugehörige Integral ω in der Umgebung einer beliebigen Stelle $\mathfrak{P}$

verhält, und zeigen, dafs auch hier die Ordnungszahl von $\omega - \omega_0$ durch den Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ eindeutig bestimmt ist. Es werde die Integrationsvariable x so gewählt, dafs der gerade betrachtete Primfaktor $\mathfrak{P}$ weder in $\mathfrak{n}_x$ noch in $\mathfrak{Z}_x$ auftritt, dafs also die Stelle $\mathfrak{P}$ eine reguläre, im Endlichen liegende Stelle der Kugelfläche $\mathfrak{R}_x$ ist. Beides ist offenbar möglich; denn man braucht ja nur für x eine Gröfse zu wählen, welche in $\mathfrak{P}$ von der ersten Ordnung verschwindet, was nach der Bemerkung auf S. 217 stets möglich ist, so entspricht $\mathfrak{P}$ einer einfachen Nullstelle für $x = 0$. Dann ist in dem Differentiale

$$d\omega = \zeta_x dx, \quad \text{wo} \quad \zeta_x = \frac{\mathfrak{w}_\omega \mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{Z}_x}$$

ist, ζ_x in Bezug auf $\mathfrak{P}$ von genau derselben Ordnung wie $\mathfrak{w}_\omega$. Ist also $\mathfrak{w}_\omega$ genau durch $\mathfrak{P}^d$ teilbar, wo d positiv, negativ oder Null sein kann, so besteht für $\zeta_x dx$ in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ die folgende Entwickelung:

$$d\omega = \zeta_x dx = (\alpha_d x^d + \alpha_{d+1} x^{d+1} + \cdots) dx,$$

und man erhält, indem man die Reihe gliedweise integriert:

$$\omega - \omega_0 = \frac{\alpha_d}{d+1} x^{d+1} + \cdots,$$

wo ω_0 die Integrationskonstante ist, oder für den speziellen Fall $d = -1$:

$$\omega - \omega_0 = \alpha_{-1} \lg x + \cdots,$$

d. h. es besteht der Satz:

Ist $\mathfrak{P}$ ein d-facher Divisor des zu $d\omega$ gehörigen Differentialteilers $\mathfrak{w}_\omega$, so ist das Integral $\omega - \omega_0$ entweder durch $\mathfrak{P}^{d+1}$ oder durch $\lg \mathfrak{P}$ teilbar, je nachdem $d \gtrless -1$ oder $d = -1$ ist.

Wir sagen nun wieder, ein Integral ω verhält sich an einer Stelle $\mathfrak{P}$ regulär, wenn $\omega - \omega_0$ in $\mathfrak{P}$ von der ersten Ordnung ist, wenn also in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ die Entwickelung lautet

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 (x - \alpha)^{\frac{1}{a}} + \omega_2 (x - \alpha)^{\frac{2}{a}} + \cdots$$

und der Koeffizient ω_1 von Null verschieden ist. Dann folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, dafs ω sich für alle und nur die Primdivisoren nicht regulär verhält, welche in $\mathfrak{w}_\omega$ enthalten sind.

Schreiben wir den Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ als Quotient zweier ganzer Divisoren

$$\mathfrak{w}_\omega = \frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{n}_\omega},$$

so enthält der Nenner $\mathfrak{n}_\omega$ nach dem soeben bewiesenen Satze alle und nur die Primteiler $\mathfrak{P}$, welche den sämtlichen Unendlichkeitsstellen des Integrals ω entsprechen, und zwar entspricht jedem einfachen Prim-

faktor eine logarithmische Unstetigkeitsstelle, jedem Primfaktor $\mathfrak{P}^m$ ein Pol der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung des Integrals. Ebenso enthält der Zähler $\mathfrak{z}_\omega$ alle und nur die Stellen, für welche $\omega - \omega_0$ von höherer als der ersten Ordnung verschwindet. Die Differenz der Ordnungszahlen von $\mathfrak{z}_\omega$ und $\mathfrak{n}_\omega$ ist stets gleich $2p-2$.

§ 4.

In der Theorie der rationalen Differentiale sahen wir, daſs einem jeden beliebig gegebenen Divisor der $(-2)^{\text{ten}}$ Ordnung auch ein rationales Differential entspricht; so waren wir imstande, direkt die Elementarintegrale der zweiten und dritten Gattung hinzuschreiben und alle übrigen durch sie auszudrücken. Für die algebraischen Differentiale gehört aber im allgemeinen nicht zu jedem Divisor der $(2p-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ein algebraisches Differential, vielmehr muſs derselbe auſserdem noch der Differentialklasse (W) angehören. Aber unsere früheren Untersuchungen über die Divisoren des Körpers $K(z, u)$ setzen uns in den Stand, die entsprechende Aufgabe für die Abelschen Differentiale ganz ebenso einfach, aber in sehr viel weiterem Umfange zu lösen.

Die Fundamentalaufgabe in der Theorie der Abelschen Integrale kann nämlich in ihrer allgemeinsten Form so ausgesprochen werden:

Es soll ein vollständiges System linear unabhängiger Differentiale $d\omega$ gefunden werden, deren Divisoren $\mathfrak{w}_\omega$ Multipla eines beliebig gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ sind, für welche also

$$\mathfrak{w}_\omega = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{Q}$$

ist, wenn $\mathfrak{G}_\omega$ irgend einen g a n z e n Divisor bedeutet.

Diese Aufgabe kann, und zwar für eine beliebig gegebene Integrationsvariable z, folgendermaſsen gelöst werden.

Wir bilden nach der auf S. 215 angegebenen Methode ein Fundamentalsystem

$$1)\qquad (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)})$$

des Körpers K für alle Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$, und zwar möge es gleich so gewählt sein, daſs es für eine beliebige reguläre Stelle $(z=\alpha_0)$ normal ist. Zu diesem Systeme bilden wir das komplementäre

$$2)\qquad (\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)}, \ldots \bar{\xi}^{(n)});$$

nach dem Satze V auf S. 231 ist dasselbe dann in Bezug auf $(z=\alpha_0)$ ebenfalls normal, und es kann von vornherein so geordnet vorausgesetzt werden, daſs die Ordnungszahlen seiner Elemente

$$\bar{\varrho}_1, \quad \bar{\varrho}_2, \ldots \bar{\varrho}_n$$

in Bezug auf diese Stelle eine zunehmende Reihe bilden, daſs also allgemein $\overline{\varrho}_i \leqq \overline{\varrho}_{i+1}$ ist. Ist dann $\overline{\xi}^{(s)}$ das erste Element, dessen Ordnungszahl $\overline{\varrho}_s \geqq 2$ ist, so bilden die folgenden Differentiale

$$3) \qquad \frac{\overline{\xi}^{(i)}}{(z-\alpha_0)^2}dz, \quad \frac{\overline{\xi}^{(i)}}{(z-\alpha_0)^3}dz, \dots \frac{\overline{\xi}^{(i)}}{(z-\alpha_0)^{\overline{\varrho}_i}}dz \qquad (i=s,\ s+1, \dots n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Abelscher Differentiale $d\omega = \zeta_s dz$, für welche $\mathfrak{w}_\omega$ ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$ ist.

Das System $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(n)})$ ist nämlich nach der Voraussetzung ein Fundamentalsystem für die Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$, also das komplementäre $(\overline{\xi}^{(1)}, \overline{\xi}^{(2)}, \dots \overline{\xi}^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die Multipla des komplementären Divisors $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}_z}$. Da dasselbe aber in Bezug auf die Stelle $(z=\alpha_0)$ auſserdem normal ist, so bilden die Elemente

$$\overline{\xi}^{(i)}, \frac{\overline{\xi}^{(i)}}{z-\alpha_0}, \dots \frac{\overline{\xi}^{(i)}}{(z-\alpha_0)^{\overline{\varrho}_i-2}} \qquad (i=s,\ s+1, \dots n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}_z}$, welche auſserdem in allen n Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_n$, welche bei $(z=\alpha_0)$ übereinander liegen, mindestens die Ordnungszahl 2 besitzen, oder, was dasselbe ist, jene Elemente bilden ein vollständiges System aller Multipla des Divisors

$$\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{z}^2_{z-\alpha_0}}{\mathfrak{Z}_z}.$$

Dividiert man daher jedes dieser Elemente durch

$$(z-\alpha_0)^2 = \frac{\mathfrak{z}^2_{z-\alpha_0}}{\mathfrak{n}^2_z},$$

so erkennt man, daſs in der That die Elemente (3) ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}^2_z}{\mathfrak{Z}_z}$ bilden, also den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Als Beispiel betrachten wir die sogenannten Integrale erster Gattung w. Wir hatten gesehen, daſs es keine rationalen Integrale giebt, welche auf der ganzen einblättrigen Kugelfläche endlich sind, weil der zugehörige Differentialteiler stets von der $(-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Da für die hier betrachteten Abelschen Integrale der Differentialteiler die Ordnung $2p-2$ besitzt, so können, sobald nur $p \geqq 1$ ist, sehr wohl solche allenthalben endliche Integrale erster Gattung w existieren, denen eben ganze Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ entsprechen; aber es ist die Frage, ob auch in der Differentialklasse immer ganze Divisoren vorhanden sind. Wir stellen uns also jetzt die Aufgabe, die Anzahl

aller linear unabhängigen ganzen Divisoren $\mathfrak{w}_\omega$ der Differentialklasse (W), oder, was dasselbe ist, die Anzahl aller unabhängigen Multipla des Divisors $\mathfrak{Q} = 1$ zu bestimmen, und diese ganzen Divisoren selbst zu berechnen. Die diesen entsprechenden Abelschen Integrale w bilden dann ein vollständiges System linear unabhängiger Integrale erster Gattung.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, was ja eventuell stets durch eine Substitution $z' = \frac{1}{z - \alpha_0}$ erreicht werden kann, dafs der Stelle $(z = \infty)$ n reguläre Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$ entsprechen. Alsdann können wir die Stelle $(z = \infty)$ an Stelle der vorher eingeführten $(z = \alpha_0)$ wählen und daher den Linearfaktor $z - \alpha_0$ überall durch $\frac{1}{z}$ ersetzen. Nach der soeben angegebenen Methode bilden wir nun zuerst ein Fundamentalsystem

$$(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$$

für die ganzen algebraischen Funktionen von $K(z, u)$, welches für die Stelle $(z = \infty)$ normal ist, und es bedeuten

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$$

die Ordnungszahlen der n Elemente $\eta^{(i)}$ für jene Stelle, und zwar sei die Bezeichnung der $\eta^{(i)}$ so gewählt, dafs $\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_n$ ist. Dann ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n = -\frac{w}{2},$$

und man zeigt leicht, dafs $\varrho_1 = 0$ ist und alle folgenden Ordnungszahlen negativ sind. In der That, eine ganze algebraische Funktion η besitzt im Endlichen gar keinen Pol; soll sie also keine Konstante sein, so mufs sie in mindestens einem der n unendlich fernen Punkte von negativer Ordnung sein, ihre Ordnungszahl ϱ für $(z = \infty)$ ist also stets negativ und nur dann Null, wenn η eine Konstante ist. Da aber im Körper K sicher auch die Konstanten auftreten, so mufs $\eta^{(1)} = c$, folglich $\varrho_1 = 0$ sein, aber ϱ_2 kann dann nicht mehr Null sein, da sonst auch $\eta^{(2)}$ konstant wäre, also $\eta^{(1)}$ und $\eta^{(2)}$ rational abhängig wären.

Es sei nun

$$(\overline{\eta}^{(1)}, \overline{\eta}^{(2)}, \ldots \overline{\eta}^{(n)})$$

das komplementäre System zu $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$. Sind dann

$$\overline{\varrho}_1, \overline{\varrho}_2, \ldots \overline{\varrho}_n$$

die Ordnungszahlen seiner Elemente, so ist allgemein

$$\overline{\varrho}_i = -\varrho_i,$$

d. h. es ist $\bar{\varrho}_1 = 0$, und alle folgenden Ordnungszahlen $\bar{\varrho}_2, \ldots \bar{\varrho}_n$ sind positiv. Ist also $\bar{\eta}^{(s)}$ das erste Element, dessen Ordnungszahl $\geqq 2$ ist, so bilden die Funktionen

$$\bar{\eta}^{(i)}, \quad z\,\bar{\eta}^{(i)}, \quad z^2\bar{\eta}^{(i)}, \ldots z^{\bar{\varrho}_i - 2}\bar{\eta}^{(i)} \qquad (i = s,\ s+1, \ldots n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Integranden erster Gattung; denn sie bilden ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{n}_z^2}{\mathfrak{Z}_z}$, da sie ja für $(z = \infty)$ alle mindestens die Ordnungszahl 2 besitzen. Da $\bar{\varrho}_1 = 0$, $\bar{\varrho}_2, \ldots \bar{\varrho}_{s-1}$ alle gleich 1, also

$$\bar{\varrho}_1, \quad \bar{\varrho}_2 - 1, \ldots \bar{\varrho}_{s-1} - 1 = 0$$

sind, so kann ihre Anzahl auch so geschrieben werden:

$$\bar{\varrho}_1 + (\bar{\varrho}_2 - 1) + \cdots + (\bar{\varrho}_n - 1) = \sum_1^n \bar{\varrho}_k - n + 1,$$

und da nach (1) auf S. 226

$$\Sigma\,\bar{\varrho}_k = -\Sigma\,\varrho_k = \Sigma\,(a-1) = \frac{w}{2}$$

ist, so folgt für die gesuchte Anzahl der Wert

$$\frac{w}{2} - n + 1 = p, \tag{4}$$

also:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Integrale erster Gattung ist stets dem Geschlechte des Körpers $K(z, u)$ gleich.

Das hier auseinandergesetzte Verfahren zur Bestimmung der unabhängigen Integranden erster Gattung hat den großen Vorzug, daß es nicht nur die Anzahl derselben liefert, sondern uns auch ein endliches und für jede Wahl der unabhängigen Variabeln z direkt anwendbares Verfahren giebt, um die p linear unabhängigen Integranden erster Gattung explicite zu berechnen, denn wir haben auf S. 220 und 221 gelernt, ein Fundamentalsystem $(\eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n)})$ für die ganzen Größen des Körpers aufzustellen und aus ihm das komplementäre System zu berechnen. Wir können auch, ohne das erste System zu berechnen, ein System $(\bar{\eta}^{(1)}, \ldots \bar{\eta}^{(n)})$ für die Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Z}_z}$ aufstellen, welches für $(z = \infty)$ regulär ist, und aus ihm direkt die unabhängigen Integranden $\left(\bar{\eta}^{(i)}, \bar{\eta}^{(i)} z, \ldots \bar{\eta}^{(i)} z^{\bar{\varrho}_i - 2}\right)$ finden. Der Umweg über das System $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ der ganzen Funktionen wurde nur für die Herleitung der eleganten Formel 4) für die Anzahl der unabhängigen Integrale erster Gattung gewählt.

Es existieren also nur dann gar keine allenthalben endlichen Integrale w, wenn $p = 0$ ist, und dies ist wieder dann und nur dann

der Fall, wenn in dem für $(z = \infty)$ normalen Fundamentalsysteme $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)})$ alle Elemente aufser dem ersten die Ordnungszahl -1 besitzen. Da endlich die Anzahl $p = \frac{w}{2} - n + 1$ ihrer Natur nach nie negativ sein kann, so ist für jede n-blättrige Riemannsche Fläche

5) $$\frac{w}{2} \geqq n - 1.$$

§ 5.

Wir wollen jetzt unsere Untersuchungen über die Divisorenklassen weiter benutzen, um das wichtigste theoretische Resultat dieses ganzen Gebietes, den sogenannten Riemann-Rochschen Satz, ebenfalls auf rein algebraischem Wege und ebenfalls ohne jede beschränkende Voraussetzung über die Natur des betrachteten Körpers herzuleiten.

Wir stellen uns jetzt die einfache Aufgabe, nur die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale $d\omega$ zu bestimmen, welche Vielfache eines beliebig gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ sind; oder, was dasselbe ist, es soll die Anzahl der linear unabhängigen Divisoren der Klasse (W) gefunden werden, welche Multipla des Divisors $\mathfrak{Q}$ sind.

Ist aber (Q) die Klasse des Divisors $\mathfrak{Q}$, so ist diese Anzahl für alle Divisoren der Klasse (Q) dieselbe, nämlich nach den Ergebnissen des § 5 auf S. 265 gleich der Dimension $\left\{\frac{W}{Q}\right\}$ der Klasse $\left(\frac{W}{Q}\right)$. Wir setzen zur Abkürzung

1) $$(Q') = \left(\frac{W}{Q}\right), \quad \text{oder} \quad (QQ') = W.$$

Sind dann q und q' die Ordnungszahlen von Q und Q', so ist, da die Ordnungszahl der Differentialklasse (W) gleich $2p - 2$ ist:

1a) $$q + q' = 2p - 2,$$

und die Anzahl aller unabhängigen Multipla von $\mathfrak{Q}$ innerhalb (W) ist gleich $\{Q'\}$, und umgekehrt ist die Anzahl aller Multipla irgend eines Divisors $\mathfrak{Q}'$ innerhalb (W) offenbar gleich $\{Q\}$.

Der Riemann-Rochsche Satz lehrt uns nun eine sehr einfache und sehr wichtige Beziehung kennen, welche zwischen den beiden Zahlen $\{Q\}$ und $\{Q'\}$ besteht, und mit deren Hilfe man ohne weiteres eine ganze Reihe von Fundamentaleigenschaften der Abelschen Integrale aussprechen kann. Wir gehen jetzt zur Ableitung dieses Satzes über.

Der Einfachheit wegen wählen wir die unabhängige Variable z so, dafs der Stelle $(z = \infty)$ n reguläre Punkte der Kugelfläche entsprechen.

Sind $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ irgendwelche Divisoren der Klassen (Q) und (Q'), so sind die Dimensionen $\{Q\}$ und $\{Q'\}$ gleich der Anzahl der linear

unabhängigen Multipla bzw. von $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ und $\frac{1}{\mathfrak{Q}'}$, welche in dem Körper $K(z, u)$ vorhanden sind. Da die gesuchte Anzahl ganz unabhängig davon ist, wie wir den Divisor $\mathfrak{Q}$ innerhalb der Klasse (Q) ausgewählt haben, so wollen wir denselben so annehmen, dafs er jeden der n zu der Stelle $(z = \infty)$ gehörigen Primdivisoren $\mathfrak{P}_\infty$ einmal und nur einmal im Nenner enthält. Nach den im § 1 auf S. 250 gemachten Ausführungen sind wir stets imstande, diesen Bedingungen zu genügen. Setzen wir dann

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{n}_z},$$

so ist $\mathfrak{Q}_1$ ein Divisor, welcher keinen einzigen der n Teiler $\mathfrak{P}_\infty$, weder im Zähler noch im Nenner, enthält. Es sei jetzt

$$\mathfrak{Q}_1' = \frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{Q}_1}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_1' = \mathfrak{Z}_z = \Pi \mathfrak{P}^{\alpha - 1}.$$

Setzen wir dann in gleicher Weise

$$\mathfrak{Q}' = \frac{\mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{n}_z},$$

so enthält auch $\mathfrak{Q}_1'$ keine der Stelle $(z = \infty)$ entsprechenden Divisoren, weil sonst das Gleiche für $\mathfrak{Z}_z$ gelten würde, und aus der Gleichung

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}' = \frac{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{n}_z^2} = \frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^2} \tag{2}$$

ergiebt sich, dafs $\mathfrak{Q}'$ ein Divisor der Klasse (Q') ist, für welche $(QQ') = \left(\frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^2}\right)$ ist.

Wir finden also die Dimensionen $\{Q\}$ und $\{Q'\}$ der beiden Klassen (Q) und (Q'), wenn wir die Anzahl der linear unabhängigen Multipla der Divisoren $\frac{1}{\mathfrak{Q}} = \frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{Q}_1}$ und $\frac{1}{\mathfrak{Q}'} = \frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{Q}'_1}$ in dem Körper K aufsuchen.

Um diese beiden Anzahlen zu finden, bestimmen wir zuerst ein Fundamentalsystem

$$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)})$$

des Körpers $K(z, u)$ für den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$, welches für die Stelle $(z = \infty)$ normal ist; es seien

$$r_1, r_2, \ldots r_n \qquad (r_i \geqq r_{i+1})$$

die Ordnungszahlen seiner Elemente für jene Stelle. Dann ist das komplementäre System

$$(\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)}, \ldots \bar{\xi}^{(n)})$$

ein Fundamentalsystem für den komplementären Divisor

$$\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Z}_z} = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}'_1} = \frac{1}{\mathfrak{Q}'_1},$$

welches ebenfalls für die Stelle $(z=\infty)$ normal ist und dessen Ordnungszahlen für diese Stelle bzw.

$$-r_1, -r_2, \ldots -r_n$$

sind. Dann sind alle und nur die linear unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}} = \frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{Q}_1}$ in dem Systeme

$$\xi^{(i)}, \quad z\xi^{(i)}, \quad z^2\xi^{(i)}, \ldots z^{r_i-1}\xi^{(i)} \qquad (r_i \geqq 1)$$

enthalten, denn alle diese Elemente sind Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$, weil das System $(\xi^{(i)})$ ein Fundamentalsystem für $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$ ist, aber sie sind auch Multipla von $\mathfrak{n}_z$, weil sie alle mindestens die Ordnungszahl $+1$ für $(z=\infty)$ besitzen. Ihre Anzahl, die Dimension $\{Q\}$, ist also durch die Gleichung

$$\{Q\} = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$$

gegeben, wenn r_s die letzte Ordnungszahl ist, welche $\geqq 0$ ist. Hier können und sollen die Ordnungszahlen $r_i = 0$ mitgezählt werden, da sie ja an der Summe nichts ändern.

Dagegen sind alle und nur die unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}'} = \frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{Q}'_1}$ in dem Systeme

$$\bar{\xi}^{(k)}, \quad z\bar{\xi}^{(k)}, \quad z^2\bar{\xi}^{(k)}, \ldots z^{-r_k-1}\bar{\xi}^{(k)} \qquad (-r_k \geqq 1)$$

enthalten, denn alle diese sind Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}'_1}$, aber auch von $\mathfrak{n}_z$, weil auch sie mindestens die Ordnungszahl $+1$ für $z=\infty$ haben. Ihre Anzahl, die Dimension $\{Q'\}$ der Ergänzungsklasse (Q'), ist also gleich

$$\{Q'\} = -(r_{s+1} + r_{s+2} + \cdots + r_n),$$

weil ja nach der Voraussetzung r_{s+1} die erste negative Ordnungszahl in dem Systeme $(\xi^{(i)})$, also $-r_{s+1}$ die erste positive in dem komplementären Systeme $(\bar{\xi}^{(i)})$ ist. Durch Subtraktion ergiebt sich daher die wichtige Gleichung

$$\{Q\} - \{Q'\} = r_1 + r_2 + \cdots + r_n.$$

Nun war aber das System $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)})$ ein Fundamentalsystem für die Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1} = \frac{1}{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}_z}$, dessen Ordnung gleich $-(q+n)$ ist; also ist

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = q + n - \frac{w}{2} = q - p + 1,$$

wo w die Verzweigungszahl der zu z gehörigen Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$ ist; die soeben gefundene Gleichung geht also über in

$$\{Q\} = \{Q'\} + q - p + 1. \tag{3}$$

Wenn man aber jetzt Q mit Q' vertauscht, so ergiebt sich die korrespondierende Gleichung

3a) $$\{Q'\} = \{Q\} + q' - p + 1.$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten, so kann das Resultat folgendermaſsen geschrieben werden:

I) $$\{Q\} - \frac{q}{2} = \{Q'\} - \frac{q'}{2}.$$

Ersetzt man endlich in der Gleichung 3a) die Ordnung q' der Ergänzungsklasse durch $2p - 2 - q$, so erhält man die Relation:

II) $$\left\{\frac{W}{Q}\right\} = \{Q'\} = \{Q\} + p - 1 - q.$$

Die Gleichungen I) und II) geben uns die gesuchte Beziehung zwischen den Dimensionen von zwei beliebigen Ergänzungsklassen und können folgendermaſsen in Worten ausgesprochen werden:

> I) Ist $(QQ') = (W)$, so besitzt die Differenz zwischen der Dimension und der halben Ordnungszahl für die beiden Ergänzungsklassen (Q) und (Q') stets den gleichen Wert.
>
> II) Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor der Ordnung q und (Q) seine Klasse, so ist die Anzahl $\{Q'\}$ aller unabhängigen Differentiale $d\omega$, deren Divisoren $\mathfrak{w}_\omega$ Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, stets gleich der Dimension der Klasse (Q), vermehrt um die Zahl $p - 1 - q$.

Diese beiden Theoreme heiſsen der Riemann-Rochsche Satz.

§ 6.

Aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Riemann-Rochschen Satze flieſst eine groſse Anzahl wichtiger Folgerungen, von denen wir die einfachsten in diesem Abschnitte behandeln wollen.

Es sei $\mathfrak{Q}$ erstens ein Divisor der Hauptklasse, also äquivalent einer beliebigen algebraischen Funktion ξ des Körpers K. Dann ist $(Q) = (E)$, $q = 0$, und $\{Q\} = \{E\} = 1$, da ja die Konstanten die einzigen ganzen Divisoren der Hauptklasse sind. In diesem Falle ist also

$$(Q') = \left(\frac{W}{E}\right) = (W),$$

und aus der Gleichung II) des vorigen Abschnittes ergiebt sich daher

$$\{W\} = \{E\} + p - 1 = p;$$

wir erhalten demnach den folgenden Satz, welcher eine Erweiterung des vorher für Integrale erster Gattung abgeleiteten ist:

> Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale ω, deren Divisor $\mathfrak{w}_\omega$ ein Vielfaches einer beliebigen Funktion ζ des Körpers K ist, ist stets gleich dem Geschlechte des Körpers.

Wir erkennen sofort, dafs dieser Satz uns die Anzahl der Integrale erster Gattung liefert, wenn wir speziell $\zeta = 1$ wählen.

Es sei zweitens $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor, dessen Ordnung $q = -\nu$ negativ ist; in diesem Falle ist $\{Q\} = 0$, weil, wie oben bereits erwähnt wurde, kein einziger ganzer Divisor existiert, dessen Ordnung negativ ist. Nach II) ist also hier

$$\{Q'\} = \left\{\frac{W}{Q}\right\} = \nu + p - 1.$$

> Die Anzahl aller linear unabhängigen Integrale ω, deren Divisoren $\mathfrak{w}_\omega$ Multipla eines beliebigen Divisors von negativer Ordnung $-\nu$ sind, ist stets gleich $\nu + p - 1$.

Derselbe Satz gilt auch, wenn $\mathfrak{Q}$ ein Divisor nullter Ordnung ist, welcher nicht der Klasse (E) angehört, also nicht äquivalent einer Gröfse von K ist; denn auch in diesem Falle ist ja $\{Q\} = 0$, da diese Klasse nur dann einen g a n z e n Divisor $\mathfrak{G}$ nullter Ordnung enthalten könnte, wenn $\mathfrak{G} = 1$ wäre, was unmöglich ist, wenn $\mathfrak{Q}$ nicht zur Hauptklasse gehört; in diesem Falle ist jene Anzahl also gleich $p - 1$.

Wir spezialisieren das soeben abgeleitete Resultat noch weiter und benutzen es zur Beantwortung der folgenden für die ganze Theorie der Abelschen Integrale grundlegenden Frage.

Jeder Differentialteiler konnte in der Form

$$\mathfrak{w}_\omega = \frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{n}_\omega},$$

d. h. als Quotient zweier ganzer Divisoren dargestellt werden, und der Nenner $\mathfrak{n}_\omega$ bestimmt alle und nur die Unendlichkeitsstellen des zugehörigen Integrals nebst ihren Ordnungszahlen. Wir wollen nach der Anzahl der linear unabhängigen Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega = \frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{n}_\omega}$ mit gegebenem Nenner $\mathfrak{n}_\omega$ fragen, d. h. nach der Anzahl der unabhängigen Differentiale, welche an einer Anzahl beliebig gegebener Stellen von gegebener Ordnung unendlich werden. Diese Frage können wir jetzt offenbar so aussprechen:

Es sei $\mathfrak{n}_\omega$ ein gegebener ganzer Divisor vom Grade ν. Wie grofs ist die Anzahl aller linear unabhängigen Divisoren $\mathfrak{w}_\omega = \frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{n}_\omega}$, d. h. die Anzahl aller unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{n}_\omega}$ in der Klasse (W)?

Hier ist also $\mathfrak{Q} = \frac{1}{\mathfrak{n}_\omega}$ von der negativen Ordnung $-\nu$, und die gesuchte Anzahl ist gleich der Dimension der Klasse $\left(\frac{W}{Q}\right)$, d. h. in unserem Falle gleich der Dimension $\{\mathfrak{n}_\omega W\}$, und da $\frac{1}{\mathfrak{n}_\omega}$ die negative Ordnung $-\nu$ besitzt, so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale $d\omega$, deren Nenner gleich dem Divisor $\mathfrak{n}_\omega$ oder ein Teiler desselben ist, ist stets

$$\nu + p - 1,$$

wenn ν den Grad des Nenners bezeichnet.

Zwanzigste Vorlesung.

Die Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung. — Die Differentialklasse (W) ist primitiv. — Es giebt keine Integrale, welche nur an einer Stelle und zwar logarithmisch unendlich werden. — Die Elementarintegrale zweiter und dritter Gattung. — Die allgemeineren Integrale zweiter Gattung. — Jede Divisorenklasse $(\mathfrak{N}W)$ ist primitiv, sobald $\mathfrak{N}$ irgend ein ganzer Divisor von höherer als der ersten Ordnung ist. — Jedes Abelsche Integral ist auf eine einzige Weise als Summe von Elementarintegralen erster, zweiter und dritter Gattung darstellbar. — Funktionen des Körpers mit gegebenen Polen.

§ 1.

Wir wollen jetzt die Abelschen Integrale als Summen möglichst einfacher Integrale, der sogenannten Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung darstellen.

Wir nannten Integrale erster Gattung diejenigen, welche an keiner einzigen Stelle unendlich grofs werden, d. h. diejenigen, deren Differentialteiler gar keinen Nenner besitzt. Wir zeigten, dafs es genau p linear unabhängige ganze Divisoren

$$\mathfrak{G}^{(1)}, \quad \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$$

der Klasse (W) giebt, durch welche alle anderen ganzen Divisoren dieser Klasse auf eine einzige Art in der Form

$$\mathfrak{G} = c_1\mathfrak{G}^{(1)} + c_2\mathfrak{G}^{(2)} + \cdots + c_p\mathfrak{G}^{(p)}$$

mit konstanten Koeffizienten dargestellt werden können. Wählt man irgend eine Gröfse z von K als unabhängige Variable und setzt allgemein

$$\varepsilon_i = \frac{\mathfrak{G}^{(i)}\mathfrak{n}_z^2}{\mathfrak{Z}_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots p),$$

so bilden die p Funktionen des Körpers,

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Integranden, und die p Integrale

$$w_i = \int \varepsilon_i \, dz \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Integrale, d. h. es gilt der Satz:

> Jedes allenthalben endliche Integral $\int \varepsilon\, dz$ kann auf eine und nur eine Weise in der Form
>
> $$w = c_1 w_1 + \cdots + c_p w_p + c$$
>
> mit geeignet gewählten konstanten Koeffizienten dargestellt werden.

Wir zeigen zuerst, dafs die Klasse (W) eine primitive ist, d. h. dafs die p ganzen Divisoren $\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$ derselben nicht alle einen und denselben gemeinsamen Teiler $\mathfrak{M}$ besitzen.

Ist nämlich μ der Grad jenes Divisors $\mathfrak{M}$ und (M) seine Klasse, so ist

$$\mathfrak{G}^{(i)} = \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{G}}_i,$$

und die p ganzen Divisoren $\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{G}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{G}}_p$ gehören zu der primitiven Klasse $(\overline{W})$, welche durch die Gleichung

$$(M\overline{W}) = (W)$$

vollständig bestimmt ist; jene beiden Klassen sind also Ergänzungsklassen. Für diese beiden Klassen (M) und $(\overline{W})$ besteht aber nach Formel I) auf S. 304 die Gleichung

$$\text{1)} \qquad \{M\} - \frac{\mu}{2} = \{\overline{W}\} - \frac{\overline{w}}{2},$$

wenn $\overline{w}$ die Ordnung der Klasse $(\overline{W})$ bedeutet. Nun bestehen aber nach den Sätzen auf S. 267 die Gleichungen

$$\{\overline{W}\} = \{W\} = p, \quad \overline{w} = 2p - 2 - \mu, \quad \{M\} = 1.$$

Setzt man diese Werte in die obige Gleichung (1) ein, so ergiebt sich zur Bestimmung der Ordnungszahl μ von $\mathfrak{M}$ bzw. von (M):

$$1 - \frac{\mu}{2} = p - \left(p - 1 - \frac{\mu}{2}\right),$$

d. h. es mufs notwendig $\mu = 0$, also der Teiler aller ganzen Divisoren von (W) gleich Eins sein, was zu beweisen war.

Dieses Ergebnis kann auch folgendermafsen ausgesprochen werden:

> Man kann stets ein Integral erster Gattung w finden, welches sich an einer beliebig gegebenen Stelle $\mathfrak{P}$ regulär verhält.

Wäre nämlich jedes Integral w an der Stelle $\mathfrak{P}$ nicht regulär, wäre also $w - w_0$ stets mindestens durch $\mathfrak{P}^2$ teilbar, so wäre $\mathfrak{P}$ ein gemeinsamer Teiler aller ganzen Divisoren $\mathfrak{G}$ von (W), diese Klasse also keine primitive.

Die nächst einfachen Integrale wären offenbar die, welche nur an einer einzigen Stelle, und zwar von möglichst niedriger Ordnung, also

logarithmisch unendlich werden, d. h. diejenigen, deren zugehöriger Teiler $\mathfrak{w}_\omega$ nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{P}$ und zwar in der ersten Potenz im Nenner enthält; aber die soeben gefundenen Sätze lehren uns, dafs solche Integrale nicht existieren können. Für sie mufs nämlich $\mathfrak{n}_\omega = \mathfrak{P}$ sein, und die Ordnung ν von $\mathfrak{n}_\omega$ ist daher $= 1$. Also ergiebt sich aus dem Satze auf S. 306, dafs die Anzahl aller linear unabhängigen Differentialteiler, deren Nenner $\mathfrak{P}$ oder ein Teiler von $\mathfrak{P}$ ist, gleich $1 + p - 1 = p$ ist.

Nun ist aber schon die Anzahl der linear unabhängigen Differentialteiler $d\omega$, deren Nenner $= 1$ ist, ebenfalls p, und diese sind unter den hier aufzusuchenden Differentialteilern mit enthalten. Also existieren aufser diesen keine anderen solchen Differentialteiler in der Klasse W, d. h. es existiert kein einziger Differentialteiler $\frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{P}}$, in welchem sich der Nenner $\mathfrak{P}$ nicht vollständig forthebt, und damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Wir können diesen Satz auch so aussprechen:

> Ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Primdivisor und (P) seine Klasse, so ist die Klasse (PW) eine Klasse vom Teiler $\mathfrak{P}$.

Bilden nämlich $\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$ ein vollständiges System unabhängiger ganzer Divisoren der Klasse (W), so bilden $\mathfrak{P}\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots \mathfrak{P}\mathfrak{G}^{(p)}$ ein ebensolches System für die Klasse (PW).

Wir sprechen dieses Resultat in dem folgenden Satze aus, den wir auch schon in dem speziellen Falle der rationalen Differentiale bewiesen hatten:

> Es giebt kein Abelsches Integral, welches nur an einer Stelle und zwar logarithmisch unendlich wird.

§ 2.

Die den Integralen erster Gattung am nächsten stehenden sind also diejenigen, für welche der Nenner $\mathfrak{n}_\omega$ des Differentialteilers nur aus zwei gleichen oder verschiedenen Primfaktoren besteht, für die also $\mathfrak{w}_\omega$ die Form hat:

$$\frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{P}^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'};$$

hier ist der Zähler (nach der Bemerkung auf S. 297 oben) ein ganzer Divisor des $2p^{\text{ten}}$ Grades während $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ zwei beliebige Primfaktoren bedeuten; von den zugehörigen Integralen würde das erste nur an der Stelle $\mathfrak{P}$ und zwar von der ersten Ordnung, das zweite nur an den Stellen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ und zwar logarithmisch unendlich werden. Wir haben in der achtzehnten

Vorlesung gesehen, dafs solche Differentialteiler im Gebiete der rationalen Differentiale existierten. Sie gehörten zu Integralen

$$-\int \frac{dz}{(z-\alpha)^2} = \frac{1}{z-\alpha} \text{ und } (\alpha - \alpha') \int \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\alpha')} = \lg \frac{z-\alpha}{z-\alpha'},$$

welche wir als das einfachste Integral zweiter und als das Integral dritter Gattung bezeichneten.

Wir zeigen, dafs auch im Gebiete der Abelschen Integrale je ein und abgesehen von Integralen erster Gattung, auch nur ein Integral dieser Art existiert; wir wollen sie im folgenden ebenfalls Integrale zweiter und dritter Gattung nennen. Es seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ zwei gleiche oder voneinander verschiedene Primfaktoren. Dann ist nach dem auf S. 306 bewiesenen Satze die Anzahl aller linear unabhängigen Differentialteiler, welche Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$, welche also von der Form $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$ sind, gleich

$$2 + (p-1) = p + 1.$$

Zu diesen gehören aber offenbar die linear unabhängigen ganzen Divisoren der Differentialklasse (W)

$$\mathfrak{G}^{(1)}, \quad \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)},$$

denn jeder von ihnen kann ja in der Form

$$\mathfrak{G}^{(i)} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{G}^{(i)}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'},$$

also als Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$ geschrieben werden. Aufser diesen mufs also noch ein weiterer unabhängiger Differentialteiler

$$\frac{\mathfrak{G}^{(0)}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'} \tag{1}$$

existieren, dessen Zähler, wie man leicht sieht, weder durch $\mathfrak{P}$ noch durch $\mathfrak{P}'$ teilbar sein kann. Enthielte nämlich $\mathfrak{G}^{(0)}$ etwa den Teiler $\mathfrak{P}'$, wäre also $\mathfrak{G}^{(0)} = \mathfrak{P}'\overline{\mathfrak{G}}^{(0)}$, so wäre

$$\frac{\mathfrak{G}^{(0)}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'} = \frac{\overline{\mathfrak{G}}^{(0)}}{\mathfrak{P}}$$

ein Differentialteiler, dessen Nenner gleich $\mathfrak{P}$ wäre, und da dies nach dem obigen Beweise nicht möglich ist, wenn sich $\mathfrak{P}$ nicht ebenfalls forthebt, so müfste jener $(p+1)^{\text{te}}$ Differentialteiler (1) ebenfalls ganz, also durch $\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$ darstellbar sein, während er doch von ihnen linear unabhängig ist. Es giebt also in der That stets einen Differentialteiler, welcher in seiner reduzierten Form gleich $\frac{\mathfrak{G}^{(0)}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$ ist; jeder andere Divisor mit diesem Nenner ist in der Form

$$\frac{\overline{\mathfrak{G}}^{(0)}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'} = c_0 \frac{\mathfrak{G}^{(0)}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'} + c_1 \mathfrak{G}^{(1)} + \cdots + c_p \mathfrak{G}^{(p)}$$

mit konstanten Koeffizienten darstellbar.

Ist also $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Riemannschen Fläche, so giebt es stets ein Integral

$$t_1 = \int \zeta_1 dz, \tag{2}$$

welches nur an der Stelle $\mathfrak{P}$ einen Pol erster Ordnung hat und sonst allenthalben endlich ist, und ebenso giebt es stets ein Integral

$$\tilde{\omega}_{12} = \int \zeta_{1,2} dz, \tag{3}$$

welches nur in zwei beliebig gegebenen Punkten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und zwar logarithmisch unendlich wird. Jedes andere Integral $\bar{t}_1$ oder $\bar{\tilde{\omega}}_{12}$ derselben Art ist eindeutig in einer der beiden Formen darstellbar:

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 &= c_0 t_1 + c_1 w_1 + \cdots + c_p w_p + c \\ \bar{\tilde{\omega}}_{12} &= d_0 \tilde{\omega}_{12} + d_1 w_1 + \cdots + d_p w_p + d. \end{aligned} \tag{4}$$

Das Integral zweiter Gattung t_1 ist auch hier nur das erste von einer ganzen Reihe anderer t_μ, welche ebenfalls nur an der beliebig gegebenen Stelle $\mathfrak{P}$ einen Pol, aber einen solchen von der μ^{ten} Ordnung haben. Für sie mufs der Differentialteiler ein Bruch sein, dessen Nenner gleich $\mathfrak{P}^{\mu-1}$ ist. Auch solche Differentialteiler sind für jeden Wert von μ stets in der Differentialklasse enthalten und wir könnten sie durch eine einfache Erweiterung des soeben geschilderten Verfahrens leicht finden. Wir wollen aber lieber gleich an dieser Stelle einen allgemeinen Satz herleiten, aus welchem die Existenz aller jener Normalintegrale und die Darstellung eines jeden Integrals durch diese ohne weiteres folgt.

Wir hatten gezeigt, dafs die Differentialklasse (W) primitiv ist, d. h. dafs die p unabhängigen ganzen Divisoren $\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$ derselben keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Multipliziert man aber alle Divisoren von (W) mit einem beliebigen Primteiler $\mathfrak{P}$, so besitzt diese Klasse $(\mathfrak{P}W)$ den Teiler $\mathfrak{P}$, weil ihre unabhängigen ganzen Divisoren einfach mit den p Produkten $(\mathfrak{P}\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots \mathfrak{P}\mathfrak{G}^{(p)})$ identisch sind. Bildet man dagegen die Klasse $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'W)$, indem man alle Elemente der Klasse $(\mathfrak{P}W)$ mit einem und demselben Primteiler $\mathfrak{P}'$ multipliziert, so ist diese Klasse wieder primitiv, denn wir sahen, dafs zu den p linear unabhängigen ganzen Divisoren $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{G}^{(2)}, \ldots \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{G}^{(p)})$ dieser Klasse noch notwendig ein weiterer ganzer Divisor $\mathfrak{G}^{(0)}$ hinzutritt, welcher weder durch $\mathfrak{P}$ noch durch $\mathfrak{P}'$ teilbar ist. Hieraus folgt aber, dafs die $(p+1)$ unabhängigen ganzen Divisoren von $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'W)$

$$(\mathfrak{G}^{(0)}, \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{G}^{(p)})$$

überhaupt keinen Teiler gemeinsam haben, dafs also jene Klasse primitiv ist; denn hätten sie alle einen Primteiler $\mathfrak{P}^{(0)}$ gemeinsam, so könnte dieser

zunächst nicht gleich $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}'$ sein, weil $\mathfrak{G}^{(0)}$ ja durch beide nicht teilbar ist; andererseits kann aber ein solcher Teiler nicht in den p letzten ganzen Divisoren auftreten, denn sonst müfste ja $\mathfrak{P}^{(0)}$ ein gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{G}^{(1)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$ sein, während diese doch keinen solchen Teiler besitzen.

Multipliziert man nun alle Divisoren dieser Klasse $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'W)$ mit einem anderen ganz beliebigen Primteiler $\mathfrak{P}''$, so zeigt man ebenfalls leicht, dafs auch diese Klasse $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''W)$ primitiv ist, u. s. w. Wir beweisen nun gleich den folgenden ganz allgemeinen Satz:

> Ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_\nu$ ein beliebiger ganzer Divisor, dessen Ordnung ν gröfser als Eins ist, so ist die Divisorenklasse $(\mathfrak{N}W)$ stets primitiv, d. h. die ganzen Divisoren dieser Klasse besitzen keinen allen gemeinsamen Teiler.

Den Beweis dieses wichtigen Satzes führen wir induktiv. Es sei also bereits bewiesen, dafs für einen ganzen Divisor ν^{ter} Ordnung $\mathfrak{N}$ die Klasse $(\mathfrak{N}W)$ primitiv ist, dafs also ihre $\nu + p - 1$ unabhängigen ganzen Divisoren

$$5)\qquad \mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_{\nu+p-1}$$

teilerfremd sind. Ist dann $\mathfrak{P}_0$ ein beliebiger Primteiler, so zeigen wir, dafs dann auch die Klasse $(\mathfrak{P}_0\mathfrak{N}W)$ ebenfalls primitiv ist. Gehören aber die $(\nu + p - 1)$ unabhängigen ganzen Divisoren (5) zu $(\mathfrak{N}W)$, so gehören die $(\nu + p - 1)$ unabhängigen ganzen Divisoren

$$5a)\qquad \mathfrak{P}_0\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{P}_0\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{P}_0\mathfrak{G}_{\nu+p-1}$$

sicher zu der jetzt betrachteten Klasse $(\mathfrak{P}_0\mathfrak{N}W)$; da aber die Ordnung des jetzt betrachteten Divisors $\mathfrak{P}_0\mathfrak{N}$ um Eins gröfser, nämlich gleich $(\nu + 1)$ ist, so ist die Dimension dieser Klasse $(\mathfrak{P}_0\mathfrak{N}W)$ ebenfalls um Eins gröfser, nämlich gleich $\nu + p$; es mufs also in dieser Klasse noch einen ganzen Divisor $\mathfrak{G}_0$ geben, der von den Divisoren (5a) linear unabhängig ist. Derselbe ist durch $\mathfrak{P}_0$ sicher nicht teilbar, denn wäre $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}_0\overline{\mathfrak{G}}_0$, so gehörte ja $\overline{\mathfrak{G}}_0$ zur vorigen Klasse $(\mathfrak{N}W)$, wäre also durch die $(\nu + p - 1)$ Divisoren (5) linear darstellbar; es müfste also $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{G}}_0$ durch die Divisoren (5a) mit den gleichen Koeffizienten darstellbar sein, während doch $\mathfrak{G}_0$ von ihnen linear unabhängig ist. Also haben die $\nu + p$ Divisoren

$$(\mathfrak{G}_0, \ \mathfrak{P}_0\mathfrak{G}_1, \ \mathfrak{P}_0\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{P}_0\mathfrak{G}_{\nu+p-1})$$

sicher nicht den gemeinsamen Teiler $\mathfrak{P}_0$, aber sie besitzen auch keinen anderen Primteiler $\mathfrak{P}$, welcher von $\mathfrak{P}_0$ verschieden ist; denn dieser müfste ja in den $\nu + p - 1$ Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_{\nu+p-1}$ enthalten sein, welche nach der Voraussetzung teilerfremd sind, und damit ist

unsere Behauptung vollständig bewiesen. Wählt man speziell $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}_0^\nu$, so zeigt sich, dafs in der Klasse $(\mathfrak{P}_0^{\nu+1} W)$ ein ganzer Divisor $\mathfrak{G}_0$ existiert, welcher zu $\mathfrak{P}_0$ teilerfremd ist. Also ist der Quotient

$$\frac{\mathfrak{G}_0}{\mathfrak{P}_0^{\nu+1}}$$

ein Divisor der Differentialklasse (W) in seiner reduzierten Form, dessen Nenner eine beliebige Potenz des beliebig angenommenen Primteilers $\mathfrak{P}_0$ ist. Man kann also in der That stets ein Normalintegral t_μ finden, welches an einer beliebig gegebenen Stelle $\mathfrak{P}$ einen Pol von der ebenfalls beliebig gegebenen Ordnung μ besitzt.

§ 3.

Unsere Untersuchungen haben bis jetzt ergeben, dafs die zu dem Körper $K(z, u)$ gehörige Differentialklasse genau p linear unabhängige ganze Divisoren

1) $$\mathfrak{G}^{(1)},\quad \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$$

enthält, durch welche jeder andere ganze Divisor linear und homogen darstellbar ist. Ist ferner $\mathfrak{P}_0$ ein ein für allemal beliebig aber fest angenommener Primteiler und $\mathfrak{P}$ irgend ein anderer von $\mathfrak{P}_0$ verschiedener Divisor, so existiert innerhalb (W) ein sogenannter Differentialteiler dritter Gattung

1a) $$\frac{\mathfrak{G}_{01}}{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}},$$

dessen Zähler zum Nenner teilerfremd ist. Endlich existieren für jeden Divisor $\mathfrak{P}$ die Differentialteiler zweiter Gattung

1b) $$\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{P}^2},\quad \frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{P}^3}, \ldots \frac{\mathfrak{G}_\mu}{\mathfrak{P}^\mu},$$

deren Zähler ebenfalls durch $\mathfrak{P}$ nicht teilbar sind; in allen diesen Brüchen denken wir uns die zugehörigen Einheiten oder multiplikativen Konstanten willkürlich aber fest bestimmt.

Wir zeigen nun genau wie in der Theorie der Partialbruchzerlegung, dafs man jeden Divisor

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

der Differentialklasse in Partialbrüche zerlegen, nämlich durch die einfachen Brüche (1), (1a), (1b) homogen und linear mit konstanten Koeffizienten darstellen kann. Zu diesem Zwecke beweisen wir den folgenden einfachen Satz:

Ist $\mathfrak{P}$ irgend ein im Nenner $\mathfrak{B}$ enthaltener Primteiler, $\mathfrak{P}^{\mu}$ die höchste in $\mathfrak{B}$ enthaltene Potenz von $\mathfrak{P}$, so kann man von $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ ein solches Multiplum von $\frac{\mathfrak{G}_\mu}{\mathfrak{P}^\mu}$ abziehen, daſs in der Differenz

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} - c_\mu \frac{\mathfrak{G}_\mu}{\mathfrak{P}^\mu}$$

der Nenner jenen Primfaktor höchstens in der $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält.

Nach dem auf S. 255 bewiesenen Satze ist jene Differenz wieder ein Divisor der Differentialklasse mit demselben Nenner $\mathfrak{B}$, dessen Zähler von c_μ abhängt und stets so bestimmt werden kann, daſs der Zähler mindestens durch die erste Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Thut man das, so hebt sich $\mathfrak{P}$ mindestens einmal fort, und unsere Aufgabe ist gelöst. Subtrahiert man von dem so sich ergebenden Quotienten $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}$ ein solches Multiplum von dem Differentialteiler $\frac{\mathfrak{G}_{\mu-1}}{\mathfrak{P}^{\mu-1}}$, daſs die Differenz höchstens noch $\mathfrak{P}^{\mu-2}$ im Nenner enthält, und fährt so fort, so gelangt man zuletzt zu einem Quotienten, dessen Nenner höchstens noch die erste Potenz von $\mathfrak{P}$ enthält. Von ihm kann man dann ein solches Multiplum des Differentialteilers $\frac{\mathfrak{G}_{01}}{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}}$ in (1b) abziehen, daſs der neue Quotient $\frac{\overline{\mathfrak{A}}}{\overline{\mathfrak{B}}}$ $\mathfrak{P}$ gar nicht mehr im Nenner enthält, während vielleicht statt seiner die erste Potenz des Divisors $\mathfrak{P}_0$ im Nenner hinzugetreten sein kann, aber seine übrigen Primfaktoren mit denen von $\mathfrak{B}$ übereinstimmen. Ist nun $\mathfrak{P}_1^{\mu_1}$ eine sonst noch im Nenner $\mathfrak{B}$ oder $\overline{\mathfrak{B}}$ vorhandene Potenz eines Primfaktors, so kann man genau ebenso eine solche lineare homogene Funktion der μ_1 einfachen Differentialteiler

$$\frac{\mathfrak{G}'_{\mu_1}}{\mathfrak{P}_1^{\mu_1}}, \quad \frac{\mathfrak{G}'_{\mu_1-1}}{\mathfrak{P}_1^{\mu_1-1}}, \ldots \frac{\mathfrak{G}'_2}{\mathfrak{P}_1^2}, \quad \frac{\mathfrak{G}'_{01}}{\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1}$$

von $\frac{\overline{\mathfrak{A}}}{\overline{\mathfrak{B}}}$ abziehen, daſs der so sich ergebende Differentialteiler $\frac{\overline{\overline{\mathfrak{A}}}}{\overline{\overline{\mathfrak{B}}}}$ $\mathfrak{P}_1$ ebenfalls nicht mehr im Nenner enthält, während er höchstens wieder die erste Potenz von $\mathfrak{P}_0$ enthalten kann. Fährt man in derselben Weise so lange fort, bis alle Primteiler des Nenners fortgeschafft sind, so ergiebt sich ein Divisor $\frac{\mathfrak{A}^{(0)}}{\mathfrak{P}_0}$ der Differentialklasse, welcher höchstens noch den festen Teiler $\mathfrak{P}_0$ im Nenner haben könnte und da dies nach dem auf S. 309 bewiesenen Satze unmöglich ist, so folgt, daſs sich $\mathfrak{P}_0$ fortheben muſs, daſs also jener letzte Quotient ein ganzer Divisor der Differentialklasse ist, und dieser ist nach der obigen Bemerkung durch die p unabhängigen ganzen Divisoren (1) linear darstellbar. Also ist in der That jeder Divisor der Differential-

klasse durch die Elementardivisoren erster, zweiter und dritter Gattung darstellbar.

Diese Elementardivisoren sind aber linear unabhängig. Dies kann man entweder direkt oder mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes folgendermaſsen zeigen: Es sei

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_0^{\mu_0} \mathfrak{P}_1^{\mu_1} \ldots \mathfrak{P}_h^{\mu_h}$$

ein beliebiger ganzer Divisor, dessen Ordnung

$$\nu = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_h$$

ist und von dem wir annehmen, daſs er auch den festen Primteiler $\mathfrak{P}_0$ enthält. Dann ist jeder Divisor $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, wie soeben bewiesen wurde, homogen und linear darstellbar durch die p ganzen Divisoren

$$\mathfrak{G}^{(1)}, \quad \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)},$$

ferner durch die h Divisoren dritter Gattung mit den Nennern:

$$\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_0\mathfrak{P}_h,$$

und endlich für jede Primfaktorenpotenz $\mathfrak{P}_i^{\mu_i}$ durch die $\mu_i - 1$ Divisoren zweiter Gattung mit den Nennern:

$$\mathfrak{P}_i^2, \quad \mathfrak{P}_i^3, \ldots \mathfrak{P}_i^{\mu_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots h),$$

also im ganzen durch

$$p + h + (\mu_0 - 1) + (\mu_1 - 1) + \cdots + (\mu_h - 1) = p + \nu - 1,$$

und da die Anzahl aller linear unabhängigen Divisoren mit dem Nenner $\mathfrak{B}$ nach dem Riemann-Rochschen Satze den gleichen Wert hat, so sind diese Divisoren in der That notwendig linear unabhängig.

Es sei jetzt $\omega = \int \zeta\, dz$ ein beliebiges Integral und $\mathfrak{w}_\omega = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ der zugehörige Differentialteiler. Stellt man nun $\mathfrak{w}_\omega$ linear und homogen durch die Differentialteiler erster, zweiter und dritter Gattung dar, multipliziert dann jene Gleichung mit $\frac{\mathfrak{n}_z^2}{\mathfrak{Z}_z} dz$ und integriert dann auf beiden Seiten, so geht die linke Seite in ω, die rechte in eine homogene lineare Funktion der zugehörigen Elementarintegrale über, und man erhält so den Satz:

> Jedes Abelsche Integral kann auf eine und nur eine Weise als Summe von Elementarintegralen erster, zweiter und dritter Gattung dargestellt werden.

§ 4.

Die bewiesenen Sätze lehren, daſs die Klasse W der Differentialteiler insofern ein einfaches Verhalten besitzt, als man den Nenner $\mathfrak{n}_\omega$

des Differentialteilers mit der einzigen Einschränkung willkürlich geben kann, daſs seine Ordnung ν nicht gleich 1 sein darf; dabei ist ferner die Dimension der so bestimmten Schar von Differentialen ausschlieſslich von der Ordnungszahl ν, nicht aber von der besonderen Auswahl des Divisors $\mathfrak{n}_\omega$ abhängig. Wir wollen nun noch, ebenfalls mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes, zeigen, daſs die entsprechenden Eigenschaften der Hauptklasse, welche ja aus den zu den Funktionen des Körpers gehörigen Divisoren besteht, von viel komplizierterem Charakter sind. Diese beiden ausgezeichneten Divisorenklassen sind also sehr verschiedenartigen Gesetzen unterworfen.

Wir bestimmen also jetzt die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen ξ des Körpers, deren Nenner $\mathfrak{n}_\xi$ ein gegebener ganzer Divisor $\mathfrak{Q}$ von der Ordnung q oder ein Teiler von $\mathfrak{Q}$ ist. Diese Anzahl ist, wenn Q die Klasse von $\mathfrak{Q}$ ist, gleich $\{Q\}$; nach dem Riemann-Rochschen Satze ist aber

$$\{Q\} - \frac{q}{2} = \left\{\frac{W}{Q}\right\} - \frac{q'}{2},$$

wo $q' = 2(p-1) - q$ ist, also

$$\text{1)} \qquad \{Q\} = q - p + 1 + \left\{\frac{W}{Q}\right\}.$$

Ist nun erstens q' negativ, also

$$\text{2a)} \qquad q > 2(p-1),$$

so ist $\left\{\frac{W}{Q}\right\} = 0$, also

$$\text{3a)} \qquad \{Q\} = q - p + 1.$$

In diesem Falle und auch nur in diesem ist also die Dimensionszahl unabhängig von der besonderen Auswahl des Divisors $\mathfrak{Q}$ und schon durch die Ordnungszahl q völlig bestimmt; die in der Gleichung (5b) auf S. 264 gegebene untere Grenze für $\{Q\}$ stellt zugleich den genauen Wert der Dimension dar. Die hierzu erforderliche Ungleichheitsbedingung (2a) ist aber für beliebige Werte der positiven Ordnungszahl q nur erfüllt, wenn $p = 0$ oder $= 1$ ist. Ist aber $p > 1$, so verhalten sich, wie nunmehr zu erweisen ist, die Divisoren $\mathfrak{Q}$ von niedriger Ordnungszahl anders als diejenigen, deren Ordnung oberhalb der unteren Grenze $2(p-1)$ liegt.

Wir wollen jetzt, wenn zweitens

$$\text{2b)} \qquad q \leqq 2(p-1) \quad \text{und} \quad p > 1$$

ist, über die Beschaffenheit des Divisors $\mathfrak{Q}$ eine Voraussetzung hinzufügen, durch welche alle Divisoren von ungewöhnlichem Verhalten

ausgeschlossen werden. Da es nämlich für die genaue Bestimmung von $\{Q\}$ auf die Dimension σ der Ergänzungsklasse $\frac{W}{Q}$ ankommt, so haben wir diese Zahl zu diskutieren und wählen zu diesem Zwecke die einzelnen Primfaktoren von $\mathfrak{Q}$ successive und zwar so aus, daſs bei der Bestimmung von σ singuläre Vorkommnisse ausgeschlossen bleiben. Einen ersten Punkt $\mathfrak{P}_1$ wählen wir willkürlich und wissen dann nach dem Satze auf S. 308, daſs nicht alle Fundamentaldivisoren

$$\mathfrak{G}^{(1)},\quad \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$$

der Klasse W durch $\mathfrak{P}_1$ teilbar sein können. Wir können daher $\mathfrak{G}^{(1)}$ zu $\mathfrak{P}_1$ relativ prim, $\mathfrak{G}^{(2)}, \mathfrak{G}^{(3)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$ aber durch $\mathfrak{P}_1$ teilbar annehmen, denn wenn diese Annahme nicht von vornherein erfüllt ist, so können wir zunächst die obigen Divisoren passend umordnen und sodann für $i > 1$ $\mathfrak{G}^{(i)}$ durch $\mathfrak{G}^{(i)} - c_i \mathfrak{G}^{(1)}$ ersetzen, worin die Konstante c_i gleich dem Werte der Funktion $\frac{\mathfrak{G}^{(i)}}{\mathfrak{G}^{(1)}}$ im Punkte $\mathfrak{P}_1$ ist; durch eine solche Transformation wird offenbar das ursprüngliche System nur durch ein anderes ersetzt, welches ebenfalls ein Fundamentalsystem für die ganzen Divisoren der Klasse W ist. Daher ist, wenn $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1$ ist, die Anzahl der durch $\mathfrak{P}_1$ teilbaren Divisoren der Klasse W, d. i.

$$\left\{\frac{W}{Q}\right\} = p - 1.$$

Die Divisoren $\mathfrak{G}^{(2)}, \mathfrak{G}^{(3)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$ können nun allerdings auſser dem Primfaktor $\mathfrak{P}_1$ noch einen höheren gemeinsamen Teiler $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{D}_1$ haben; wir können aber in jedem Falle einen zweiten Primdivisor $\mathfrak{P}_2$ so wählen, daſs nicht alle jene $p - 1$ Divisoren den Faktor $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ erhalten; hierbei müssen eben nur die Primfaktoren von $\mathfrak{D}_1$ ausgeschlossen werden. Nachdem dies geschehen, können wir, ganz analog wie vorher, durch Transformation erzielen, daſs

$$\mathfrak{G}^{(3)},\quad \mathfrak{G}^{(4)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$$

durch $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ teilbar werden, während $\mathfrak{G}^{(2)}$ nur durch $\mathfrak{P}_1$, aber nicht durch $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ teilbar ist. Daher ist, wenn $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ ist:

$$\left\{\frac{W}{Q}\right\} = p - 2.$$

Die Divisoren $\mathfrak{G}^{(3)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$ können wieder einen höheren gemeinsamen Teiler als $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ haben, man kann aber jedenfalls den Punkt $\mathfrak{P}_3$ so wählen, daſs nicht alle jene $p - 2$ Divisoren durch $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ teilbar werden, und nachdem dies geschehen, durch Transformation erreichen, daſs die Divisoren

$$\mathfrak{G}^{(4)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$$

den Faktor $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ haben, während $\mathfrak{G}^{(3)}$ nur durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, nicht aber durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ teilbar ist; dann ist, wenn $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ ist:

$$\left\{\frac{W}{Q}\right\} = p - 3.$$

In dieser Weise fortgehend, können wir, und zwar auf unendlich mannigfache Arten, da immer nur eine endliche Zahl von Ausnahmepunkten ausgeschlossen wird, p Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$, die nicht unbedingt alle verschieden sein müssen*), so bestimmen, dafs in der Reihe der Fundamentaldivisoren

$$\mathfrak{G}^{(1)}, \quad \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots \mathfrak{G}^{(p)}$$

die letzten $p - \varkappa$ durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$ teilbar sind, während $\mathfrak{G}^{(\varkappa)}$ zwar durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{\varkappa-1}$, aber nicht durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$ teilbar ist.

Ist nun die Ordnungszahl $q \leqq p$, so nehmen wir den Divisor

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_q,$$

ist aber $p < q \leqq 2(p-1)$, so nehmen wir $\mathfrak{Q}$ gleich einem Vielfachen von $\mathfrak{Q}_p = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_p$; dann ist, nach dem eben Bewiesenen, im ersten Falle

$$\left\{\frac{W}{Q}\right\} = p - q,$$

im zweiten

$$\left\{\frac{W}{Q}\right\} = 0.$$

Tragen wir dies in die Formel (1) ein, so finden wir:

für $q \leqq p$:

3b) $$\{Q\} = 1,$$

für $p < q \leqq 2(p-1)$, ebenso wie im ersten Falle:

3c) $$\{Q\} = q - p + 1;$$

es ergiebt sich also für

$$\begin{array}{l} q = 1, 2, 3, \ldots p-1, p, p+1, p+2, \ldots 2(p-1): \\ \{Q\} = 1, 1, 1, \ldots \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad\quad 3, \quad \ldots \quad p-1. \end{array}$$

Hiernach ist im Falle $q \leqq p$ der Divisor $\mathfrak{Q}$ bei nicht spezieller Auswahl, abgesehen von Proportionalitätsfaktoren, der einzige ganze Divisor seiner Klasse; die Funktion

$$\xi = \frac{c\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}} = \text{const.}$$

---

*) Spätere Untersuchungen ergeben, dafs man sich sogar so einrichten kann, dafs die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ alle gleich werden.

ist dann die einzige Funktion mit dem Nenner $\mathfrak{Q}$; somit giebt es auch keine eigentliche Funktion des Körpers, welche weniger als p willkürlich gewählte Pole besäfse. Hingegen giebt es, in Übereinstimmung mit dem Satze auf S. 264, Funktionen $(p+1)^{\text{ter}}$, $(p+2)^{\text{ter}}, \ldots$ $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit willkürlichen Polen, und die Dimension einer solchen Funktionenschar mit dem Nenner $\mathfrak{Q}$ ist bei nicht spezieller Auswahl von $\mathfrak{Q}$, ebenso wie im ersten Falle, gleich $q-p+1$.

Die Spezialdivisoren, welche hier ausgeschlossen werden mufsten und welche auf die Bestimmung der Dimension ihrer Klasse einen anderen Einflufs ausüben, als die gewöhnlichen Divisoren der Ordnung q, sind für die Erkenntnis des Aufbaues des Körpers von grofser Bedeutung und werden uns später öfter begegnen; hier sollte zunächst nur festgestellt werden, dafs die Hauptklasse ganz anderen und viel verwickelteren Gesetzen unterliegt, als die in dieser Hinsicht so einfache Klasse der Differentiale.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Perioden eines Abelschen Integrals. — Verschiedenes Verhalten der Körper mit verschwindendem und mit positivem Geschlecht. — Analysis situs. — Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen. — Verwandlung der letzteren in einfach zusammenhängende durch Querschnitte. — Ordnung des Zusammenhanges der Riemannschen Fläche. — Abelsche Integrale erster, zweiter und dritter Gattung bei beschränktem und uneingeschränktem Verlaufe des Integrationsweges. — Die Summe der Residuen eines Abelschen Differentials ist gleich Null. — Bestimmung der Abelschen Integrale durch ihre Unstetigkeiten.

§ 1.

Wir gehen jetzt dazu über, ebenso wie wir dies in § 4 der achtzehnten Vorlesung für Integrale rationaler Funktionen gethan haben, so jetzt für ein Abelsches Integral

$$\omega = \int \xi \, dz \tag{1}$$

zu untersuchen, in welcher Weise der Wert desselben vom Integrationswege abhängt. Diese Aufgabe ist nach den damaligen Ausführungen völlig identisch mit der anderen, eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\omega}{dz} = \xi \tag{2}$$

mitsamt allen analytischen Fortsetzungen der Integralfunktion $\omega(\mathfrak{P})$ zu untersuchen. Beide Formulierungen der Aufgabe unterscheiden sich nur dadurch voneinander, dafs wir das erste Mal die Cauchysche, das andere Mal die durch das Weierstrafssche Prinzip der analytischen Fortsetzung vertiefte Eulersche Integraldefinition zu Grunde legen.

Setzen wir nun auch hier die Integralfunktion über einen geschlossenen Weg fort, indem wir den Punkt $\mathfrak{P}_0$, für welchen wir die einzelnen Funktionenelemente bilden, auf der Riemannschen Fläche einen Umlauf s machen lassen, so unterscheiden sich die beiden Elemente für den Anfangs- und den Endpunkt dieses Weges nur um eine Konstante c, da beide derselben Differentialgleichung (2) genügen. Diese Konstante kann daher auch durch das über den geschlossenen Weg s erstreckte Integral

$$c = \int_s \xi \, dz$$

dargestellt werden. Jedes über einen geschlossenen Weg erstreckte Integral kann so als Differenz zweier Elemente der Integralfunktion auftreten; jedes derartige Integral, mag es nun gleich Null oder von Null verschieden sein, soll daher als eine Periode des Integrals bezeichnet werden. Stellt sich alsdann in speziellen Fällen heraus, dafs alle Perioden gleich Null sind, so ist die Integralfunktion $\omega(\mathfrak{P})$ eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche.

Versuchen wir jetzt einen Überblick über die Gesamtheit der Perioden des Integrals zu gewinnen, so liegt es nahe, einen ähnlichen Weg wie bei den Integralen rationaler Funktionen einzuschlagen und zuvörderst Bedingungen festzustellen, unter welchen die Integralfunktion $\omega(\mathfrak{P})$ nach Fortsetzung über einen geschlossenen Weg s ungeändert bleibt. In der That können wir auch einen dem damals bewiesenen Fundamentaltheoreme völlig analogen Satz aufstellen, nämlich den folgenden:

Wenn auf der Riemannschen Fläche eine geschlossene Kurve s ein Gebiet abgrenzt, innerhalb dessen kein logarithmischer Punkt der Integralfunktion ω gelegen ist, so bleibt $\omega(\mathfrak{P})$ bei einem Umlaufe längs s ungeändert.

Der Beweis erfolgt wörtlich durch dieselben Schlüsse, wie bei dem analogen Satze auf S. 281. Wenn wir an Stelle der Eulerschen die Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe benutzen, so tritt an die Stelle des obigen Fundamentaltheorems der Satz von Cauchy, welcher nur nach der Methode des Beweises von dem vorigen verschieden, seinem Inhalte nach aber mit ihm völlig äquivalent ist:

Das Integral $\omega = \int \xi\, dz$, über die Begrenzungskurve eines Gebietes hin erstreckt, innerhalb dessen die Integralfunktion keine oder nur polare Unstetigkeiten besitzt, ist stets gleich Null.

Bei der Anwendung eines dieser beiden Sätze auf Integrale rationaler Funktionen hatten wir nun die stillschweigende, aber für die gewöhnliche Kugelfläche evidente Annahme machen können, dafs jede beliebige geschlossene Kurve, die sich nicht schneidet, auch die Kugelfläche in zwei getrennte Gebietsteile, einen inneren und einen äufseren, zerlegt. Der Beweis des ersten der beiden obigen Sätze kam dann eben dadurch zustande, dafs wir das Innere der Kurve durch einen Schnitt in zwei Teile zerlegen, also auch beliebig verkleinern und schliefslich auf den Bereich eines Punktes zusammenziehen konnten, in welchem Falle der Satz selbstverständlich ist. Ganz ebenso setzt auch die Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes voraus, dafs das Verhalten der Funktion im Innern der geschlossenen Kurve bestimmten Bedingungen genügt.

Auf einer Riemannschen Kugelfläche aber ist es weder selbstverständlich, noch auch im allgemeinen richtig, daſs eine beliebige geschlossene Kurve, welche sich nicht schneidet, die Fläche in zwei getrennte Gebietsteile zerlegt. Vielmehr kann es sehr wohl eintreten, daſs nach Ausführung eines derartigen Schnittes die Fläche zusammenhängend bleibt, so daſs man, ohne jenen Schnitt zu kreuzen, immer noch zwei beliebige Punkte der Fläche durch einen fortlaufenden ganz auf der Fläche gelegenen Kurvenzug verbinden kann. Betrachten wir z. B. die zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier Verzweigungspunkten $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4$. Da bei einem Umlaufe um einen Verzweigungspunkt die beiden Funktionszweige sich miteinander vertauschen, so können wir in diesem Falle, wie überhaupt bei zweiblättrigen Flächen, etwas einfacher als im allgemeinen bei der Zusammenheftung der beiden Blätter verfahren.

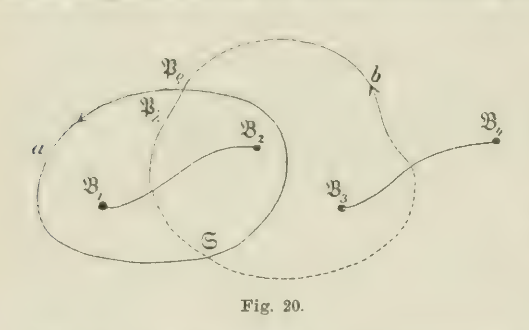


Fig. 20.

Wir können nämlich die Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ in beiden Blättern paarweise durch Schnitte verbinden, die z. B. von $\mathfrak{B}_1$ nach $\mathfrak{B}_2$ und von $\mathfrak{B}_3$ nach $\mathfrak{B}_4$ laufen, und sodann das rechte und linke Ufer des im oberen Blatte verlaufenden Schnittes resp. mit dem linken und rechten Ufer des entsprechenden Schnittes im unteren Blatte zusammenheften. Zieht man nun im oberen Blatte eine geschlossene Kurve a, welche die beiden Verzweigungspunkte $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ in positivem Sinne umkreist, so bleibt die Riemannsche Fläche nach Ausführung dieses Schnittes zusammenhängend. Man kann nämlich immer noch von einem Punkte $\mathfrak{P}_\lambda$ auf dem linken Ufer des Schnittes a zu dem gegenüberliegenden Punkte $\mathfrak{P}_\varrho$ des rechten ohne Durchkreuzung des Schnittes gelangen, wenn man von $\mathfrak{P}_\lambda$ nach dem Schnitte $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ wandert, über diesen in das untere Blatt tritt, sodann in dem unteren nach $\mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4$ und über diesen Schnitt in das obere zurücktritt, um schlieſslich wieder im oberen Blatte bis zum Punkte $\mathfrak{P}_\varrho$ zu gehen. In der obenstehenden Figur, welche diese Schnitte darstellt, sind die im oberen Blatte verlaufenden Linien ausgezogen, die im unteren punktiert gezeichnet. Bei dieser Figur hat man wohl zu beachten, daſs die beiden Wege a und b sich in dem Punkte $\mathfrak{P}$, auſser diesem aber in keinem zweiten treffen, denn der zweite Treffpunkt der beiden Kurven (in der Figur durch $\mathfrak{S}$ bezeichnet) ist ein scheinbarer, da daselbst die eine Kurve a im oberen, die andere b im

unteren Blatte verläuft, die beiden Linien also dort keine Kontiguität haben; man kann also in der That auf der bereits durch a zerschnittenen Fläche von $\mathfrak{P}_\lambda$ nach $\mathfrak{P}_\varrho$ und somit überhaupt von jedem Punkte zu jedem anderen gelangen.

Will man also auch für Riemannsche Flächen den obigen Fundamentalsatz in Anwendung bringen, so mufs eine Untersuchung über die Art des Zusammenhanges der Fläche vorangehen. Riemann, der die Bedeutung derartiger Zusammenhangsuntersuchungen für die Theorie der Funktionen zuerst erkannt und die grundlegenden Sätze aufgestellt hat, bezeichnet Aufgaben der hierher gehörigen Art, bei welchen es sich ausschliefslich um die Untersuchung von Orts- und Gebietsverhältnissen gegebener Flächen oder Mannigfaltigkeiten handelt, als Probleme der analysis situs. Diese Riemannschen Sätze ergeben nun das merkwürdige und folgenreiche Resultat, dafs die Art des Zusammenhanges einer Riemannschen Fläche allein von dem Geschlechte p des Körpers abhängt.

Dafs die Entscheidung der hier auftretenden Fragen ganz wesentlich von dem Werte des Geschlechtes bedingt sein mufs, kann bereits aus einigen der früher aufgestellten Sätze erschlossen werden. Wenn nämlich das Geschlecht des Körpers $K(z, u)$ gleich Null ist, so giebt es nach dem Satze auf S. 264 eine Funktion erster Ordnung und man kann den Grad des Körpers auf eins erniedrigen. Umgekehrt, wenn es in dem Körper eine Funktion t erster Ordnung giebt, so ist das Geschlecht Null, weil ja die zugehörige Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_t$ einblättrig, also $\frac{w}{2} = 0$ und $n = 1$ ist. In diesem Falle also und auch nur in diesem läfst sich die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ eindeutig auf die schlichte Kugelfläche $\mathfrak{R}_t$ abbilden. Einer geschlossenen, sich nicht schneidenden Kurve auf $\mathfrak{R}_t$ entspricht eine ebensolche Kurve auf $\mathfrak{R}_z$ und umgekehrt, und dem Innern der ersten Kurve das Innere der zweiten; jede geschlossene Kurve zerlegt also auch die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ in zwei getrennte Gebietsteile. Demzufolge sind auch, wie schon an anderer Stelle ausgeführt wurde (S. 247), z und u und überhaupt alle Funktionen des Körpers $K(z, u)$ als rationale Funktionen von t darstellbar, und bei Einführung dieser Variabeln wird das Differential

$$\xi_z dz = \xi_t dt$$

ein rationales Differential. Wir kommen also in diesem Falle direkt auf die Theorie der in der achtzehnten Vorlesung behandelten Integrale rationaler Funktionen zurück. Fassen wir die Gesamtheit der aus dem Körper $K(z, u)$ hervorgehenden Integrale ins Auge, so giebt es in ihr keine Integrale erster Gattung, die Integrale zweiter Gattung aber sind

stets rationale Funktionen von t, also auch Funktionen des Körpers $K(z, u)$, und besitzen somit keine von Null verschiedenen Perioden.

Wenn andererseits das Geschlecht des Körpers $K(z, u)$ positiv ist, so giebt es, wie wir gesehen haben, Integrale erster Gattung, und jedes derartige Integral

$$w = \int \xi \, dz$$

mufs notwendig von Null verschiedene Perioden besitzen. Denn würden die Perioden des Integrals sämtlich verschwinden, so wäre $w(\mathfrak{P})$ eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche, welche zudem, weil w überall endlich ist, keinerlei Unstetigkeiten besitzen dürfte. Eine solche Funktion würde dem Körper $K(z, u)$ angehören (S. 113) und müfste nach dem Satze auf S. 76, weil sie keine Pole hat, eine Konstante sein, dann aber wäre der Differentialquotient $\frac{dw}{dz} = 0$, während er gleich ξ sein soll. Ebenso giebt es, wie früher gezeigt wurde, in diesem Falle auch Integrale zweiter Gattung, welche nicht Funktionen des Körpers $K(z, u)$ sind, und jedes derartige Integral

$$t = \int \xi \, dz$$

mufs ebenfalls von Null verschiedene Perioden besitzen. Denn andernfalls wäre $t(\mathfrak{P})$ eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche mit nur polaren Unstetigkeiten und müfste also nach dem schon zuvor angewendeten Satze auf S. 113 eine Funktion des Körpers sein; das widerspricht aber der von uns getroffenen Voraussetzung. Wenn also das Geschlecht p positiv ist, so haben nicht blofs die Integrale dritter Gattung, wie bei den rationalen Körpern, sondern auch die von erster und zweiter Gattung eigentliche Perioden; es mufs also auch geschlossene Kurven auf der Riemannschen Fläche geben, welche die Fläche nicht zerstückeln und für welche daher die Argumentation des § 4 der achtzehnten Vorlesung hinfällig wird.

Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen läfst sich, wie wir später sehen werden, auf rein algebraischem Wege Aufschlufs über die Periodicitätseigenschaften der Abelschen Integrale und damit über den Zusammenhang der Riemannschen Fläche gewinnen; wir wollen aber vorerst die oben bezeichnete Frage auf dem geometrischen Wege der analysis situs zur Entscheidung bringen.

§ 2.

Gehen wir jetzt zu den angekündigten Untersuchungen der analysis situs über, so erleiden die hier aufzustellenden Sätze zum Teil gewisse Modifikationen, je nachdem sie sich auf berandete oder auf solche Flächen beziehen, welche, wie unsere Riemannsche Kugelfläche, ge-

schlossen und daher unberandet sind. Es genügt aber, wenn wir die Sätze, die wir aufzustellen haben, blofs für berandete Flächenstücke aussprechen. Denn wenn wir mit einer geschlossenen Fläche zu thun haben, so können und wollen wir sie von vornherein, ohne dadurch etwas wesentliches zu ändern, durch diejenige berandete Fläche ersetzen, welche man aus der geschlossenen erhält, wenn man aus ihr einen Punkt nebst seiner Umgebung herausnimmt.

Alle Eigenschaften der Flächen, die wir bei unseren Untersuchungen im Auge haben, sind von so allgemeiner Natur, dafs sie bei irgend welchen stetigen Deformationen der Flächen keinerlei Änderung erfahren, da wir überhaupt nichts anderes als die Art des Zusammenhanges der Flächen zu untersuchen haben. Unter den Flächen haben nun vor allem solche, wie die Ellipse, das Rechteck, die Kugelcalotte unmittelbar zu übersehende Zusammenhangsverhältnisse. Das gemeinsame charakteristische Merkmal dieser Flächen finden wir darin, dafs sie durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Teile zerfallen. Dabei haben wir unter einem Querschnitt jeden Schnitt zu verstehen, welcher in einem Randpunkte beginnt und in einem Randpunkte endigt, wobei der Querschnitt schon während seiner Ausführung zur Begrenzung gerechnet und es somit nicht ausgeschlossen sein soll, dafs er in einem Punkte der durch ihn bereits hervorgebrachten Begrenzung endigt, also in sich selbst zurückläuft. Für eine Kreisfläche ist z. B. auch die Linie als ein Querschnitt zu betrachten, welche man erhält, wenn man von einem Punkte $\mathfrak{A}$ der Peripherie nach einem inneren Punkte $\mathfrak{B}$ und sodann von $\mathfrak{B}$ in einem inneren Kreise zu $\mathfrak{B}$ zurückwandert; auch ein solcher Querschnitt zerlegt die Kreisfläche, ebenso wie ein gewöhnlicher, in zwei getrennte Teile, den Innenkreis $\mathfrak{J}$ und das Ringgebiet $\mathfrak{R}$. Solche Flächenstücke, welche durch jeden Querschnitt zerstückelt werden, heifsen **einfach zusammenhängende Flächen.** In die Kategorie dieser Flächen gehört offenbar auch diejenige, welche wir früher (S. 88) zur Erzeugung der Riemannschen Kugelfläche benutzten und die wir dadurch erhielten, dafs wir aus einer Kugelfläche kleine Kreise um die Punkte $\mathfrak{B}_0, \overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$ als Mittelpunkte herausnahmen und sodann den Kreis um $\mathfrak{B}_0$ durch h Schnitte mit den Kreisen um $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_h$ verbanden (s. d. Fig. 11 u. 12 auf S. 88 u. 89).

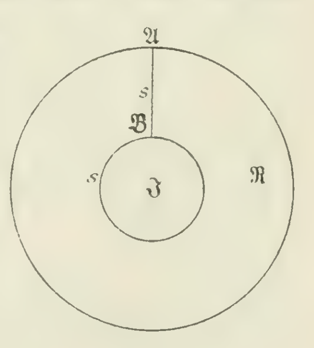


Fig. 21.

Flächen, welche ursprünglich nicht einfach zusammenhängend sind, können oftmals durch eine endliche Anzahl hintereinander auszuführender

Schnitte in einfach zusammenhängende verwandelt werden und heifsen dann **mehrfach zusammenhängend.** Eine von zwei konzentrischen Kreisen begrenzte Ringfläche ist z. B. nicht einfach zusammenhängend, da wir (s. Fig. 21) in ihr einen Querschnitt von einem Randpunkte $\mathfrak{A}$ nach einem Randpunkte $\mathfrak{B}$ ziehen können, ohne den Zusammenhang zu zerreifsen; durch diesen Schnitt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ wird sie aber in das vorher charakterisierte Ringgebiet $\mathfrak{R}$ verwandelt, welches nun einfach zusammenhängend ist, weil es z. B. in ein Rechteck deformiert werden kann. Daher definieren wir:

> Eine Fläche heifst **mehrfach zusammenhängend,** wenn sie durch eine endliche Anzahl hintereinander auszuführender Schnitte in einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegt werden kann.

Auch die Riemannsche Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$ hat diese Eigenschaft, denn da wir sie aus n einfach zusammenhängenden Flächen der vorher beschriebenen Art durch Verknüpfungen, also durch Herstellung gewisser Zusammenhänge hergestellt haben, so müssen wir sie auch umgekehrt durch Zerschneidungen, also durch Aufhebung gewisser Zusammenhänge, in n einfach zusammenhängende Flächen zerlegen können. Da aber diese Zerschneidung offenbar in mannigfachster Weise abgeändert werden kann, so entsteht die Frage, ob nicht hierbei trotz der eintretenden Willkür gewisse charakteristische Zahlen invariant bleiben werden. Zur Entscheidung dieser Frage dienen nun die folgenden Sätze:

> 1. Die Flächenstücke, in welche eine einfach zusammenhängende Fläche durch einen Querschnitt zerfällt, sind ebenfalls einfach zusammenhängend.

Denn wenn die Fläche S durch einen Querschnitt, der von a nach b führt, in die Flächenstücke S_1 und S_2 zerlegt wird, und es wäre etwa S_1 nicht einfach zusammenhängend, so gäbe es einen Querschnitt cd, welcher S_1 nicht zerstückte. Die beiden Endpunkte c und d desselben können entweder beide auf dem ursprünglichen Rande von S oder einer oder beide auf ab gelegen sein. Wir wollen den ersten Fall annehmen, dann ist cd auch ein Querschnitt der Fläche S, und da er S_1 nicht zerschneidet, so kann er auch S nicht

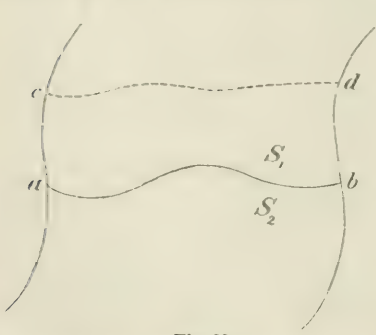


Fig. 22.

zerstücken, denn man müfste von einem beliebigen Punkte von S_1 an beide Ufer des Querschnittes cd gelangen können. Der Querschnitt cd

für sich allein ausgeführt, würde also S nicht zerstücken, was der Voraussetzung widerspricht. Der andere Fall, dafs einer oder beide Endpunkte von cd auf ab gelegen sind, läfst sich auf den behandelten zurückführen, denn der Querschnitt cd würde seine Eigenschaften nicht verlieren, wenn man einen seiner Endpunkte, z. B. c, solange stetig verschiebt, bis er von ab nach der Begrenzung von S gerückt ist.

2. Ein einfach zusammenhängendes Flächenstück hat nur eine Randkurve.

Denn hätte es deren etwa zwei, c_1 und c_2, so würde man einen Querschnitt q von c_1 nach c_2 ziehen können, welcher beide Randkurven zu einer einzigen vereinigt. Man erhielte alsdann zwei getrennte Flächenstücke (nach der Definition) und nur eine Randkurve, was unmöglich ist.

3. Wenn eine Fläche oder ein Flächensystem einmal durch ν Querschnitte in α einfach zusammenhängende, ein anderes Mal durch ν' Querschnitte in α' einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegt werden kann, so ist

$$\nu - \alpha = \nu' - \alpha'.$$

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes denken wir uns beide Arten der Zerschneidung hintereinander ausgeführt. Wir können und wollen nun annehmen, dafs die beiden verschiedenen Querschnittsysteme q und q' keine Linienteile gemein haben, sondern sich nur in einer Anzahl von Punkten begegnen; denn wenn diese Annahme nicht von vornherein erfüllt ist, so können wir ihr stets durch eine stetige Deformation des einen Querschnittsystems genügen, welche im übrigen dessen wesentliche Eigenschaften ungeändert läfst. Die beiden Querschnittsysteme q und q' mögen sich in r Punkten treffen. Zerschneiden wir nun das Flächensystem durch die Querschnitte q in α einfach zusammenhängende Flächenstücke und führen sodann das Querschnittsystem q' aus, so bedeutet dies für das bereits zerschnittene Flächensystem $\nu' + r$ Querschnitte, da jeder der r Schnittpunkte den zugehörigen Schnitt q' in zwei Schnitte zerlegt, also die Anzahl der Querschnitte um eine Einheit vergröfsert. Da nun nach dem ersten Satze eine einfach zusammenhängende Fläche durch einen Querschnitt in zwei ebensolche Flächen zerlegt wird, so zerfällt das Flächensystem, wenn wir erst q und dann q' ausführen, in $\alpha + \nu' + r$ einfach zusammenhängende Flächenstücke. Führen wir umgekehrt erst q' und dann q aus, so erhalten wir $\alpha' + \nu + r$ einfach zusammenhängende Flächen. Da nun die Wirkung der Zerschneidung in beiden Fällen ganz die gleiche ist, so mufs

$$\alpha + \nu' + r = \alpha' + \nu + r,$$

also in der That

$$\nu - \alpha = \nu' - \alpha'$$

sein.

Auf Grund dieses Satzes hat die Zahl $\nu - \alpha$ für eine mehrfach zusammenhängende Fläche oder für ein Flächensystem die Bedeutung einer Invariante; wir dürfen die Zahl $\nu - \alpha$ oder auch $\nu - \alpha + 2$ als die der Fläche zukommende „Ordnung des Zusammenhanges" bezeichnen. Wir wählen die letztere Zahl, damit die einfach zusammenhängenden Flächen, für welche $\nu = 0$, $\alpha = 1$ gesetzt werden kann, die Ordnungszahl 1 erhalten.

Nehmen wir mit einer Fläche irgend eine stetige Veränderung vor, so bleibt die Ordnung des Zusammenhanges ungeändert, führen wir aber einen Querschnitt aus, der die Fläche nicht zerstückelt, so wird die Ordnung des Zusammenhanges um eine Einheit erniedrigt. Denn wenn nach Ausführung des Querschnittes noch ν Querschnitte erforderlich sind, um die Fläche in α einfach zusammenhängende Flächenstücke zu zerschneiden, so waren vorher offenbar $\nu + 1$ Querschnitte erforderlich, um den gleichen Erfolg hervorzubringen. Die Ordnung des Zusammenhanges ist also nach Ausführung des Querschnittes $\nu - \alpha + 2$ und vor derselben $(\nu + 1) - \alpha + 2$, also vorher um eins gröfser, womit unsere Behauptung erwiesen ist. Es gilt also der Satz:

> 4. Durch Ausführung eines Querschnittes wird die Ordnung des Zusammenhanges um eine Einheit erniedrigt. Hieraus folgt auch, dafs eine $(n + 1)$-fach zusammenhängende Fläche, d. i. eine Fläche mit der Ordnungszahl $n + 1$, stets durch successive Ausführung von n Querschnitten in eine einzige einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann.

In der That, wenn der Zusammenhang ein mehrfacher ist, so giebt es jedenfalls einen Querschnitt, welcher die Fläche nicht in zwei Teile zerlegt, und wenn man einen solchen ausführt, so wird die Ordnung des Zusammenhanges um eine Einheit erniedrigt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man hiernach die Ordnung des Zusammenhanges immer um eine Einheit vermindern, ohne jemals die Fläche zu zerstückeln. Sollte hierbei die Fläche ursprünglich, wie das bei der Riemannschen Kugelfläche der Fall ist, ohne Berandung sein, so versehen wir sie mit einer solchen, um einen Querschnitt ausführen zu können, indem wir einen Punkt nebst seiner Umgebung aus ihr entfernen, und wir legen der geschlossenen Fläche dieselbe Ordnung des Zusammenhanges wie der aus ihr hervorgegangenen „punktierten" Fläche bei.

Nachdem wir so den Begriff „Ordnung des Zusammenhanges“ definiert haben, empfiehlt es sich, um die bewiesenen Sätze auf Riemannsche Flächen in Anwendung zu bringen, noch folgenden Hilfssatz vorauszuschicken:

> 5. Wenn man aus einer berandeten Fläche einen Punkt nebst seiner Umgebung herausschneidet, so wird hierdurch die Ordnung des Zusammenhanges um eine Einheit erhöht.

Man bezeichne die ursprüngliche und die durch Entfernung der Umgebung U des Punktes $\mathfrak{P}$ entstandene Fläche resp. mit F und F', die Ordnungen des Zusammenhanges dieser Flächen mit n und n'; dann ist $F = F' + U$. Man führe nun in F' einen Querschnitt q von dem Rande von F nach dem Rande von U, durch welchen offenbar die Fläche nicht zerstückelt wird, weil man von einem Ufer des Querschnittes q entlang der Berandung von U zum andern gelangen kann. Durch Ausführung des Querschnittes q gehe die Fläche F' in eine andere F'' über, welche alsdann nach dem Satze (4) die Ordnungszahl $n' - 1$ hat; die Fläche F'' kann also durch $n' - 2$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende F_0'' verwandelt werden. Führt man andererseits in F denjenigen Schnitt aus, welcher aus q und der Berandung von U besteht, so hat derselbe für F die Bedeutung eines in sich zurücklaufenden Querschnittes und zerlegt F in F'' und U. Durch Ausführung von $1 + (n' - 2) = n' - 1$ Querschnitten kann also die Fläche F in zwei einfach zusammenhängende Flächenteile F_0'' und U zerlegt werden, und die Ordnung n des Zusammenhanges von F ist also

$$n = (n' - 1) - 2 + 2,$$

oder es ist in der That

$$n' = n + 1.$$

Wir wollen nun die Ordnung des Zusammenhanges einer beliebig gegebenen Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}_z$ bestimmen. Zu diesem Zwecke erinnern wir uns der Art, wie wir früher diese Fläche aus n einfach zusammenhängenden Kugelblättern zusammensetzten. Wir hatten aus einer gewöhnlichen Kugelfläche die $h + 1$ Kreise mit den Mittelpunkten

$$\overline{\mathfrak{B}}_0, \quad \overline{\mathfrak{B}}_1, \quad \overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{B}}_h$$

herausgenommen und Schnitte $\overline{\mathfrak{s}}_1, \overline{\mathfrak{s}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{s}}_h$ von den Kreisen um $\overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{B}}_h$ nach dem Kreise um $\overline{\mathfrak{B}}_0$ geführt; n solche einander kongruente einfach zusammenhängende Kugelschalen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ hatten wir sodann in den Schnitten $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots \mathfrak{s}_h$ nach Maſsgabe der durch die analytische Fortsetzung der Funktion u sich ergebenden Zusammenhangsverhältnisse aneinander geheftet und so die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ erhalten. Dabei ist die Stelle $\overline{\mathfrak{B}}_0$ eine reguläre, die Stellen

$$\overline{\mathfrak{B}}_1, \quad \overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{B}}_h$$

sind so ausgewählt, daſs unter ihnen jedenfalls alle enthalten sind, an welchen sich Verzweigungspunkte befinden. Wollen wir umgekehrt die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ in die n einfach zusammenhängenden Kugelschalen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ zerschneiden, so müssen wir vorerst die Bereiche der Punkte herausnehmen, welche an den Stellen

$$\mathfrak{B}_0, \quad \overline{\mathfrak{B}}_1, \ldots \overline{\mathfrak{B}}_h$$

der einfachen Kugelfläche $\mathfrak{K}_z$ gelegen sind. Es mögen an der Stelle $\overline{\mathfrak{B}}_r$ ν_r Punkte der Riemannschen Fläche übereinander gelegen sein, so daſs die Summe der Ordnungszahlen der bei $\overline{\mathfrak{B}}_r$ übereinanderliegenden Verzweigungspunkte gleich $n - \nu_r$ ist; dann haben wir im ganzen aus $\mathfrak{R}$

$$\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_h$$

Bereiche herauszunehmen. Andererseits ist, da die Umgebungen aller Verzweigungspunkte der Riemannschen Kugelfläche unter den herausgenommenen Bereichen enthalten sind, die Verzweigungszahl

$$w = (n - \nu_0) + (n - \nu_1) + \cdots + (n - \nu_h(= (h+1)n - (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_h),$$

also ist

$$\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_h = hn + n - w.$$

Wenn nun die gesuchte Ordnung des Zusammenhanges der „punktierten", d. h. nur mit einem einzigen Rande versehenen Kugelfläche $\pi + 1$ ist, so ist die Zusammenhangszahl der mit $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_h$ Rändern versehenen Kugelfläche nach dem zuletzt bewiesenen Satze (5):

$$\pi + \sum_0^h {}_r \nu_r = \pi + hn + n - w.$$

Die so erhaltene Fläche kann alsdann, wie wir wissen, durch die hn Querschnitte $\mathfrak{s}$, welche in den n Blättern von $\mathfrak{B}_0$ nach

$$\overline{\mathfrak{B}}_1, \quad \overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{B}}_h$$

führen, in n einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegt werden, ihre Zusammenhangszahl ist also $hn - n + 2$. Folglich ist

$$\pi + hn + n - w = hn - n + 2,$$

und es ergiebt sich für die gesuchte Zahl π die einfache Gleichung

$$\pi = w - 2n + 2 = 2p.$$

Da wir nun einer geschlossenen Fläche dieselbe Ordnung des Zusammenhanges beigelegt haben, wie der punktierten Fläche, welche aus ihr durch Herausnahme einer kleinen Kreisfläche entsteht, so hat auch $\mathfrak{R}_z$ die Ordnungszahl $\pi + 1$, und es gilt der Satz:

> Ist p das Geschlecht des Körpers $K(z, u)$, so ist die zugehörige Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ $(2p+1)$-fach zusammenhängend.

§ 3.

Eine einfach zusammenhängende Fläche besitzt dieselben Zusammenhangsverhältnisse wie eine Kreisfläche und wird daher durch jede geschlossene Kurve c, die sich nicht schneidet, in zwei getrennte Teile zerlegt. In der That trifft für beliebige einfach zusammenhängende Flächen ebensogut wie für die Kreisfläche in Fig. 21 die Deduktion zu: führt man von einem Punkte $\mathfrak{B}$ der Kurve c einen Schnitt nach einem Punkte $\mathfrak{A}$ des Randes der ganzen Fläche, so bildet dieser mit der geschlossenen Kurve c zusammen einen Querschnitt s und zerlegt also die Fläche nach dem ersten Satze des vorigen Abschnittes in zwei getrennte einfach zusammenhängende Teile; läfst man nachträglich den Schnitt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ wieder fort, so wird hierdurch nur der Zusammenhang eines der beiden Teilgebiete um eine Einheit erhöht, aber die Gebiete bleiben getrennt. Auf einfach zusammenhängende Flächen können daher die früheren Deduktionen ohne weiteres übertragen angewendet werden und ergeben für Abelsche Integrale den Satz:

> **Wenn das Integral**
>
> $$\omega(\mathfrak{P}) = \int\limits_{\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}} \xi \, dz$$
>
> **nur polare Unstetigkeiten besitzt, so ist die Funktion $\omega(\mathfrak{P})$, innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietsteiles der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ fortgesetzt, eine eindeutige Funktion der oberen Grenze, das Integral also innerhalb dieses Gebietes vom Integrationswege unabhängig.**

Genau das gleiche Resultat ergiebt sich natürlich auch durch Anwendung des Satzes von Cauchy; denn da in einem einfach zusammenhängenden Gebietsteile $\mathfrak{S}$ der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ jede sich nicht schneidende geschlossene Kurve c für sich allein die Begrenzung eines Flächenteiles bildet, so ist das Integral $\omega = \int \xi \, dz$, erstreckt über die Kurve c, gleich Null, die Funktion $\omega(\mathfrak{P})$ also innerhalb des Gebietsteiles $\mathfrak{S}$ von dem Wege $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}$ unabhängig und somit eindeutig.

Die gesamte Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ ist, wenn ihr Geschlecht positiv ist, nicht einfach zusammenhängend, sie kann aber nach den Sätzen des vorigen Abschnittes durch Ausführung von $2p$ Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden. Diese Zerschneidung werde stets in der folgenden Weise ausgeführt, welche als die c a n o n i s c h e Zerschneidung bezeichnet und durch die nachstehende Fig. 23 schematisch veranschaulicht wird.

Wenn die mit einem kleinen Randkreise $\varkappa$ versehene Riemannsche Kugelfläche mehrfach zusammenhängend ist, also $p > 0$ ist, so giebt es einen Schnitt a_1, welcher in $\varkappa$ beginnt und in $\varkappa$ endigt und die Fläche nicht zerstückelt. Man versehe diesen Schnitt mit einem bestimmten Richtungssinne, so dafs man von einem linken und einem rechten Ufer des Schnittes zu sprechen berechtigt ist. Dann bilden nach Ausführung des Schnittes seine beiden Ufer die zwei Randlinien der zerschnittenen Fläche, für welche die Ordnung des Zusammenhanges nur um eins kleiner geworden ist. Führt man daher in dieser Fläche einen Schnitt b_1 von einem Punkte des linken Ufers von a_1 zum gegenüberliegenden Punkte des rechten Ufers, so kann dieser die Fläche unmöglich zerstückeln. Denn die beiden Ufer von b_1 vereinigen sich mit den beiden Ufern von a_1 zu einer einzigen Randlinie. In der That überzeugt man sich davon, dafs man in einem einzigen Zuge die Linie σ_1 durchlaufen kann, welche der Reihe nach aus dem linken Ufer von a_1, dem linken Ufer von b_1, dem rechten von a_1 und dem rechten von b_1 besteht; dabei werden die gegenüberstehenden Ufer eines und desselben Schnittes in entgegengesetztem Sinne durchlaufen. In der nebenstehenden Hilfsfigur 24 ist nur der Verlauf der Schnitte a_1 und b_1 in der Umgebung ihres Treffpunktes gezeichnet und der weitere Verlauf durch gleichbezeichnete Buchstaben angedeutet.

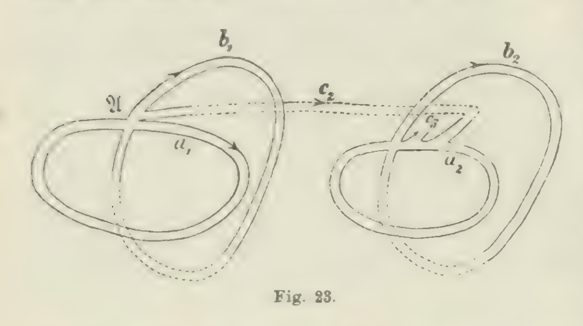


Fig. 23.

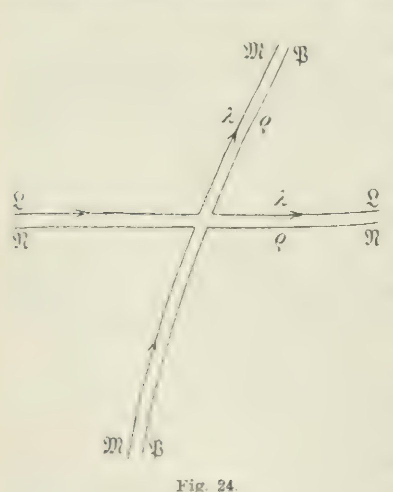


Fig. 24.

Wenn nun $p > 1$ ist, so ist die durch die Linie σ_1 zerschnittene Fläche noch nicht einfach zusammenhängend; es giebt also einen weiteren Querschnitt, welcher die Fläche nicht zerstückelt. Im übrigen ist in der Wahl dieses Querschnittes noch mannigfache Willkür gestattet, und da man seinen Anfangs- und seinen Endpunkt beliebig stetig verschieben kann, so ist es evident, dafs man ihn in einem beliebigen Punkte

von σ_1 beginnen und in einem beliebigen Punkte von σ_1 oder auch in einem Punkte seines früheren Verlaufes endigen lassen kann. Es empfiehlt sich aus Gründen der Übersichtlichkeit, den Querschnitt in sich zurücklaufen zu lassen, so dafs er aus einer geschlossenen Linie a_2 und einem Schnitte c_2 besteht, welcher a_2 mit dem Schnittnetz σ_1 verbindet. Nach Ausführung dieses Schnittes erhält die Fläche wieder zwei Randlinien, indem das linke Ufer von a_2 mit den beiden Ufern von c_2 zusammen sich an die Linie σ_1 zu einer einzigen Randlinie anschliefst, während das rechte Ufer von a_2 für sich allein die zweite Randlinie bildet. Führt man daher einen Schnitt b_2 von einem Punkte des linken Ufers von a_2 nach dem gegenüberliegenden Punkte des rechten Ufers, so kann dieser die Fläche nicht zerstückeln, da die Berandung jetzt wieder aus einer einzigen Linie besteht; die Ordnung des Zusammenhanges ist aber jetzt $2p-3$ geworden. Dabei bleibt der Kreuzungspunkt der Linien a_2 und b_2, ebenso wie vorher der Anfangspunkt des Schnittes c_2 noch unserer Willkür überlassen. Nun bilden das linke Ufer von a_2, das linke Ufer von b_2, das rechte Ufer von a_2 und das rechte Ufer von b_2, hintereinander durchlaufen, eine einzige Linie, die wir mit σ_2 bezeichnen wollen; wir können und wollen uns dann zur Vereinfachung späterer Betrachtungen so einrichten, dafs c_2 das Ende des ersten Schnittnetzes σ_1 mit dem Anfange des zweiten σ_2 verbindet.

Dieses Verfahren setzen wir, wenn $p>2$ ist, weiter fort; wir ziehen eine Linie σ_3, welche aus den linken und den rechten Ufern zweier geschlossener Kurven a_3 und b_3 besteht, und setzen diese durch einen Schnitt c_3, der vom Endpunkt von σ_2 zum Anfangspunkt von σ_3 läuft, mit dem früheren Schnittnetz in Verbindung. So erhalten wir schliefslich eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'_z$, die nur eine einzige Randlinie besitzt. Bezeichnen wir die linken und die rechten Ufer der Schnitte a, b, c durch angehängte Indices λ und ϱ, so durchlaufen wir den Rand der zerschnittenen Fläche $\mathfrak{R}'$ in einem einzigen Zuge, wenn wir der Reihe nach die folgenden Wege zurücklegen:

$$(T)\quad \begin{cases} \quad\;\; a_{1\lambda},\; b_{1\lambda},\; a_{1\varrho},\; b_{1\varrho}; \\ c_{2\lambda},\; a_{2\lambda},\; b_{2\lambda},\; a_{2\varrho},\; b_{2\varrho}; \\ c_{3\lambda},\; a_{3\lambda},\; b_{3\lambda},\; a_{3\varrho},\; b_{3\varrho}; \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_{p\lambda},\; a_{p\lambda},\; b_{p\lambda},\; a_{p\varrho},\; b_{p\varrho}; \\ c_{p\varrho},\; c_{p-1\varrho},\; \ldots\; c_{3\varrho},\; c_{2\varrho}. \end{cases}$$

Dabei werden die linken Ufer der Schnitte stets im positiven, die rechten stets im negativen Sinne durchlaufen.

Die geschlossenen Kurven $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_p, b_p$ haben die merkwürdige Eigenschaft, dafs je zwei zusammengehörige Linien a_i und b_i sich nur in einem Punkte schneiden und dafs die Linie a_i nur von b_i, aber von keiner anderen Linie a_k oder b_k geschnitten wird; es giebt also auf $\mathfrak{R}$: p Paare geschlossener Kurven, welche im ganzen nur p Schnittpunkte besitzen. Dafs derartige p Linienpaare (a_i, b_i) überhaupt möglich sind, ist eine charakteristische Eigentümlichkeit geschlossener Flächen vom Zusammenhange $2p + 1$ und für die Theorie der auf diesen Flächen verlaufenden Abelschen Integrale von der allergröfsten Bedeutung. Die Linien $c_2, c_3, \ldots c_p$ hingegen, welche je ein Paar geschlossener Linien mit einem einzigen Schnittpunkt mit einem anderen derartigen Paare in Verbindung setzen, sind nebensächlicher Natur und können auch ganz entbehrt werden. In der That überzeugt man sich davon, dafs man durch Ausdehnung der Linien a_i die Linien c_i immer weiter zusammenschrumpfen und schliefslich ganz fortfallen lassen kann. Nur um die gestaltlichen Verhältnisse der Zerschneidung zu vereinfachen, behalten wir diese Schnitte bei; wir werden aber sehen, dafs sie auf die Periodicität der Abelschen Integrale keinen Einflufs haben.

Der wirkliche Verlauf der Schnitte $a_1, b_1, \ldots a_p, b_p$ auf der Riemannschen Fläche hängt wesentlich davon ab, wie die einzelnen Blätter der Fläche in den Übergangslinien zusammengeheftet werden müssen; aber in dem einfachen Falle der zweiblättrigen Fläche, der hier als Beispiel dienen mag, läfst er sich unmittelbar angeben. Hat z. B. die Fläche 6 Verzweigungspunkte, so dafs

$$p = \frac{w}{2} - n + 1 = 2$$

ist, so ziehen wir (Fig. 25) zunächst einen mit einem Richtungssinne versehenen Schnitt a_1 im oberen Blatte, welcher $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ umkreist, und dann von einem Punkte auf dem linken Ufer von a_1 nach dem gegenüberliegenden Punkte des rechten einen Schnitt b_1, welcher, ähnlich wie in Fig. 20, über den Schnitt $\mathfrak{B}_5\mathfrak{B}_6$ in das zweite Blatt ein- und sodann über $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ in das erste zurücktritt und darum den Schnitt a_1 nur in einem Punkte durchsetzt. Ebenso ziehe man einen geschlossenen Schnitt a_2, welcher $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_4$ umkreist, und von einem Punkte auf dem linken Ufer von a_2 nach dem Gegenpunkte des rechten einen Schnitt b_2, welcher ebenfalls über $\mathfrak{B}_5\mathfrak{B}_6$ in das zweite Blatt ein- und sodann über $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ in das erste zurücktritt. Beide Schnittsysteme setzen wir durch eine Linie c_2 in Verbindung, welche von dem Knotenpunkte (a_1, b_1) nach dem Knotenpunkte (a_2, b_2) läuft. Man überzeugt sich in der Figur davon, dafs die beiden Ufer dieser Schnitte

eine einzige fortlaufende und zusammenhängende Linie nach Maſsgabe der Tabelle auf S. 333 bilden, welche die vollständige Begrenzung der zerschnittenen, einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}_z'$ ist, und daſs

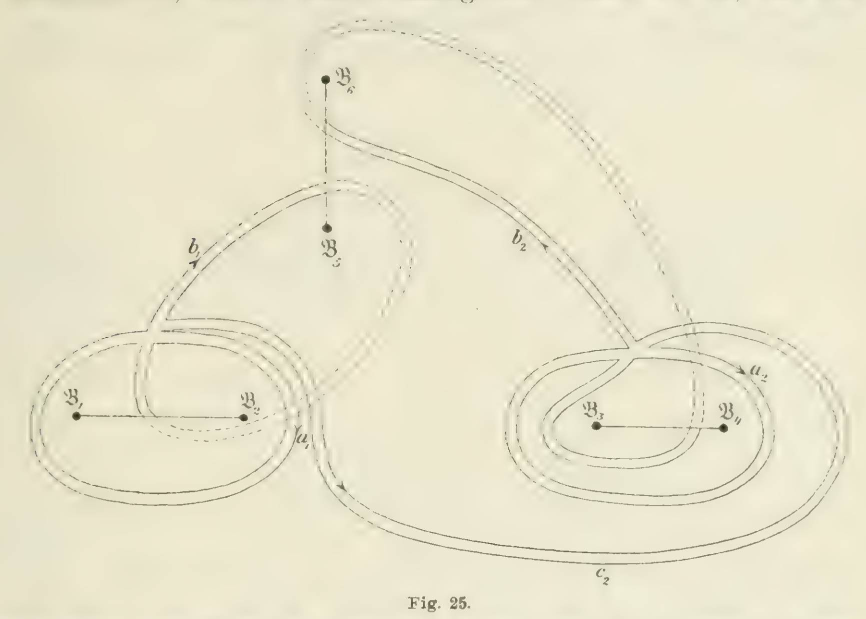


Fig. 25.

stets die linken Ufer der Schnitte in positivem, die rechten in negativem Sinne zurückgelegt werden.

Durch geeignete Auswahl der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ innerhalb der Gesamtheit der Flächen des Körpers K kann also der gestaltliche Verlauf der Querschnitte ein besonders übersichtlicher werden; abgesehen hiervon aber ist es gleichgiltig, auf welcher Fläche man die Zerschneidung ausführt. Ist nämlich x irgend eine Variable des Körpers K, so entsprechen sich die Punkte der Riemannschen Kugelflächen $\mathfrak{R}_z$ und $\mathfrak{R}_x$ umkehrbar eindeutig und stetig (S. 243), und das Schnittsystem (a_i, b_i, c_i) der ersten Fläche bildet sich also auf der zweiten in der Weise ab, daſs auch $\mathfrak{R}_x$ in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}_x'$ verwandelt wird.

§ 4.

Nachdem die Zerschneidung der Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ in die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ durchgeführt ist, kann man leicht Aufschluſs über die Periodicitätseigenschaften eines Abelschen Integrals erster oder zweiter Gattung

$$\omega = \int_{\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}} \xi \, dz$$

gewinnen.

Betrachten wir nämlich zunächst diejenigen Integrale, welche keine oder nur polare Unstetigkeiten besitzen und daher aus Elementarintegralen erster und zweiter Gattung zusammengesetzt werden können, so kann man jetzt den Fundamentalsatz auf S. 331 auf die ganze zerschnittene Fläche $\mathfrak{R}'$ anwenden, und erhält alsdann folgendes Resultat:

Wenn das Integral

$$\omega = \int_{\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}} \xi\, dz$$

keine anderen als polare Unstetigkeiten besitzt, so ist $\omega(\mathfrak{P})$ in der zerschnittenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}'$ eine eindeutige Funktion der oberen Grenze; dieselbe soll durch $\bar{\omega}(\mathfrak{P})$ bezeichnet werden.

Zufolge dieser Feststellung findet man für ein zwischen beliebigen Grenzen genommenes Integral

$$\int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \xi\, dz = \bar{\omega}(\mathfrak{P}_2) - \bar{\omega}(\mathfrak{P}_1),$$

wobei es ganz gleichgiltig ist, auf welchem Wege das Integral in der zerschnittenen Fläche $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ geführt wird. Da also auch jedes Integral, welches in der zerschnittenen Fläche über eine geschlossene Kurve erstreckt wird, gleich Null ist, so folgt, dafs von Null verschiedene Perioden des Integrals nur durch solche geschlossene Wege zustande kommen können, welche das im vorigen Paragraphen ausgeführte Querschnittsystem überschreiten, und es entsteht die Frage, um welche Beträge sich zwei Integrale unterscheiden, deren obere Grenzen gegenüberliegende Punkte eines der Schnitte a_i, b_i, c_i sind.

Betrachten wir zwei Punkte $\mathfrak{P}_\lambda$ und $\mathfrak{P}_\varrho$, welche zur linken und rechten des Schnittes a_i gelegen sind, so handelt es sich um die Ermittelung des Integrals

$$(a_i) \qquad \bar{\omega}(\mathfrak{P}_\lambda) - \bar{\omega}(\mathfrak{P}_\varrho) = \int_{\mathfrak{P}_\varrho}^{\mathfrak{P}_\lambda} \xi\, dz = A_i,$$

wenn dasselbe auf beliebigem Wege in der zerschnittenen Fläche $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{P}_\varrho$ nach $\mathfrak{P}_\lambda$ geleitet wird. Kehren wir aber die Richtung des Integrationsweges um, so folgt aus dem Anblick der Tabelle (T) auf S. 333 oder der Fig. 23, dafs wir in $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{P}_\lambda$ nach $\mathfrak{P}_\varrho$ gelangen, wenn wir vom Punkte $\mathfrak{P}_\lambda$ auf $a_{i\lambda}$ in positivem Sinne bis zum Knotenpunkt mit b_i fortwandern, sodann $b_{i\lambda}$ durchlaufen und schliefslich auf $a_{i\varrho}$ in negativem Sinne zum Punkte $\mathfrak{P}_\varrho$ zurückgehen; ein Schnitt c_k wird

hierbei zufolge der getroffenen Feststellungen nicht überschritten. Berücksichtigen wir daher, dafs auf den beiden in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Wegen das Differential ξdz wegen der Eindeutigkeit der Funktion ξ entgegengesetzt gleiche Werte erhält und die entsprechenden Integralbestandteile sich also aufheben, so ergiebt sich:

$$A_i = -\int_{b_i} \xi\, dz,$$

wobei das Integral in positivem Sinne über den Periodenweg b_i zu führen ist. In ähnlicher Weise erhalten wir aus der Tabelle auf S. 333 für zwei Punkte $\mathfrak{P}_\lambda$ und $\mathfrak{P}_\varrho$, welche zur linken und zur rechten eines Schnittes b_i gelegen sind:

$$(b_i) \qquad \bar{\omega}(\mathfrak{P}_\lambda) - \bar{\omega}(\mathfrak{P}_\varrho) = B_i = \int_{a_i} \xi\, dz;$$

denn man gelangt von $\mathfrak{P}_\varrho$ nach $\mathfrak{P}_\lambda$, wenn man vorerst auf $b_{i\varrho}$ in positivem Sinne zum Knotenpunkt läuft, sodann $a_{i\varrho}$ in positivem Sinne zurücklegt, und schliefslich auf $b_{i\lambda}$ in negativem Sinne zum Punkte $\mathfrak{P}_\varrho$ hinwandert. Schliefslich findet man die Differenz für einen der Schnitte c_i auf Grund jener Tabelle:

$$(c_i) \qquad \bar{\omega}(\mathfrak{P}_\lambda) - \bar{\omega}(\mathfrak{P}_\varrho) = 0;$$

denn wenn man auf der Begrenzung der Fläche $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{P}_\varrho$ nach $\mathfrak{P}_\lambda$ wandert, so werden alle Strecken zweimal, einmal in positivem und einmal in negativem Sinne zurückgelegt, und die Integralbestandteile heben also einander auf.

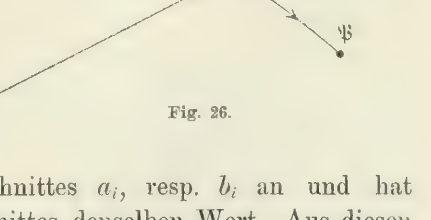


Fig. 26.

Zufolge dieser Untersuchung besitzt ein Abelsches Integral erster oder zweiter Gattung im ganzen $2p$ Perioden:

$$A_1, A_2, \ldots A_p, \quad B_1, B_2, \ldots B_p;$$

jede dieser Gröfsen giebt den Periodicitätsmodul $\omega(\mathfrak{P}_\lambda) - \omega(\mathfrak{P}_\varrho)$ der Funktion $\omega(\mathfrak{P})$ längs eines Querschnittes a_i, resp. b_i an und hat für den ganzen Verlauf des Querschnittes denselben Wert. Aus diesen $2p$ Perioden läfst sich aber jede weitere Periode komponieren. Überschreitet nämlich der Weg $s = \mathfrak{P}_0\mathfrak{P}$ z. B. den Schnitt a_1 einmal vom linken zum rechten Ufer, so erhält man (Fig. 26)

$$\int_s \xi\, dz = \bar{\omega}(\mathfrak{P}_\lambda) - \omega(\mathfrak{P}_0) + \bar{\omega}(\mathfrak{P}) - \omega(\mathfrak{P}_\varrho)$$
$$= \bar{\omega}(\mathfrak{P}) - \omega(\mathfrak{P}_0) + A_1.$$

Wir können daher jetzt den folgenden Satz aussprechen:

Erstreckt man das Integral erster oder zweiter Gattung

$$\omega = \int_{\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}} \xi\, dz$$

auf beliebigem Wege in der unzerschnittenen Fläche $\mathfrak{R}$ von der unteren zur oberen Grenze, so unterscheidet sich der Integralwert von dem Werte $\omega(\mathfrak{P})$ auf der zerschnittenen Fläche $\mathfrak{R}'$ um eine Periode, d. i. um eine Gröfse

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_p A_p + n_1 B_1 + n_2 B_2 + \cdots + n_p B_p,$$

worin $m_1, m_2, \ldots m_p, n_1, n_2 \ldots n_p$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Dabei ist m_i gleich der Anzahl der Übertritte des Integrationsweges über den Schnitt a_i, n_i gleich der Anzahl der Übertritte des Integrationsweges über den Schnitt b_i, und ein Übertritt ist mit dem positiven oder dem negativen Zeichen in Anrechnung zu bringen, je nachdem er von der Linken zur Rechten oder von der Rechten zur Linken stattfindet.

Man überzeugt sich leicht davon, dafs die vorher aufgestellten Formeln (a_i), (b_i), (c_i) nur spezielle Fälle dieses allgemeinen Satzes sind.

Diese Betrachtungen bedürfen nur weniger Abänderungen, wenn auch über die Periodicitätseigenschaften der Integrale dritter Gattung Aufschlufs gewonnen werden soll. Das Integral $\tilde{\omega}$ besitze jetzt ν logarithmische Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\nu)}$, denen resp. die Residuen $R_1, R_2, \ldots R_\nu$ zukommen mögen. Um nun den obigen Fundamentalsatz anwenden zu können, scheiden wir, ganz ähnlich wie auf S. 282, die Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\nu)}$ und ihre Umgebungen durch kleine Kreislinien $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\nu$ aus, welche sich so oft um den betreffenden Punkt herumwinden, als Blätter in ihm zusammenhängen, und ziehen sodann Schnitte $l_1, l_2, \ldots l_\nu$ von der Begrenzung von $\mathfrak{R}'$ nach den Kreisen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\nu$. Wir wollen dabei in der Weise verfahren, dafs wir die Linien l sämtlich von dem Anfangs- und Endpunkt $\mathfrak{A}$ der Begrenzungslinie von $\mathfrak{R}'$, in welchem die Schnitte a_1 und b_1 zusammenlaufen, ausgehen und in der durch die Indices bezeichneten Reihenfolge in negativem Sinne aufeinander folgen lassen, wie dies in der Fig. 27 für $\nu = 2$ dargestellt

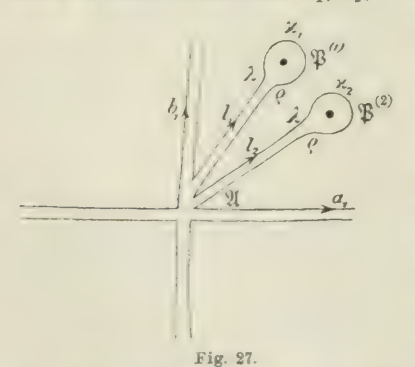


Fig. 27.

wird. An die durch die Tabelle (T) auf S. 333 charakterisierte Randlinie von $\mathfrak{R}'$ schliefst sich alsdann noch eine Linie an, welche, wenn wir wieder linke und rechte Ufer der Schnitte l unterscheiden, so bezeichnet werden kann:

$$(T'') \qquad l_{1\lambda},\ \varkappa_1,\ l_{1\varrho};\ \ l_{2\lambda},\ \varkappa_2,\ l_{2\varrho};\ \ldots\ l_{\nu\lambda},\ \varkappa_\nu,\ l_{\nu\varrho},$$

wobei die Kreislinien $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\nu$ in negativem Sinne durchlaufen werden.

Die so erhaltene Fläche, welche mit $\mathfrak{R}''$ bezeichnet sein soll, ist wieder einfach zusammenhängend; denn jeder der Schnitte l_α, zusammen mit dem zugehörigen Kreise $\varkappa_\alpha$, bildet einen Querschnitt der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$ und zerlegt also nach dem Satze 1 auf S. 326 die Fläche $\mathfrak{R}'$ in zwei einfach zusammenhängende Teile, von denen der eine die Umgebung des Punktes $\mathfrak{P}^{(\alpha)}$, der andere die ganze übrige Fläche ist. Daher ist auf der Fläche $\mathfrak{R}''$ das Integral $\bar{\tilde{\omega}}$ eine eindeutige Funktion der oberen Grenze $\mathfrak{P}$, welche wiederum mit $\bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P})$ bezeichnet sein soll.

Untersuchen wir nun, wie vorher, die Differenzen dieser Funktion zu beiden Seiten der Schnitte a_i, b_i, c_i, l_α, so finden wir der Reihe nach folgende Perioden:

$$(a_i) \qquad \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\lambda) - \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\varrho) = A_i = -\int_{b_i} \xi\, dz$$

$$(b_i) \qquad \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\lambda) - \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\varrho) = B_i = \int_{a_i} \xi\, dz$$

$$(c_i) \qquad \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\lambda) - \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\varrho) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

$$(l_\alpha) \qquad \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\lambda) - \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\varrho) = \int_{\varkappa_\alpha} \xi\, dz = 2\pi i R_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \nu).$$

Die ersten drei Gleichungen werden genau wie vorher erwiesen, während für die vierte eine ganz ähnliche Deduktion wie bei der analogen Untersuchung der Integrale rationaler Funktionen auf S. 283 zutrifft. Wir gelangen nämlich (s. Fig. 27) von einem Punkte $\mathfrak{P}_\varrho$ auf dem rechten Ufer von l_α zum gegenüberliegenden Punkte $\mathfrak{P}_\lambda$ des linken, indem wir von $\mathfrak{P}_\varrho$ nach dem logarithmischen Punkt $\mathfrak{P}^{(\alpha)}$, um diesen in positivem Sinne herum, und sodann auf dem rechten Ufer nach $\mathfrak{P}_\lambda$ wandern. Da nun die von den beiden Ufern von l_α herrührenden Bestandteile sich aufheben, so ist längs des Schnittes l_α

$$\bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\lambda) - \bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P}_\varrho) = \int_{\varkappa_\alpha} \xi\, dz,$$

wobei das Integral in positivem Sinne erstreckt ist. Wenn nun der Punkt $\mathfrak{P}^{(\alpha)}$ ein a-blättriger Verzweigungspunkt ist und z in ihm den Wert z_α hat, den wir als endlich voraussetzen dürfen, so ist (S. 289) in der Umgebung von $\mathfrak{P}^{(\alpha)}$:

$$\xi = \frac{R_\alpha}{a(z-z_\alpha)} + \psi'(z - z_\alpha),$$

wobei ψ' eine Reihe ist, welche nach ganzen Potenzen von $(z-z_\alpha)^{\frac{1}{a}}$ fortschreitet und nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen, nicht aber $(z-z_\alpha)^{-1}$ enthält. Man erhält also in der That, da sich die Kreislinie $\varkappa_\alpha$ a-mal um $\mathfrak{P}^{(\alpha)}$ herumwindet:

$$\int_{\varkappa_\alpha} \xi\, dz = 2\pi i R_\alpha.$$

Man kann daher für die Integrale dritter Gattung den folgenden Satz aufstellen:

Erstreckt man ein Abelsches Integral dritter Gattung

$$\tilde{\omega} = \int_{\mathfrak{P}_0}^{\mathfrak{P}} \xi\, dz$$

mit ν logarithmischen Unstetigkeiten $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\nu)}$, denen die Residuen $R_1, R_2, \ldots R_\nu$ zukommen, auf beliebigem Wege von der unteren zur oberen Grenze, so unterscheidet sich der Integralwert von dem in der einfach zusammenhängenden zerschnittenen Fläche $\mathfrak{R}''$ stattfindenden Werte $\bar{\tilde{\omega}}(\mathfrak{P})$ um eine Periode, d. i. um eine Gröſse

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_p A_p + n_1 B_1 + n_2 B_2 + \cdots + n_p B_p \\ + 2\pi i (r_1 R_1 + r_2 R_2 + \cdots + r_\nu R_\nu),$$

worin $m_1, \ldots m_p, n_1, \ldots n_p, r_1, \ldots r_\nu$ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Dabei ist m_i gleich der Anzahl der Übertritte des Integrationsweges über den Schnitt a_i, n_i gleich der Anzahl der Übertritte über den Schnitt b_i, r_α gleich der Anzahl der Übertritte über den Schnitt l_α, wobei ein Übertritt, ebenso wie im vorigen Satze, in positivem oder in negativem Sinne erfolgen kann.

Ein solches Integral hat also zwei Arten von Perioden, von welchen wir die einen $2\pi i R_1, \ldots 2\pi i R_\nu$, welche von den logarithmischen Unstetigkeiten des Integrals herrühren, als die logarithmischen, die anderen $A_1, \ldots A_p, B_1, \ldots B_p$, welche durch die Art des Zusammenhanges der Fläche bedingt sind, als die cyklischen Perioden bezeichnen.

§ 5.

Das Residuum des Differentials $d\tilde{\omega} = \xi dz$ für einen Punkt $\mathfrak{P}$, multipliziert mit $2\pi i$, läfst sich nach den letzten Ergebnissen auch als eine Periode des zugehörigen Integrals $\tilde{\omega}$ definieren. Bezeichnet man nämlich, wie das in der Folge öfter geschehen soll, das Residuum für den Punkt $\mathfrak{P}$ durch $R_{\mathfrak{P}}$, so ist

$$R_{\mathfrak{P}}(\xi dz) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{U}(\mathfrak{P})} \xi dz,$$

wobei das Integral in positivem Sinne über die Begrenzung der Umgebung $\mathfrak{U}$ des Punktes $\mathfrak{P}$ zu erstrecken ist. Auch aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, dafs es nur für logarithmische Stellen von Null verschieden ist, und wenn man berücksichtigt, dafs nach dem Satze auf S. 245 sich auf zwei umkehrbar eindeutig aufeinander bezogenen Riemannschen Flächen auch die Umgebungen zweier zugeordneter Punkte eindeutig entsprechen, so folgt auch, dafs das Residuum von der besonderen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ ganz unabhängig ist.

Wir können jetzt ganz analog wie auf S. 285 einen wichtigen Satz über die Summe der Residuen eines beliebigen Abelschen Integrals ableiten. Führen wir das Integral $\tilde{\omega}$ in negativem Sinne um den Punkt $\mathfrak{A}$, welcher der Anfangs- und Endpunkt des gesamten Schnittsystems ist, so erhält man das Resultat Null, weil $\mathfrak{A}$ ein gewöhnlicher Punkt ist. Andererseits werden (s. Fig. 27) die Linien $l_1, l_2, \ldots l_\nu$ je einmal vom linken zum rechten Ufer, und die Linien a_1 und b_1 je zweimal, aber das eine Mal im entgegengesetzten Sinne wie in dem anderen, überschritten. Die Anwendung des letzten Satzes ergiebt somit, da a_1 und b_1 keine Beiträge liefern, die Gleichung

$$R_1 + R_2 + \cdots + R_\nu = 0.$$

Es gilt also auch für Abelsche Differentiale, ganz ebenso wie für rationale, der Satz:

Die Summe aller Residuen eines Abelschen Differentials ist stets gleich Null.

Dieser Satz kann auch leicht auf rein algebraischem Wege durch Zurückführung auf den entsprechenden für rationale Differentiale erhalten werden. Wenn nämlich an der Stelle $(z = \alpha)$ etwa wieder die drei Punkte V_a, V_b, V_c übereinanderliegen, so ergiebt die Addition der konjugierten Reihenentwickelungen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ der Funktion ξ sofort, dafs die Summe der Residuen des Differentials ξdz für die Punkte V_a, V_b, V_c gleich dem Residuum des rationalen Differentials

$$(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)dz = S(\xi)dz$$

für die Stelle $(z = \alpha)$ ist. Allgemein ist, wenn dem Punkte $\mathfrak{p}$ der einfachen Kugelfläche $\mathfrak{K}_z$ die übereinanderliegenden Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varrho$ von $\mathfrak{R}_z$ entsprechen:

$$R_{\mathfrak{P}_1}(\xi\, dz) + R_{\mathfrak{P}_2}(\xi\, dz) + \cdots + R_{\mathfrak{P}_\varrho}(\xi\, dz) = R_{\mathfrak{p}}[S(\xi)dz].$$

Die Summe der Residuen des Abelschen Differentials $\xi\, dz$ für alle Punkte der Riemannschen Fläche ist also gleich der Summe aller Residuen des rationalen Differentials $S(\xi)dz$, also ebenfalls gleich Null.

Schreibt man hiernach einem Abelschen Integral seine Unstetigkeitspunkte und die Hauptteile der zu ihnen gehörigen Reihenentwickelungen vor, so müssen dieselben so gewählt werden, dafs die Summe der Residuen Null ist. Diese Beschränkung ist aber auch, wie unmittelbar aus den Ausführungen des § 3 der zwanzigsten Vorlesung folgt, die einzige, welcher die Hauptteile der Reihenentwickelungen in den Unstetigkeitspunkten unterworfen sind. Nimmt man nämlich einen Hilfspunkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ hinzu und bildet mit diesem die Elementarintegrale dritter Gattung

$$\tilde{\omega}_{01}, \quad \tilde{\omega}_{02}, \ldots \tilde{\omega}_{0\nu},$$

wobei $\tilde{\omega}_{0h}$ die logarithmischen Punkte $\mathfrak{P}^{(0)}$ und $\mathfrak{P}^{(h)}$ und in diesen resp. die Residuen -1 und $+1$ hat, so hat das Integral

$$R_1\tilde{\omega}_{01} + R_2\tilde{\omega}_{02} + R_3\tilde{\omega}_{03} + \cdots + R_\nu\tilde{\omega}_{0\nu}$$

resp. in $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \mathfrak{P}^{(3)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\nu)}$ die Residuen $R_1, R_2, R_3, \ldots R_\nu$; der Hilfspunkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ aber hat das Residuum

$$-R_1 - R_2 - R_3 - \cdots - R_\nu = 0$$

und ist daher nicht logarithmisch. Die Residuen sind also aufser der angegebenen einer weiteren Bedingung nicht mehr unterworfen; ebenso wenig unterliegen die algebraischen Glieder, welche in den zu den Unstetigkeitspunkten des Integrals gehörigen Hauptteilen auftreten, irgend einer Einschränkung, wie das schon auf S. 314 gezeigt worden ist. Giebt man alsdann von einem Abelschen Integral mit dieser Mafsgabe die Art seiner Unstetigkeiten, so wird dasselbe bestimmt, abgesehen von einem Integral erster Gattung, welches noch beliebig hinzugefügt werden kann.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Normierung der Integrale durch Angabe eines Teiles der Perioden. — Periodenrelationen für Integrale erster, zweiter, dritter Gattung. — Die Perioden und die Integranden der Integrale zweiter und dritter Gattung als Funktionen der Unstetigkeitspunkte. — Der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei den Integralen dritter Gattung. — Der Riemann-Rochsche Satz als Folge der Periodenrelationen.

§ 1.

Nachdem wir im vorigen Kapitel den Überblick über die Perioden eines einzelnen Abelschen Integrals gewonnen haben, gehen wir nunmehr dazu über, die Gesamtheit der zu dem Körper $K(z, u)$ gehörigen Abelschen Integrale hinsichtlich ihrer Periodeneigenschaften zu untersuchen. Zu diesem Zwecke werden wir vor allem eine fundamentale, von Riemann entdeckte Ungleichung aufstellen, welcher die Perioden eines Abelschen Integrals erster Gattung genügen müssen, und sodann mit Hilfe derselben zeigen, dafs wir die Abelschen Integrale auch in ganz anderer Weise als bisher festzulegen imstande sind. Während wir nämlich bisher die Abelschen Integrale durch Angabe des zugehörigen Divisors bestimmt haben, werden wir nunmehr das wichtige Resultat feststellen, dafs ein zum Körper gehöriges Abelsches Integral auch dann, abgesehen von der Integrationskonstanten, völlig bestimmt ist, wenn die Art seiner Unstetigkeiten und ein Teil seiner Perioden gegeben sind.

Setzen wir auf der Riemannschen Kugelfläche mit Trennung des reellen und imaginären Bestandteiles $z = x + iy$, und bezeichnen wir mit u und v irgend zwei reelle Funktionen der reellen Variabeln x und y, so ist nach einem bekannten Satze von Green*) für jeden Gebietsteil s, auf welchem die Funktionen u und v mit ihren ersten partiellen Ableitungen eindeutig und stetig sind:

$$\int_s u\,dv = \iint_s \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy,$$

*) S. z. B. H. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 1897. S. 81 und 99.

wenn das Linienintegral links in positivem Sinne um die Berandung von s herumgeführt, das Doppelintegral rechts über die Fläche s erstreckt wird. Sind nun u und v der reelle und der imaginäre Bestandteil einer auf der Riemannschen Kugelfläche eindeutigen analytischen Funktion $w(z) = u + iv$, so gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

und es ist also, wenn die Funktion $w(z)$ innerhalb des Gebiets s keine Unstetigkeiten besitzt:

$$\int\limits_s u\,dv = \iint\limits_s \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy.$$

Da nun der Integrand auf der rechten Seite der Gleichung eine Summe zweier Quadrate und also niemals negativ ist, so ist das Linienintegral

$$1)\qquad \int\limits_s u\,dv \geqq 0,$$

und zwar kann der Grenzfall des Gleichheitszeichens nur dann eintreten, wenn für das ganze Gebiet s

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

ist; dann aber ist u und v, also auch die Funktion $w(z)$ in dem ganzen Gebiete s eine Konstante. Wenn also $w(z)$ eine eigentliche Funktion von z ist, so kann in der Ungleichung nur das Zeichen $>$ gelten.

Diesen Satz wollen wir in dem Falle anwenden, daſs die Funktion $w(z)$ ein Integral erster Gattung und das Gebiet s die ganze zerschnittene Kugelfläche $\mathfrak{R}'$ ist; da w auf $\mathfrak{R}'$ durchweg endlich, eindeutig und stetig ist, so sind die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Satzes sämtlich erfüllt. Die Perioden des Integrals w für die Schnitte a_i und b_i seien mit Trennung des reellen und des imaginären Teiles:

$$A_1 = \alpha_1' + \alpha_1'' i, \quad A_2 = \alpha_2' + \alpha_2'' i, \ldots A_p = \alpha_p' + \alpha_p'' i,$$
$$B_1 = \beta_1' + \beta_1'' i, \quad B_2 = \beta_2' + \beta_2'' i, \ldots B_p = \beta_p' + \beta_p'' i.$$

Erstreckt man nun das Integral $\int u\,dv$ über den Rand von $\mathfrak{R}'$ in der durch das Tableau (T) auf S. 333 angegebenen Reihenfolge, so erhält man z. B. von den Schnitten a_1 und b_1, wenn man die von dem linken und rechten Ufer jedes Schnittes herrührenden Bestandteile zusammenfaſst und dabei berücksichtigt, daſs die entsprechenden v-Werte für

beide Ufer sich blofs um die Konstante α_1'', resp. β_1'' unterscheiden und das Differential dv also dasselbe ist:

$$\int\limits_{a_1}[u(\mathfrak{P}_\lambda) - u(\mathfrak{P}_\varrho)]\,dv + \int\limits_{b_1}[u(\mathfrak{P}_\lambda) - u(\mathfrak{P}_\varrho)]\,dv$$

$$= \alpha_1'\int\limits_{a_1} dv + \beta_1'\int\limits_{b_1} dv = \alpha_1'\beta_1'' - \alpha_1''\beta_1'.$$

Da ferner die von den beiden Ufern der Schnitte c_i herrührenden Beiträge sich aufheben, so ergiebt sich für die Perioden eines eigentlichen Integrals erster Gattung die Ungleichung

$$2)\qquad \alpha_1'\beta_1'' - \alpha_1''\beta_1' + \alpha_2'\beta_2'' - \alpha_2''\beta_2' + \cdots + \alpha_p'\beta_p'' - \alpha_p''\beta_p' > 0.$$

Aus dieser wichtigen Relation ziehen wir nun unmittelbar die Folgerung, dafs für ein Integral erster Gattung, welches keine Konstante ist, die Perioden $A_1, A_2, \ldots A_p$ nicht sämtlich verschwinden können; denn andernfalls wären die sämtlichen Gröfsen α_i', α_i'', also auch die auf der linken Seite von (2) stehende Summe gleich Null, während sie positiv sein mufs. In ganz der gleichen Weise erschliefst man, dafs die Perioden

$$B_1, \quad B_2, \ldots B_p$$

nicht sämtlich verschwinden können. Während wir also früher nur feststellen konnten, dafs ein Integral erster Gattung nicht lauter verschwindende Perioden besitzen kann, zeigt das neue Ergebnis, dafs auch in jedem der beiden Halbsysteme, in welche die $2p$ Fundamentalperioden eines Integrals erster Gattung zerlegt werden können, mindestens eine von Null verschiedene Periode vorhanden sein mufs.

Eine weitere Konsequenz dieses Satzes besteht nun darin, dafs von einem Integral erster Gattung nach Belieben die p Perioden für die Schnitte a_i oder die p Perioden für die Schnitte b_i vorgeschrieben werden können, und dafs durch diese Angabe das Integral, abgesehen von einer additiven Konstanten, bestimmt ist. In der That, es seien $w_1, w_2, \ldots w_p$ ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung, und diese mögen das Periodensystem haben:

	a_1	a_2	$\ldots$	a_p	b_1	b_2	$\ldots$	b_p
w_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1p}	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	b_{1p}
w_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2p}	b_{21}	b_{22}	$\ldots$	b_{2p}
$\vdots$	.	.	.	.	.	.	.	.
w_p	a_{p1}	a_{p2}	$\ldots$	a_{pp}	b_{p1}	b_{p2}	$\ldots$	b_{pp},

so dafs das Integral w_i an dem Schnitte a_k die Differenz

$$w_i(\mathfrak{P}_\lambda) - w_i(\mathfrak{P}_\varrho) = a_{ik},$$

an dem Schnitte b_k die Differenz

$$w_i(\mathfrak{P}_\lambda) - w_i(\mathfrak{P}_\varrho) = b_{ik}$$

aufweist. Bilden wir daher irgend ein Integral erster Gattung

$$w = c + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_p w_p,$$

so hat dieses an dem Querschnitte a_i die Differenz

$$3) \qquad A_i = c_1 a_{1i} + c_2 a_{2i} + \cdots + c_p a_{pi},$$

an dem Querschnitte b_i die Differenz

$$4) \qquad B_i = c_1 b_{1i} + c_2 b_{2i} + \cdots + c_p b_{pi}.$$

Hieraus folgt nun zunächst, dafs die Determinanten

$$|a_{ik}| \quad \text{und} \quad |b_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots p)$$

beide von Null verschieden sind, denn andernfalls würde man die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_p$ aus den p linearen homogenen Gleichungen $A_i = 0$, resp. $B_i = 0$ so bestimmen können, dafs sie nicht alle verschwinden und dafs doch die p Perioden A_i oder die p Perioden B_i Null sind, und das ist nach dem voranstehenden Satze unmöglich, da $w_1, \ldots w_p$ linear unabhängig sind.

Schreibt man daher dem Integrale w die Perioden $A_1, A_2, \ldots A_p$ vor, so haben die obigen Gleichungen (3) eine und nur eine Lösung $c_1, c_2, \ldots c_p$, und das Integral w ist also bis auf die additive Konstante c völlig bestimmt. Das Gleiche gilt für die Perioden $B_1, B_2, \ldots B_p$, und damit ist in der That der Satz bewiesen:

> Ein Integral erster Gattung ist, abgesehen von einer additiven Konstanten, festgelegt, wenn entweder die p Perioden für die Schnitte a_i oder die p Perioden für die Schnitte b_i willkürlich gegeben sind.

An Stelle der Integrale $w_1, w_2, \ldots w_p$ kann man auch irgend ein anderes System von p Integralen erster Gattung zu Grunde legen, welche mit jenen durch eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante zusammenhängen. Da nun die obige Determinante $|a_{ik}|$ von Null verschieden ist, so kann man insbesondere auch diejenigen p Integrale $u_1, u_2, \ldots u_p$ wählen, welche durch Auflösung der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \cdots + a_{1p} u_p \\ w_2 &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{2p} u_p \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_p &= a_{p1} u_1 + a_{p2} u_2 + \cdots + a_{pp} u_p \end{aligned}$$

erhalten werden. Das Integral u_i hat dann an dem Querschnitte a_i die Differenz 1, während die Differenz an allen übrigen Querschnitten a_k verschwindet; denn da $w_1, w_2, \ldots w_p$ an dem Querschnitte a_i die

Differenzen $a_{1i}, a_{2i}, \ldots a_{pi}$ besitzt, so hat $u_1, \ldots u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots u_p$ ebendaselbst die Differenzen $0, \ldots 0, 1, 0, \ldots 0$. Nach dem letzten Satze ist das Integral u_i durch diese Angabe und durch Festlegung seiner unteren Grenze bestimmt. Bei Zugrundelegung dieser Normalintegrale nimmt das Tableau der Perioden folgende einfachere Gestalt an:

	a_1	$a_2 \ldots a_p$	b_1	$b_2 \ldots b_p$
u_1	1	$0 \ldots 0$	τ_{11}	$\tau_{12} \ldots \tau_{1p}$
u_2	0	$1 \ldots 0$	τ_{21}	$\tau_{22} \ldots \tau_{2p}$
$\vdots$	.	. . . .	.	. . . .
u_p	0	$0 \ldots 1$	τ_{p1}	$\tau_{p2} \ldots \tau_{pp}$,

wobei, wie wir sehr bald sehen werden, überdies das System der Perioden τ_{ik} symmetrisch ist.

In ähnlicher Weise läfst sich auch ein Abelsches Integral mit beliebig vorgegebenen Unstetigkeiten normieren. Wir haben früher (S. 342) gezeigt, dafs von einem allgemeinen Abelschen Integrale ω die Hauptteile der in den Unstetigkeitspunkten stattfindenden Reihenentwickelungen willkürlich mit der einzigen Einschränkung angenommen werden dürfen, dafs die Summe aller Residuen den Wert Null hat. Denkt man sich aber diese die Art der Unstetigkeit von ω bestimmenden Bestandteile gegeben, so ist die Funktion hierdurch noch nicht festgelegt, sondern zwei solche Integrale, ω und $\omega^{(0)}$, welche in gleicher Weise unendlich werden, können sich noch um eines der ersten Gattung w unterscheiden. Es ist dann klar, dafs wir ω bis auf eine additive Konstante bestimmen können, wenn wir noch die in den Schnitten a_i oder die in den Schnitten b_i geltenden Differenzen angeben; denn, besitzt ω an den Querschnitten a_i die Differenzen $L_1, L_2, \ldots L_p$, das mit den gleichen Unstetigkeiten versehene Integral $\omega^{(0)}$ aber die Differenzen $L_1^{(0)}, L_2^{(0)}, \ldots L_p^{(0)}$, so hat das Integral erster Gattung

$$w = \omega - \omega^{(0)}$$

die Differenzen $L_1 - L_1^{(0)}, \ldots L_p - L_p^{(0)}$ und ist also hierdurch bis auf die Konstante bestimmt. Es gilt somit der Satz:

Ein beliebiges Abelsches Integral ist, abgesehen von einer additiven Konstanten, festgelegt, wenn erstens die Hauptteile der in den Unstetigkeitspunkten stattfindenden Reihenentwickelungen und zweitens die p Perioden für die Schnitte a_i (oder die p Perioden für die Schnitte b_i) gegeben sind; dabei sind diese Bestimmungselemente nur der einzigen Bedingung unterworfen, dafs die Summe der Residuen des Integrals verschwindet. Insbesondere kann man von einem nicht überall

endlichen Integral verlangen, daſs es an den Querschnitten a_i keine Differenzen besitzt; ein solches Integral wird als ein in Bezug auf die Querschnitte a_i normiertes Integral bezeichnet.

Die Normierung der Abelschen Integrale durch die Perioden wird, weil sie meist über den Bereich der algebraischen Funktionen hinausführt, als „transcendente Normierung“ bezeichnet im Gegensatz zur algebraischen, bei welcher das Integral durch den zugehörigen Differentialteiler bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt wird.

§ 2.

Das im vorigen Paragraphen abgeleitete Resultat ergab sich dadurch, daſs wir das Integral $\int u\,dv$ um das gesamte Schnittsystem herumführten, welches die Begrenzung der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$ bildet. Diese Methode, welche als die Riemannsche Methode der Randintegration bezeichnet wird, erweist sich auch dann als ein überaus fruchtbares Prinzip, wenn wir aus irgend zwei Abelschen Integralen $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$, die aus dem Körper $K(z, u)$ hervorgehen, das Integral

$$I = \int \omega^{(1)}\, d\,\omega^{(2)}$$

zusammensetzen und dieses um die Gesamtbegrenzung von $\mathfrak{R}'$ herumerstrecken. Besitzen die Funktionen $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ an den $2p$ Querschnitten a_i und b_i resp. die Differenzen

$$\begin{array}{ll} L_1^{(1)},\ L_2^{(1)}, \ldots L_p^{(1)}, & M_1^{(1)},\ M_2^{(1)}, \ldots M_p^{(1)}, \\ L_1^{(2)},\ L_2^{(2)}, \ldots L_p^{(2)}, & M_1^{(2)},\ M_2^{(2)}, \ldots M_p^{(2)}, \end{array}$$

so erhält das um die Begrenzung von $\mathfrak{R}'$ in positivem Sinne herumgeführte Integral I den Wert

$$L_1^{(1)} M_1^{(2)} - L_1^{(2)} M_1^{(1)} + L_2^{(1)} M_2^{(2)} - L_2^{(2)} M_2^{(1)} + \cdots + L_p^{(1)} M_p^{(2)} - L_p^{(2)} M_p^{(1)};$$

denn es ergiebt sich von den beiden Ufern der Schnitte a_i und b_i der Beitrag

$$\int\limits_{a_i} [\omega^{(1)}(\mathfrak{P}_\lambda) - \omega^{(1)}(\mathfrak{P}_\varrho)]\, d\,\omega^{(2)} + \int\limits_{b_i} [\omega^{(1)}(\mathfrak{P}_\lambda) - \omega^{(1)}(\mathfrak{P}_\varrho)]\, d\,\omega^{(2)}$$

$$= L_i^{(1)} \int\limits_{a_i} d\,\omega^{(2)} + M_i^{(1)} \int\limits_{b_i} d\,\omega^{(2)} = L_i^{(1)} M_i^{(2)} - L_i^{(2)} M_i^{(1)},$$

während die von den beiden Ufern von c_i herrührenden Bestandteile sich wieder aufheben. Andererseits läſst sich das Integral I, wenn die

Unstetigkeiten von $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ bekannt sind, mit Hilfe des Cauchyschen Satzes auf anderem Wege auswerten, und durch Vergleichung beider Resultate erhalten wir so algebraische Relationen, welchen die Perioden der beiden Integrale $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ genügen müssen. Diese bilinearen Periodenrelationen, welche wir nun im einzelnen ableiten wollen, sind die Grundlage jeder tiefer in das Wesen der Abelschen Integrale eindringenden Untersuchung.

Da wir sowohl für $\omega^{(1)}$ als auch für $\omega^{(2)}$ eines der Elementarintegrale der drei Gattungen wählen können, so erhalten wir sechs verschiedene Fundamentalrelationen, aus welchen sich alle anderen bilinearen Relationen zwischen den Perioden Abelscher Integrale zusammensetzen lassen und welche in Sätzen verschiedenartigen Charakters ihren Ausdruck finden.

Nehmen wir für $\omega^{(1)}$ und $\omega^{(2)}$ zunächst zwei Integrale erster Gattung, deren Perioden resp. mit

$$A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots A_p^{(1)}, \quad B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots B_p^{(1)}$$

und

$$A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \dots A_p^{(2)}, \quad B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, \dots B_p^{(2)}$$

bezeichnet sein mögen, so ist das über die Begrenzung von $\mathfrak{R}'$ erstreckte Integral

$$I_1 = \int\limits_{\mathfrak{R}'} w^{(1)} dw^{(2)}$$

nach dem Satze von Cauchy gleich Null. Da nämlich $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ auf der ganzen zerschnittenen Fläche eindeutig, endlich und stetig sind und sowohl die Funktion $w^{(1)}$, als auch das Differential $dw^{(2)}$ überall positive oder verschwindende Ordnungszahlen besitzen, so erhält die Integralfunktion keinerlei Unstetigkeiten; bei dieser Überlegung ist zu beachten, dafs von der Ordnungszahl des Differentiales $dw^{(2)} = \xi dz$ in ganz demselben Sinne die Rede ist wie auf S. 294, und dafs hierdurch eben die Betrachtung von der Variabeln z ganz unabhängig wird, die der Integration und der Auswahl der Riemannschen Fläche zu Grunde gelegt wird. Es gilt somit die bilineare Relation

$$\text{(I)} \qquad A_1^{(1)} B_1^{(2)} - A_1^{(2)} B_1^{(1)} + \dots + A_p^{(1)} B_p^{(2)} - A_p^{(2)} B_p^{(1)} = 0.$$

Nimmt man insbesondere für $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ zwei der im vorigen Paragraphen aufgestellten Normalintegrale u_i und u_k, so ist für das Integral u_i

$$A_r^{(1)} = \delta_{ir}, \quad B_r^{(1)} = \tau_{ir},$$

und ebenso für u_k

$$A_r^{(2)} = \delta_{kr}, \quad B_r^{(2)} = \tau_{kr},$$

wo $\delta_{rs} = 1$ oder $= 0$ zu setzen ist, je nachdem die Indices r, s gleich oder ungleich sind. Man erhält daher aus (I):

$$\tau_{ik} = \tau_{ki}.$$

In dem Tableau der Perioden der Normalintegrale auf S. 347 ist also das quadratische System τ_{ik} stets ein symmetrisches.

An zweiter Stelle betrachten wir den Fall, daſs das eine Integral ein überall endliches, das andere ein Integral zweiter Gattung mit einem einzigen Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{O}$ ist. Das erste Integral w habe an den Querschnitten $a_1, \ldots a_p, b_1, \ldots b_p$ die Differenzen

$$A_1, A_2, \ldots A_p, \quad B_1, B_2, \ldots B_p,$$

das andere Integral $t_{\mathfrak{O}}^{(r)}$ werde im Punkte $\mathfrak{O}$ von r^{ter} Ordnung unendlich und habe die Perioden

$$C_1, C_2, \ldots C_p, \quad D_1, D_2, \ldots D_p.$$

Dann erhält das Integral

$$I_2 = \int t_{\mathfrak{O}}^{(r)} dw,$$

um die Gesamtbegrenzung der Fläche $\mathfrak{R}'$ herumgeführt, den Wert

$$C_1 B_1 - A_1 D_1 + C_2 B_2 - A_2 D_2 + \cdots + C_p B_p - A_p D_p.$$

Schneidet man ferner aus der Fläche $\mathfrak{R}'$ den Punkt $\mathfrak{O}$ und seine Umgebung $\mathfrak{U}$ durch einen kleinen Kreis heraus, der sich ein oder mehrere Male um $\mathfrak{O}$ herumwindet, so ist auf der übrig bleibenden Fläche $\mathfrak{S}$ sowohl $t_{\mathfrak{O}}^{(r)}$ als auch w, folglich auch die Integralfunktion I_2 durchweg eindeutig, endlich und stetig, und man erhält also den Wert Null, wenn man das Integral I_2 um die Gesamtbegrenzung von $\mathfrak{S}$, welche aus der Begrenzung von $\mathfrak{R}'$ und der Begrenzung von $\mathfrak{U}$ besteht, in positivem Sinne herumführt. Somit hat man

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} t_{\mathfrak{O}}^{(r)} dw = \int\limits_{\mathfrak{U}} t_{\mathfrak{O}}^{(r)} dw,$$

wenn beide Integrale in positivem Sinne erstreckt werden, und da das zweite Integral, dividiert durch $2\pi i$, nichts anderes als das Residuum des zugehörigen Differentials für den Unstetigkeitspunkt $\mathfrak{O}$ ist, so erhält man die folgende Fundamentalformel für die Perioden eines Integrals zweiter Gattung:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} C_1 B_1 - A_1 D_1 + C_2 B_2 - A_2 D_2 + \cdots + C_p B_p - A_p D_p \\ = 2\pi i \, R_{\mathfrak{O}} \left(t_{\mathfrak{O}}^{(r)} dw \right), \end{aligned}$$

wobei $R_{\mathfrak{O}}$ ebenso wie auf S. 341 das Residuum für den Punkt $\mathfrak{O}$ bedeutet. Bei der Berechnung dieses Residuums genügt es, den Fall zu betrachten, daſs der Hauptteil des Integrals zweiter Gattung aus einem einzigen Gliede besteht, da man ja nach den Ausführungen auf S. 342 aus derartigen Elementarintegralen und überall endlichen Integralen jedes der zweiten Gattung additiv zusammensetzen kann. Wenn auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ der Punkt $\mathfrak{O}$ ein a-blättriger Ver-

zweigungspunkt ist und z in ihm den Wert α hat, so hat man in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{Q}$ die Reihenentwickelungen

$$1)\quad \begin{aligned} t_{\mathfrak{Q}}^{(r)} &= \frac{g}{(z-\alpha)^{\frac{r}{a}}} + \text{positiven Potenzen von } (z-\alpha), \\ w &= w_0 + u_1(z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + w_2(z-\alpha)^{\frac{2}{a}} + \cdots + w_r(z-\alpha)^{\frac{r}{a}} + \cdots, \end{aligned}$$

wobei, wenn $\alpha = \infty$ ist, $z - \alpha$ wieder durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen ist. Setzt man nun die in $\mathfrak{Q}$ in erster Ordnung verschwindende Funktion $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ resp. $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{a}}$ gleich π und differenziert nach π, so erhält man

$$\frac{dw}{d\pi} = w_1 + 2w_2\pi + 3w_3\pi^2 + \cdots + rw_r\pi^{r-1} + \cdots,$$

also

$$t_{\mathfrak{Q}}^{(r)}\,dw = t_{\mathfrak{Q}}^{(r)}\frac{dw}{d\pi}\,d\pi = \left(\frac{rgw_r}{\pi} + \cdots\right)d\pi;$$

das gesuchte Residuum ist also rgw_r, und die Formel (II) erhält die Gestalt

$$\text{(IIa)}\quad C_1B_1 - A_1D_1 + C_2B_2 - A_2D_2 + \cdots + C_pB_p - A_pD_p = 2\pi i r g w_r,$$

wo die Koeffizienten g und w_r aus den Formeln (1) zu entnehmen sind.

Man kann das Integral zweiter Gattung nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes durch Hinzufügung eines Integrals erster Gattung so normieren, dafs seine Differenzen $C_1, \ldots C_p$ an den Querschnitten a_k Null sind; dann ergiebt die letzte Gleichung unmittelbar Ausdrücke für die Differenzen $D_1, \ldots D_p$ an den Querschnitten b_k. Wählt man nämlich alsdann für w das auf S. 346 erklärte Normalintegral erster Gattung u_k, so verschwinden in (IIa) nicht blofs $C_1, \ldots C_p$, sondern auch

$$A_1, \ldots A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots A_p,$$

während $A_k = 1$ ist; man erhält somit die Gleichung

$$-D_k = 2\pi i r g u_k^{(r)},$$

welche in dem Satze ihren Ausdruck findet:

Ein in Bezug auf die Querschnitte a_k normiertes Integral zweiter Gattung, welches nur im Punkte $\mathfrak{Q}$ wie

$$\frac{g}{(z-\alpha)^{\frac{r}{a}}}$$

unendlich wird, besitzt an jedem Querschnitte b_k eine Periode D_k, welche algebraisch von dem Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{Q}$ abhängt; es ist nämlich

$$\text{(IIb)}\qquad D_k = -2\pi i r g u_k^{(r)},$$

wobei $u_k^{(r)}$ den Koeffizienten von $(z-\alpha)^{\frac{r}{a}}$ in der Entwickelung des k^{ten} Normalintegrals erster Gattung u_k bedeutet.

Wenn $\mathfrak{Q}$ für das Integral ein Pol erster Ordnung ist, wenn ferner die Riemannsche Fläche in $\mathfrak{Q}$ unverzweigt und der zugehörige Wert α endlich ist, so erhält man die obige Gleichung in ihrer einfachsten Gestalt, nämlich:

$$\text{(IIb)} \qquad D_k = -2\pi i g u'_k(\mathfrak{Q}),$$

wobei u'_k den Differentialquotienten von u_k nach z, also den Integranden des Normalintegrals erster Gattung

$$u_k = \int u'_k \, dz$$

bedeutet.

Die Perioden des in der angegebenen Weise normierten Integrals zweiter Gattung hängen also algebraisch von dem Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{Q}$ ab. Hierbei ist aber zu beachten, dafs diese Normierung selbst in dem auf S. 348 angegebenen Sinne transcendent ist; denn wir haben zu einem beliebigen Integrale zweiter Gattung, um die Perioden an den Querschnitten a_i in Fortfall zu bringen, ein Integral erster Gattung

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_p w_p$$

hinzugefügt, dessen Koeffizienten $c_1, \ldots c_p$ von den Perioden des ersten Integrals abhängen und daher noch nicht bestimmte Funktionen des Poles $\mathfrak{Q}$ sind. Somit ist der Integrand eines derartigen normierten Integrals zweiter Gattung zwar, in seiner Abhängigkeit von der Integrationsvariabeln betrachtet, eine Funktion des Körpers $K(z, u)$; betrachtet man ihn aber in seiner Abhängigkeit von dem Pole $\mathfrak{Q} = (z_0, u_0)$, so könnte er sehr wohl aufserhalb des Körpers $K(z_0, u_0)$ gelegen sein. Es entsteht daher die Frage, ob es Integrale zweiter Gattung giebt, deren Integranden, in beiderlei Abhängigkeit betrachtet, Funktionen des Körpers sind, und deren Perioden algebraische Funktionen des Unstetigkeitspunktes sind. Diese Frage wird durch einen späteren Satz bald ihre Beantwortung finden.

Ebenso wie wir hier algebraische Relationen für die Perioden eines Integrals zweiter Gattung erhalten haben, so ergeben sich solche für die Perioden eines Integrals dritter Gattung, wenn wir das Integral $t_{\mathfrak{Q}}$ durch ein Integral $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ mit zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ ersetzen. Es seien die Residuen dieses Integrals in den Punkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ resp. gleich -1 und gleich $+1$ und seine Perioden an den Querschnitten a_i und b_i gleich

$$E_1, E_2, \ldots E_p, \quad F_1, F_2, \ldots F_p,$$

während das überall endliche Integral w, wie vorher, die Perioden

$$A_1, A_2, \ldots A_p, \quad B_1, B_2, \ldots B_p$$

besitze. Führen wir nun das Integral

$$I_3 = \int \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} dw$$

um die Gesamtbegrenzung der auf S. 339 charakterisierten Fläche $\mathfrak{R}''$ herum, auf welcher sowohl w als auch $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ eindeutige und stetige Funktionen des Ortes sind, so ist das Resultat nach dem Cauchyschen Satze gleich Null. Andererseits erhalten wir zunächst, von den Querschnitten a_i, b_i, c_i herrührend, analog wie früher, den Beitrag

$$E_1 B_1 - A_1 F_1 + E_2 B_2 - A_2 F_2 + \cdots + E_p B_p - A_p F_p.$$

Führen wir sodann das Integral I_3 über das linke und rechte Ufer des Schnittes l_1, so erhalten wir (vgl. Fig. 27), da $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ auf dem linken Ufer um $-2\pi i$ gröfser ist als auf dem rechten, den Beitrag

$$\int_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{Q}_1} [\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_\lambda) - \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_\varrho)] dw = -2\pi i [w(\mathfrak{Q}_1) - w(\mathfrak{A})],$$

wenn $\mathfrak{A}$ der Anfangspunkt des Schnittes l_1 ist. Ebenso erhalten wir, von l_2 herrührend,

$$2\pi i [w(\mathfrak{Q}_2) - w(\mathfrak{A})],$$

also von l_1 und l_2 zusammen

$$2\pi i [w(\mathfrak{Q}_2) - w(\mathfrak{Q}_1)],$$

so dafs der Punkt $\mathfrak{A}$, der ja nur Hilfspunkt ist, das Resultat nicht beeinflufst.

Betrachten wir schliefslich die von den kleinen Kreisen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ herrührenden Beiträge, so können wir leicht zeigen, dafs sie dann in Fortfall kommen, wenn man die Radien unbegrenzt abnehmen läfst. Ist nämlich der Radius eines der beiden um die Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{Q}$ herumgeführten Kreise gleich ϱ, so liefert das Integral I_3, um $\varkappa$ herumgeführt, denselben Beitrag wie das Integral

$$\pm \frac{1}{a} \int \lg (z - \alpha) dw,$$

da $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ wie $\pm \lg (z - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ unendlich wird. Nun ist für den Kreis $\varkappa$

$$z - \alpha = \varrho e^{i\vartheta}, \quad \text{also} \quad \lg (z - \alpha) = \lg \varrho + i\vartheta,$$

und es variiert ϑ von ϑ_0 bis $\vartheta_0 + 2\pi a$; also ist das letzte Integral gleich

$$\pm \lg \varrho \int dw \pm i \int \vartheta \cdot dw;$$

hier aber verschwindet der erste Summand nach dem Satze von Cauchy, weil die zu integrierende Funktion eine eindeutige, endliche und

stetige Funktion einer komplexen Variabeln und der Integrationsweg geschlossen ist; in dem zweiten Summanden ist der Integrand zwar keine Funktion einer komplexen Veränderlichen, weil die Funktion ϑ nicht den hierfür charakteristischen Differentialgleichungen auf S. 344 genügt, aber da man den Radius des Kreises unbegrenzt abnehmen, den Integrationsweg also unendlich klein werden lassen kann und hierbei der Integrand regulär bleibt, so mufs das Integral im Grenzfalle den Wert Null erhalten. Somit erhalten wir die Periodenrelation für Integrale dritter Gattung:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} &E_1 B_1 - A_1 F_1 + E_2 B_2 - A_2 F_2 + \cdots + E_p B_p - A_p F_p \\ &= 2\pi i [w(\mathfrak{Q}_1) - w(\mathfrak{Q}_2)] = -2\pi i \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dw. \end{aligned}$$

Man kann auch das Integral $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ so normieren, dafs die Perioden $E_1, E_2, \ldots E_p$ verschwinden; nimmt man dann wieder für das Integral w das Normalintegral u_k, so ergiebt sich der Satz:

Ein in Bezug auf die Querschnitte a_k normiertes Integral dritter Gattung $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ mit den beiden Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$, welches in diesen beiden Punkten die Residuen -1 und $+1$ hat, besitzt an jedem Querschnitte b_k eine Periode

$$F_k = 2\pi i [u_k(\mathfrak{Q}_2) - u_k(\mathfrak{Q}_1)],$$

wobei u_k das k^{te} Normalintegral erster Gattung bedeutet.

Weitere wichtige Sätze ergeben sich, wenn wir in dem Integrale I auf S. 348 beide Funktionen als Integrale zweiter oder dritter Gattung annehmen. Wählen wir zuvörderst zwei Integrale zweiter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$, so wollen wir uns hier von vornherein auf den Fall beschränken, dafs die Unstetigkeit von der ersten Ordnung und die Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ gewöhnliche Punkte der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ sind. Es werde das erste Integral $t_{\mathfrak{Q}}$ in $\mathfrak{Q}$ unendlich wie $\frac{1}{z-\alpha}$ und besitze die Perioden

$$C_1, C_2, \ldots C_p, \quad D_1, D_2, \ldots D_p,$$

ebenso werde das zweite $t_{\mathfrak{Q}'}$ unendlich wie $\frac{1}{z-\alpha'}$ und habe die Perioden

$$C_1', C_2', \ldots C_p', \quad D_1', D_2', \ldots D_p'.$$

Dann ist das um den Rand von $\mathfrak{R}'$ herumgeführte Integral

$$\int t_{\mathfrak{Q}}\, d t_{\mathfrak{Q}'}$$

einerseits gleich dem bilinearen Ausdruck

$$C_1 D_1' - C_1' D_1 + C_2 D_2' - C_2' D_2 + \cdots + C_p D_p' - C_p' D_p,$$

andererseits gleich $2\pi i$mal der Summe der von den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ herrührenden Residuen; denn schneidet man aus der Fläche $\mathfrak{R}'$ die Punkte $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ und ihre Umgebungen durch kleine Kreise heraus, so ist auf der übrig bleibenden Fläche $\mathfrak{S}$ sowohl $t_{\mathfrak{Q}}$ als auch $t_{\mathfrak{Q}'}$ regulär, das Resultat der um die gesamte Begrenzung von $\mathfrak{S}$ erstreckten Integration also gleich Null. Da ferner in der Umgebung von $\mathfrak{Q}$ die Reihenentwickelungen gelten:

$$t_{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{z-\alpha} + \cdots, \quad t_{\mathfrak{Q}'} = t_{\mathfrak{Q}'}(\mathfrak{Q}) + t'_{\mathfrak{Q}'}(\mathfrak{Q})(z-\alpha) + \cdots,$$

wobei t' die Ableitung von t nach z bedeutet, so erhält man

$$R_{\mathfrak{Q}}(t_{\mathfrak{Q}}\, dt_{\mathfrak{Q}'}) = t'_{\mathfrak{Q}'}(\mathfrak{Q}).$$

Ebenso hat man in der Umgebung von $\mathfrak{Q}'$:

$$t_{\mathfrak{Q}} = t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}') + t'_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}')(z-\alpha') + \cdots$$

$$t_{\mathfrak{Q}'} = \frac{1}{z-\alpha'} + \cdots,$$

also

$$t_{\mathfrak{Q}}\, dt_{\mathfrak{Q}'} = -\left(\frac{t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}')}{(z-\alpha')^2} + \frac{t'_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}')}{z-\alpha'} + \cdots\right) dz$$

und

$$R_{\mathfrak{Q}'}(t_{\mathfrak{Q}}\, dt_{\mathfrak{Q}'}) = -\, t'_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}').$$

Folglich ergiebt sich die Gleichung

$$\text{(IV)} \quad \begin{aligned} C_1 D_1' - C_1' D_1 + C_2 D_2' - C_2' D_2 + \cdots + C_p D_p' - C_p' D_p \\ = 2\pi i\,[t'_{\mathfrak{Q}'}(\mathfrak{Q}) - t'_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}')]. \end{aligned}$$

Sind insbesondere die Perioden C_i und C_i' gleich Null, so ist einfach

$$\text{(IVa)} \qquad t'_{\mathfrak{Q}'}(\mathfrak{Q}) = t'_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}'),$$

und es gilt also der Satz:

> Wenn man das Integral zweiter Gattung $t_{\mathfrak{Q}}$ mit dem einfachen Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{Q}$ so normiert, dafs die Perioden an den Querschnitten a_i verschwinden, und man betrachtet den Integranden $t'_{\mathfrak{Q}}$ in seiner Abhängigkeit nicht blofs von der Integrationsvariabeln, sondern auch von dem Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{Q}$, so ist $t'_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}')$ eine symmetrische Funktion seiner beiden Argumente $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$.

Hieraus folgt, dafs der Integrand des normierten Integrals zweiter Gattung auch von dem Unstetigkeitspunkte algebraisch abhängt, womit die auf S. 352 aufgeworfene Frage wenigstens für Integrale mit einfachem Pole in bejahendem Sinne entschieden ist.

Wir stellen jetzt das Integral zweiter Gattung $t_{\mathfrak{Q}}$, das den einfachen Unstetigkeitspunkt $\mathfrak{Q}$ und die Perioden

$$C_1, C_2, \ldots C_p, \quad D_1, D_2, \ldots D_p$$

hat, zusammen mit dem Integrale dritter Gattung $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}$, das die logarithmischen Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ mit den Residuen -1 und $+1$ und die Perioden

$$E_1, E_2, \ldots E_p, \quad F_1, F_2, \ldots F_p$$

besitzt.

Schneidet man nun aus der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}''$, welche aus $\mathfrak{R}'$ durch Ausführung der Schnitte l_1 und l_2 hervorgegangen ist, noch den Punkt $\mathfrak{Q}$ und seine Umgebung heraus, so ist das um die gesamte übrig bleibende Fläche $\mathfrak{S}$ erstreckte Integral

$$\int t_{\mathfrak{Q}}\, d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}$$

nach dem Satze von Cauchy gleich Null. Zunächst erhält man von der Begrenzung von $\mathfrak{R}'$ den Beitrag

$$C_1F_1 - D_1E_1 + C_2F_2 - D_2E_2 + \cdots + C_pF_p - D_pE_p,$$

während die von den beiden Ufern von l_1 und l_2 herrührenden Beiträge sich aufheben, weil $t_{\mathfrak{Q}}$ hier keine Differenzen besitzt. Es bleiben also blofs noch die zu den drei Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ gehörigen Residuen zu berechnen. Nun ist in der Umgebung von $\mathfrak{Q}$, wenn wir wieder annehmen, dafs daselbst keine Verzweigung vorhanden ist:

$$t_{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{z-\alpha} + \cdots, \quad \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} = \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q}) + \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q})(z-\alpha) + \cdots,$$

also

$$R_{\mathfrak{Q}}(t_{\mathfrak{Q}}\, d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}) = \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q}).$$

Ebenso ist in der Umgebung von $\mathfrak{Q}_1$ oder $\mathfrak{Q}_2$:

$$t_{\mathfrak{Q}} = t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}_i) + \cdots, \quad d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} = \pm\frac{dz}{z-\alpha_i} + \cdots \qquad (i = 1, 2),$$

also

$$R_{\mathfrak{Q}_1}(t_{\mathfrak{Q}}\, d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}) = -t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}_1), \quad R_{\mathfrak{Q}_2}(t_{\mathfrak{Q}}\, d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}) = t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}_2).$$

Es ergiebt sich somit die Formel

$$\text{(V)} \qquad \begin{aligned} &C_1F_1 - D_1E_1 + C_2F_2 - D_2E_2 + \cdots + C_pF_p - D_pE_p \\ &\qquad = 2\pi i\,[\tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q}) - t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}_1) + t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}_2)]. \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse ist auch hier wieder der Fall, dafs man beide Integrale in Bezug auf die Querschnitte a_i normiert annimmt; es ist dann nämlich

$$\text{(Va)} \qquad \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q}) = t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}_1) - t_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}_2) = -\int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_{\mathfrak{Q}}$$

und es gilt also der Satz:

Betrachtet man ein in Bezug auf die Querschnitte a_i normiertes Integral zweiter Gattung mit einfachem Pole

$$\int_{\mathfrak{Q}_2}^{\mathfrak{Q}_1} dt_{\mathfrak{Q}}(z)$$

bei festgehaltenen Grenzen als Funktion des Poles $\mathfrak{Q}$, so ist dasselbe gleich dem Integranden des normierten Integrals dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$, also algebraisch von $\mathfrak{Q}$ abhängig. Umgekehrt ist der Integrand $\tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q})$ des normierten Integrals dritter Gattung, in seiner Abhängigkeit von den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ betrachtet, gleich einem Integrale zweiter Gattung, dessen Grenzen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ sind. Der Integrand des normierten Integrals dritter Gattung ist also eine transcendente Funktion seiner logarithmischen Unstetigkeitspunkte.

Aus diesem Satze folgt noch ein bedeutsames Resultat, wenn man die Gleichung (Va) differenziert und den vorigen Satz (IV) in Anwendung bringt. Faſst man nämlich den Integranden in seiner Abhängigkeit von $\mathfrak{Q}_1$ ins Auge und bezeichnet mit z_1 eine von dem Punkte $\mathfrak{Q}_1$ abhängige Variable des Körpers, so ist

$$\frac{d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q})}{dz_1} = t'_{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{Q}_1) = t'_{\mathfrak{Q}_1}(\mathfrak{Q}),$$

d. h.

der Integrand des normierten Integrals dritter Gattung, nach einem seiner Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{Q}_1$ differentiiert, ergiebt den Integranden des normierten Integrals zweiter Gattung mit dem einfachen Pole $\mathfrak{Q}_1$.

Ein letztes Resultat gewinnen wir, wenn wir zwei Integrale dritter Gattung $\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ und $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}$ zur Bildung des Integrals I verwenden. Damit dieselben eindeutige Funktionen des Ortes werden, lassen wir von dem Endpunkte $\mathfrak{A}$ der Berandung von $\mathfrak{R}'$ vier Schnitte $l_{\mathfrak{P}_1}, l_{\mathfrak{P}_2}, l_{\mathfrak{Q}_1}, l_{\mathfrak{Q}_2}$ nach den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ ausgehen und bezeichnen die so entstandene Fläche mit $\mathfrak{R}''$. Führen wir dann das Integral

$$\int \tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}\, d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}$$

um den ganzen Rand von $\mathfrak{R}''$ herum, so erhalten wir den Wert Null, da beide Funktionen $\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ und $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}$ innerhalb $\mathfrak{R}''$ eindeutig, endlich und stetig sind. Haben nun die beiden Integrale an den Querschnitten a_i und b_i die Differenzen

$$E_1^{(\mathfrak{P})}, E_2^{(\mathfrak{P})}, \ldots E_p^{(\mathfrak{P})}, \quad F_1^{(\mathfrak{P})}, F_2^{(\mathfrak{P})}, \ldots F_p^{(\mathfrak{P})}$$

und

$$E_1^{(\mathfrak{Q})}, E_2^{(\mathfrak{Q})}, \ldots E_p^{(\mathfrak{Q})}, \quad F_1^{(\mathfrak{Q})}, F_2^{(\mathfrak{Q})}, \ldots F_p^{(\mathfrak{Q})},$$

so erhält das Randintegral zunächst, von diesen Querschnitten herrührend, den Beitrag

$$E_1^{(\mathfrak{P})}F_1^{(\mathfrak{Q})} - F_1^{(\mathfrak{P})}E_1^{(\mathfrak{Q})} + E_2^{(\mathfrak{P})}F_2^{(\mathfrak{Q})} - F_2^{(\mathfrak{P})}E_2^{(\mathfrak{Q})} + \cdots + E_p^{(\mathfrak{P})}F_p^{(\mathfrak{Q})} - F_p^{(\mathfrak{P})}E_p^{(\mathfrak{Q})}.$$

Sodann erhält man von den beiden Ufern des Schnittes $l_{\mathfrak{P}_1}$

$$2\pi i[-\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_1) + \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{A})]$$

und ebenso von dem Schnitte $l_{\mathfrak{P}_2}$

$$2\pi i[\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_2) - \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{A})],$$

während, ebenso wie auf S. 353 die von den kleinen Kreisen um $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ herrührenden Integralbeiträge bei unendlicher Abnahme des Radius in Fortfall kommen. Führt man schliefslich das Integral über die beiden Ufer von $l_{\mathfrak{Q}_1}$ und $l_{\mathfrak{Q}_2}$ und die zugehörigen Kreise um $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$, so sind die von den Schnitten l herrührenden Glieder Null, und als Resultat der Integration über die Kreise erhält man den Wert

$$2\pi i[\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{Q}_1) - \tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{Q}_2)].$$

Es ergiebt sich also die wichtige Formel, welche als der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei den Integralen dritter Gattung bezeichnet wird:

$$\text{(VI)}\quad \begin{aligned} &E_1^{(\mathfrak{P})}F_1^{(\mathfrak{Q})} - F_1^{(\mathfrak{P})}E_1^{(\mathfrak{Q})} + E_2^{(\mathfrak{P})}F_2^{(\mathfrak{Q})} - F_2^{(\mathfrak{P})}E_2^{(\mathfrak{Q})} + \cdots + E_p^{(\mathfrak{P})}F_p^{(\mathfrak{Q})} - F_p^{(\mathfrak{P})}E_p^{(\mathfrak{Q})} \\ &\quad = 2\pi i[\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_1) - \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_2)] - 2\pi i[\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{Q}_1) - \tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{Q}_2)] \\ &\quad = 2\pi i\left(\int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} - \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2}\right). \end{aligned}$$

In dem besonderen Falle, dafs die Integrale in Bezug auf die Querschnitte a_i normiert sind, erhält diese Gleichung die einfache Gestalt:

$$\text{(VIa)}\qquad \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2};$$

d. h. es gilt der Satz:

> Ein in Bezug auf die Querschnitte a_i normiertes Integral dritter Gattung erleidet keine Veränderung, wenn man seinen ersten und zweiten Unstetigkeitspunkt mit seiner unteren und oberen Grenze vertauscht.

Der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument ist ein rein algebraischer Satz; wir werden dies bei einer späteren Untersuchung erkennen, bei welcher wir die Periodenrelationen ohne Benutzung der analysis situs auf direktem Wege erhalten und in dem Vertauschungssatze die Quelle aller übrigen Relationen finden werden. Dann wird auch die hier nur gestreifte Frage, in welcher Weise die Integranden

und die Perioden der Integrale zweiter und dritter Gattung von ihren Unstetigkeitspunkten abhängen, eine tiefere und eindringendere Erörterung finden, und ebenso werden wir alsdann auch auf algebraischem Wege Aufschlufs über die Zusammenhangsverhältnisse der Riemannschen Fläche gewinnen.

§ 3.

Wenn wir zu den in dem Körper $K(z, u)$ enthaltenen algebraischen Funktionen diejenigen aus K hervorgehenden Abelschen Integrale hinzunehmen, welche nur polare Unstetigkeiten besitzen, so sind die Funktionen des so erweiterten Bereiches insofern mit einfacheren Eigenschaften ausgestattet, als wir ihnen die Lage ihrer Pole und die Hauptteile der zugehörigen Reihenentwickelungen ebenso wie bei rationalen Funktionen willkürlich vorschreiben können, während dies bei den Funktionen des Körpers $K(z, u)$ nach den Ergebnissen des § 4 der zwanzigsten Vorlesung nicht möglich ist. Wollen wir dann innerhalb des so erweiterten Bereiches wieder die Funktionen des Körpers aussondern, so geschieht dies nach dem Satze auf S. 113 vollständig durch die Forderung, dafs die Funktion keine Perioden besitzen solle, also auf der unzerschnittenen Riemannschen Fläche eindeutig sei. Wir wollen zeigen, dafs wir unter Zuhilfenahme der im vorigen Abschnitte bewiesenen Periodenrelationen auch auf diesem von dem früheren ganz abweichenden Wege die Gesamtheit der durch einen gegebenen Divisor teilbaren Funktionen des Körpers bestimmen und auch so zu einem Beweise des im Mittelpunkte der ganzen Theorie stehenden Riemann-Rochschen Satzes gelangen können.

Um aber den Gang der nachfolgenden Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, wollen wir vorher einen bekannten Satz über lineare Gleichungen in Erinnerung bringen und gleich in der für unsere Zwecke geeignetsten Form aussprechen. Sind m lineare homogene Gleichungen gegeben:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{array}$$

so brauchen dieselben nicht alle voneinander unabhängig zu sein, sondern es kann der Fall eintreten, dafs σ von ihnen eine Folge der übrigen $m - \sigma$ Gleichungen, diese letzteren aber voneinander unabhängig sind. Dann ist der Rang des Koeffizientensystems

$$(a_{\mu\nu}) \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots m \\ \nu = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

gleich $m - \sigma$, d. h. unter den Determinanten $(m - \sigma)^{\text{ter}}$ Ordnung findet sich mindestens eine von Null verschiedene, während alle Determinanten höherer Ordnung verschwinden. Ebenso grofs ist daher der Rang der konjugierten Matrix, welche aus der vorigen durch Vertauschung von Zeilen und Spalten hervorgeht. Bilden wir daher das konjugierte Gleichungssystem

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m = 0,$$

so besitzt dasselbe ebenfalls den Rang $m - \sigma$, und da man somit z. B. über die letzten σ Unbekannten $y_{m-\sigma+1}, \ldots y_m$ frei verfügen kann, wodurch dann die ersten $m - \sigma$ Gröfsen $y_1, y_2, \ldots y_{m-\sigma}$ bestimmt sind, so können die sämtlichen Lösungen dieses Systems aus σ linear unabhängigen Fundamentallösungen linear komponiert werden. Es gilt also der Satz:

Wenn in einem System linearer Gleichungen σ von ihnen eine Folge der übrigen, voneinander unabhängigen Gleichungen sind, so besitzt das konjugierte System, welches durch Vertauschung von Zeilen und Spalten aus dem vorigen hervorgeht, σ linear unabhängige Fundamentallösungen.

Stellen wir nun die Aufgabe, die Dimension der durch den ganzen oder gebrochenen Divisor

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r}{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_s}$$

bestimmten Klasse Q zu ermitteln, so wollen wir zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen voraussetzen, dafs der Zähler sowohl wie der Nenner von $\mathfrak{Q}$ aus lauter verschiedenen Primfaktoren besteht. Nach den früheren Auseinandersetzungen wird diese Dimensionsbestimmung dadurch geleistet, dafs wir die sämtlichen Funktionen des Körpers aufstellen, welche durch den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ teilbar sind, d. h. welche die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ höchstens zu einfachen Polen und die Punkte $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_s$ zu Nullpunkten mindestens erster Ordnung haben. Betrachten wir nun zunächst allgemeiner die sämtlichen Integrale zweiter Gattung, für welche $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ einfache Pole sind und welche an den Querschnitten a_i keine Differenzen haben, so können dieselben aus den r normierten Elementarintegralen zweiter Gattung

$$t_{\mathfrak{P}_1}, \quad t_{\mathfrak{P}_2}, \ldots t_{\mathfrak{P}_r}$$

linear zusammengesetzt werden und sind also in der Formel enthalten:

$$1) \qquad t = C_0 + C_1 t_{\mathfrak{P}_1} + C_2 t_{\mathfrak{P}_2} + \cdots + C_r t_{\mathfrak{P}_r},$$

wo $C_0, C_1, \dots C_r$ $r+1$ Konstanten bedeuten. Diese Formel spielt in der Theorie der allgemeinen Abelschen Integrale zweiter Gattung genau dieselbe Rolle, wie die Partialbruchzerlegung (vgl. S. 17) in der Theorie der rationalen Funktionen, da sie ein Integral mit gegebenen polaren Unstetigkeiten aus Elementarintegralen mit einem Pole zusammensetzen lehrt. Dabei sind im Unterschiede von der etwas allgemeineren Partialbruchzerlegung in § 3 der 20. Vorlesung die Integrale sämtlich so normiert, daſs sie an den Querschnitten a_k keine Differenzen besitzen; lieſsen wir diese Voraussetzung fallen, so würde auf der rechten Seite obiger Gleichung noch ein Integral erster Gattung, also eine aus p Gliedern bestehende Summe hinzutreten.

Soll nun die Funktion t allen vorher gestellten Forderungen genügen, so müssen die in der Gleichung (1) auftretenden $r+1$ Konstanten zwei verschiedene Arten von Bedingungen erfüllen: es müssen erstens auch die Differenzen des Integrals an den Querschnitten b_k verschwinden und zweitens die Punkte $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots \mathfrak{Q}_s$ Nullstellen von t sein. Nun ist die Differenz eines normierten Integrals $t_{\mathfrak{P}}$ am Querschnitte b_k zufolge der Gleichung (IIb) auf S. 352 gleich $-2\pi i\, u_k'(\mathfrak{P})$, wo $u_k(\mathfrak{P})$ das k^{te} Normalintegral erster Gattung bedeutet; hierbei muſsten wir aber die Variable z, nach welcher differenziert wird, so wählen, daſs weder die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ im Punkte $\mathfrak{P}$ verzweigt ist, noch auch z in $\mathfrak{P}$ unendlich wird. Es kommt also keiner der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_r$ in dem zu dem Differentiale dz gehörigen Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^2}$ vor. Das Integral t hat also keine Perioden, wenn die p linearen homogenen Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} &C_1 u_1'(\mathfrak{P}_1) + C_2 u_1'(\mathfrak{P}_2) + \cdots + C_r u_1'(\mathfrak{P}_r) = 0 \\ &C_1 u_2'(\mathfrak{P}_1) + C_2 u_2'(\mathfrak{P}_2) + \cdots + C_r u_2'(\mathfrak{P}_r) = 0 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &C_1 u_p'(\mathfrak{P}_1) + C_2 u_p'(\mathfrak{P}_2) + \cdots + C_r u_p'(\mathfrak{P}_r) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Auſserdem müssen aber die s Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} t(\mathfrak{Q}_1) &= C_0 + C_1 t_{\mathfrak{P}_1}(\mathfrak{Q}_1) + C_2 t_{\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{Q}_1) + \cdots + C_r t_{\mathfrak{P}_r}(\mathfrak{Q}_1) = 0 \\ t(\mathfrak{Q}_2) &= C_0 + C_1 t_{\mathfrak{P}_1}(\mathfrak{Q}_2) + C_2 t_{\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{Q}_2) + \cdots + C_r t_{\mathfrak{P}_r}(\mathfrak{Q}_2) = 0 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t(\mathfrak{Q}_s) &= C_0 + C_1 t_{\mathfrak{P}_1}(\mathfrak{Q}_s) + C_2 t_{\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{Q}_s) + \cdots + C_r t_{\mathfrak{P}_r}(\mathfrak{Q}_s) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Daher müssen die $r+1$ Konstanten C $p+s$ linearen Gleichungen genügen; unter der Voraussetzung also, daſs diese linearen Gleichungen unabhängig sind, ist die Dimension der Klasse Q:

$$\{Q\} = r + 1 - p - s = q - p + 1,$$

wo $q = r - s$ die Ordnung der Klasse Q bedeutet.

Wenn aber die beiden Systeme (2) und (3) zusammengenommen ein System voneinander abhängiger Gleichungen darstellen und σ von ihnen eine Folge der übrigen sind, so sind sie nur $p+s-\sigma$ unabhängigen Gleichungen äquivalent, und dann ist

$$\{Q\} = r + 1 - p - s + \sigma = q - p + 1 + \sigma.$$

Hierbei ist nun σ eine ganze nicht negative Zahl, deren Bedeutung für obiges Gleichungssystem mit Hilfe des vorher aufgestellten Hilfssatzes näher festgestellt werden kann. Bei dieser Diskussion müssen wir aber zwei Fälle unterscheiden, je nachdem s, die Zahl der gegebenen Nullstellen der Funktion t, gleich Null oder gröfser als Null ist.

I. Ist $s = 0$, so kommt das System (3) in Fortfall, und unter den p linearen Gleichungen (2) sind σ eine Folge der übrigen.

Dann besitzt nach unserem Hilfssatze das konjugierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 u_1'(\mathfrak{P}_1) + x_2 u_2'(\mathfrak{P}_1) + \cdots + x_p u_p'(\mathfrak{P}_1) &= 0 \\ x_1 u_1'(\mathfrak{P}_2) + x_2 u_2'(\mathfrak{P}_2) + \cdots + x_p u_p'(\mathfrak{P}_2) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 u_1'(\mathfrak{P}_r) + x_2 u_2'(\mathfrak{P}_r) + \cdots + x_p u_p'(\mathfrak{P}_r) &= 0 \end{aligned}$$

σ linear unabhängige Fundamentallösungen. Da in den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ unverzweigt und z endlich ist, so können wir durch Multiplikation mit $dz = \frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^2}$ zu einem völlig äquivalenten Gleichungssysteme übergehen, in welchem an die Stelle der Differentialquotienten die Differentiale getreten sind, und es giebt also genau σ linear unabhängige Differentiale erster Gattung

$$d\omega = x_1 du_1 + x_2 du_2 + \cdots + x_p du_p,$$

deren zugehörige Divisoren durch $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r$ teilbar sind; denn wenn der Differentialquotient $\sum_1^p x_h u_h'$ in jedem der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ verschwindet, so ist der zu dem Differentiale $\sum_1^p x_h du_h$ gehörige Teiler durch jeden der jenen Punkten entsprechenden Primdivisoren, also auch durch ihr Produkt $\mathfrak{Q}$ teilbar, und da dz in jedem Punkte $\mathfrak{P}_\varrho$ die Ordnungszahl Null hat, so folgt aus der letzteren Bedingung wieder die erstere. Da somit in der Klasse W der Differentiale σ und nicht mehr linear unabhängige ganze Divisoren vorhanden sind, welche durch $\mathfrak{Q}$ teilbar sind, so ist σ die Dimension der Ergänzungsklasse $Q' = \frac{W}{Q}$:

$$\sigma = \left\{\frac{W}{Q}\right\} = \{Q'\}.$$

II. Wenn der Divisor $\mathfrak{Q}$ gebrochen und die Ordnung seines Nenners $s > 1$ ist, so eliminieren wir zunächst in den Gleichungen (3) die Un-

bekannte C_0, indem wir von der ersten der Reihe nach die zweite, dritte, ... s^{te} Gleichung subtrahieren. Wenden wir nun die Relation (Va) des vorigen Abschnittes an, so können wir eine Differenz $t_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}_1) - t_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}_h)$ durch den Integranden $\tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_h}(\mathfrak{P})$ des normierten Integrals dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_h$ und dem Argument $\mathfrak{P}$ ersetzen. Daher ist das System (3) äquivalent den folgenden $s-1$ Gleichungen:

$$\text{3a)} \quad \begin{aligned} &C_1 \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_1) + C_2 \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_2) + \cdots + C_r \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_r) = 0 \\ &C_1 \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_3}(\mathfrak{P}_1) + C_2 \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_3}(\mathfrak{P}_2) + \cdots + C_r \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_3}(\mathfrak{P}_r) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &C_1 \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_s}(\mathfrak{P}_1) + C_2 \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_s}(\mathfrak{P}_2) + \cdots + C_r \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_s}(\mathfrak{P}_r) = 0, \end{aligned}$$

zu welchen noch die Gleichung

$$\text{3b)} \quad C_0 + C_1 t_{\mathfrak{P}_1}(\mathfrak{Q}_1) + C_2 t_{\mathfrak{P}_2}(\mathfrak{Q}_1) + \cdots + C_r t_{\mathfrak{P}_r}(\mathfrak{Q}_1) = 0$$

zur Bestimmung der Konstanten C_0 tritt. Diese letzte übt aber offenbar auf den Wert der Zahl σ gar keinen Einflufs aus, sondern sie dient nur dazu, um, wenn $C_1, C_2, \ldots C_r$ den Gleichungen (2) und (3a) gemäfs bestimmt sind, nun auch die Konstante C_0 festzulegen.

Betrachten wir aber jetzt das System, welches aus den Gleichungen (2) und (3a) zusammengesetzt ist, und nehmen wir wieder an, dafs von diesen $p+s-1$ Gleichungen σ eine Folge der übrigen, voneinander linear unabhängigen sind. Dann hat nach unserem Hilfssatze das konjugierte System:

$$\begin{aligned} &x_1 u'_1(\mathfrak{P}_1) + \cdots + x_p u'_p(\mathfrak{P}_1) + x_{p+1} \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_1) + \cdots + x_{p+s-1} \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_s}(\mathfrak{P}_1) = 0 \\ &x_1 u'_1(\mathfrak{P}_2) + \cdots + x_p u'_p(\mathfrak{P}_2) + x_{p+1} \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_2) + \cdots + x_{p+s-1} \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_s}(\mathfrak{P}_2) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_1 u'_1(\mathfrak{P}_r) + \cdots + x_p u'_p(\mathfrak{P}_r) + x_{p+1} \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P}_r) + \cdots + x_{p+s-1} \tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_s}(\mathfrak{P}_r) = 0 \end{aligned}$$

genau σ unabhängige Lösungen. Gehen wir wieder durch Multiplikation mit dz von den Differentialquotienten zu den Differentialen über, so können wir diese Thatsache auch dahin aussprechen, dafs es σ linear unabhängige Differentiale dritter Gattung

$$d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_s} = x_1\, du_1 + \cdots + x_p\, du_p + x_{p+1}\, d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} + \cdots + x_{p+s-1}\, d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_s}$$

giebt, für welche $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_s$ Pole und $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ Nullpunkte erster Ordnung sind. Der zu einem derartigen Differentiale gehörige Teiler ist also gerade ein Vielfaches des Divisors

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r}{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_s},$$

und es giebt also in der Klasse W der Differentiale σ linear unabhängige Divisoren, welche Multipla des Divisors $\mathfrak{Q}$ sind; d. h. es ist auch hier

$$\sigma = \left\{ \begin{matrix} W \\ Q \end{matrix} \right\} = \{Q'\}.$$

Also ist im Falle (I) und (II), wenn Q' die Ergänzungsklasse von Q bedeutet:

$$5) \qquad \{Q\} = q - p + 1 + \{Q'\}.$$

Eine besondere Berücksichtigung erfordert noch der Fall $s = 1$. Dann erhalten wir, da das System (3) nur aus einer Gleichung besteht, welche blofs zur Bestimmung der Konstanten C_0 dient, ebenso wie im ersten Falle σ gleich der Dimension der Schar derjenigen Differentialteiler erster Gattung, welche Multipla von $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r$ sind. Bilden wir aber andererseits die Schar der Differentiale, welche höchstens in $\mathfrak{Q}_1$ einen Pol erster Ordnung besitzen, so ist diese mit der Schar der Differentiale erster Gattung identisch; denn es giebt, wie früher bewiesen (S. 309), keine Differentiale mit einem einzigen Pole erster Ordnung. Daher kann auch in diesem Falle, wie in den beiden anderen,

$$\sigma = \left\{\frac{W}{Q}\right\} = \{Q'\}$$

gesetzt werden, und die Formel (5) gilt also ganz allgemein.

Die Relation (5) kann leicht in die frühere Form des Riemann-Rochschen Satzes gesetzt werden. Denn ist q' die Ordnung der Ergänzungsklasse Q', so hat man

$$q + q' = 2(p-1),$$

also

$$\{Q\} - \{Q'\} = q - (p-1) = \frac{1}{2}(q - q')$$

oder

$$6) \qquad \{Q\} - \frac{q}{2} = \{Q'\} - \frac{q'}{2},$$

welches die frühere Form des Satzes ist.

Bei dieser Herleitung haben wir über die Natur des Divisors $\mathfrak{Q}$ eine einschränkende Voraussetzung gemacht. Es hat keine prinzipielle Schwierigkeit, diese Einschränkung aufzuheben, würde aber den Apparat der zum Beweise erforderlichen Formeln erheblich vergröfsern. Auch haben wir mehrere Fälle unterscheiden müssen, während das Resultat ein vollkommen einheitliches ist. Gerade darin zeigt sich bei dieser Untersuchung die Überlegenheit der algebraischen Behandlung des Problems über die analytisch-transcendente, dafs der Riemann-Rochsche Satz bei der ersten sich sogleich in voller Allgemeinheit als naturgemäfser Gipfelpunkt der systematischen Entwickelung darstellt, während bei der zweiten der Beweis mehr den Charakter einer nachträglichen Verifikation trägt und die einheitliche Formulierung des Endresultates etwas Überraschendes hat.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Algebraische Kurven oder Gebilde. — Die Gradzahlen der Kurve. — Transformation. — Unendlich ferne Elemente der Kurve. — Mehrfache Punkte der Kurve; verschiedene Definitionen. — Ein- und mehrzweigige Singularitäten; Tangenten. — Aufzählung der einfachsten Singularitäten. — Der Divisor der Doppelpunkte oder der Singularitäten. — Zerlegung dieses Divisors in seine Elementarbestandteile. — Wesentlicher und aufserwesentlicher Teiler der Diskriminante der Kurvengleichung.

§ 1.

Wir haben bisher eine algebraische Gleichung $F(u, z) = 0$ stets als Definitionsgleichung einer algebraischen Funktion u der unabhängigen Variabeln z betrachtet und unter diesem Gesichtspunkte alle bisher aufgestellten Sätze abgeleitet. Anstatt aber eine der beiden Variabeln vor der andern auszuzeichnen, können wir auch beide als gleichberechtigt auffassen und den Inbegriff der Wertsysteme $(u = u_0, z = z_0)$ ins Auge fassen, welche jener Gleichung genügen und sich stetig aneinander anschliefsen. Diese Anschauungsweise entspricht genau derjenigen, welche in der analytischen Geometrie üblich ist; wir wollen daher die Gesamtheit jener die Gleichung befriedigenden Wertsysteme auch als algebraisches Gebilde bezeichnen und durch das geometrische Bild der algebraischen Kurve interpretieren. Hierbei bringt freilich das Kurvenbild nur die reellen Punkte des algebraischen Gebildes zur Darstellung, während wir natürlich auch überall die komplexen Wertsysteme betrachten, die der Gleichung genügen; indes ist es ja auch in der analytischen Geometrie seit langer Zeit üblich, zum Zwecke uneingeschränkter Interpretation algebraischer Thatsachen von imaginären oder komplexen Kurvenpunkten zu sprechen.

Wir werden so unter Benutzung der bereits gewonnenen Resultate einen Einblick in die wichtigsten Gesetze erlangen, von denen die Lehre von den algebraischen Kurven der Ebene und des Raumes beherrscht wird, und wir werden finden, dafs die Theorie der algebraischen Kurven und die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in wichtigen Teilen miteinander zusammenfallen. Einige der späterhin aufzustellenden Sätze sind in der That nur ein anderer Ausdruck für Funktionseigenschaften, die wir vorher rein analytisch

formuliert hatten. Daher wird auch der nächste und vornehmlichste Zweck dieser Vorlesung darin bestehen, die Definitionen der Kurventheorie so zu fassen, daſs die bisher angewendeten Begriffsbildungen, vor allem die Lehre von den Divisoren, in ausnahmsloser Allgemeinheit auf sie übertragen werden können.

Bezeichnen wir jetzt die Variabeln mit x und y, so bestehe zwischen ihnen die irreduktible Gleichung

$$F(x, y) = \sum_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0, \tag{1}$$

welche in x vom Grade m, in y vom Grade n sein möge. Hierbei machen wir also zunächst keinerlei besondere Annahme über die Dimension, welche den einzelnen Gliedern $x^\mu y^\nu$ der Kurvengleichung höchstens zukommen kann, und wir werden erst späterhin auf die Modifikationen eingehen, welche bei unseren Begriffsbildungen eintreten, wenn wir mit Kurven einer bestimmten Ordnung, d. h. von bestimmter Maximaldimension zu thun haben. Demgemäſs wird die Kurve, wenn wir zunächst von allen singulären Vorkommnissen absehen, von einer Parallelen zur x-Achse $y - b = 0$ in m, von einer Parallelen zur y-Achse $x - a = 0$ in n Punkten geschnitten, deren Abscissen resp. Ordinaten durch die Gleichungen m^{ten} und n^{ten} Grades

$$F(x, b) = 0, \quad F(a, y) = 0$$

bestimmt sind. Da nach dem auf S. 246 bewiesenen Satze die Funktion x die Ordnung n, die Funktion y die Ordnung m hat, so entsprechen die m, resp. n Schnittpunkte der beiden Geraden genau den m, resp. n Primdivisoren, in welche die Zähler $\mathfrak{z}_{y-b}$ und $\mathfrak{z}_{x-a}$ der Funktionen $y - b$ und $x - a$ zerlegt werden können; denn nur für diese nimmt y den Wert b, resp. x den Wert a an.

Für die Ziele der Kurventheorie ist es oftmals zweckmäſsig, an Stelle des soeben angewendeten einfachsten Koordinatensystems ein allgemeineres zu Grunde zu legen und dadurch eine etwas inhaltsreichere Interpretation der Gleichung $F(x, y) = 0$ zu gewinnen. Anstatt nämlich die Ebene mit zwei Scharen von parallelen Geraden zur x- und zur y-Achse $y - b = 0$ und $x - a = 0$ zu überspinnen, können wir ebensogut von irgend zwei Punkten A und B der Ebene, die endlich oder auch unendlich fern sein können, zwei Strahlenbüschel ausgehen lassen und jeden Strahl des einen oder des anderen Büschels durch das Doppelverhältnis festlegen, welches er mit drei festen Strahlen $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ des Büschels A, resp. $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ des Büschels B bildet. Sind $\bar{a}$ und $\bar{b}$ zwei Strahlen der Büschel A und B (Fig. 28), und bezeichnen wir mit denselben, aber unüberstrichenen Buchstaben die

Werte der Doppelverhältnisse, welche sie mit den Grundstrahlen bilden, sind also die Quotienten

$$(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{a}) = \frac{\sin(\bar{a}\,\bar{a}_1)\,\sin(\bar{a}_3\,\bar{a}_2)}{\sin(\bar{a}\,\bar{a}_2)\,\sin(\bar{a}_3\,\bar{a}_1)} = a,$$

$$(\bar{b}_1\,\bar{b}_2\,\bar{b}_3\,\bar{b}) = \frac{\sin(\bar{b}\,\bar{b}_1)\,\sin(\bar{b}_3\,\bar{b}_2)}{\sin(\bar{b}\,\bar{b}_2)\,\sin(\bar{b}_3\,\bar{b}_1)} = b,$$

so wird durch das Wertsystem $(x = a,\ y = b)$ ein Punkt P der Ebene als Schnittpunkt der beiden Strahlen AP und BP mit den Gleichungen $x - a = 0$, resp. $y - b = 0$ bestimmt.

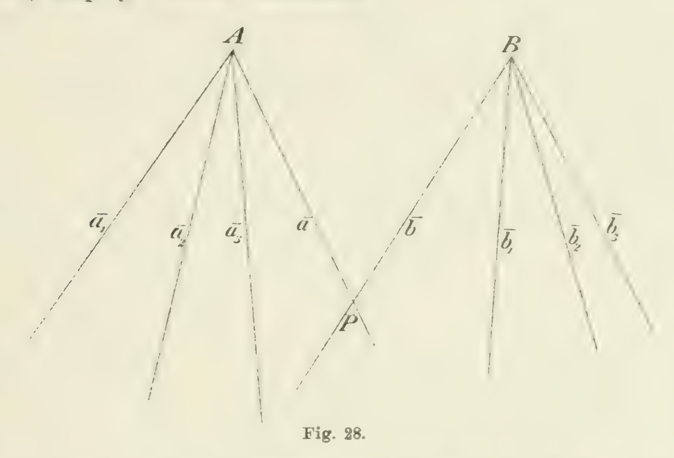


Fig. 28.

Es ist klar, dafs das gewöhnliche Cartesische Koordinatensystem nur ein spezieller Fall dieses allgemeineren ist, denn wählen wir das Büschel der Parallelen zur y-Achse als das erste A, so ist das Doppelverhältnis $(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{a})$ gleich dem Doppelverhältnis der zu den Geraden $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}$ gehörigen Schnittpunkte mit der x-Achse und durch dieses zu ersetzen; es ist also

$$(\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{a}) = \frac{(a - a_1)\,(a_3 - a_2)}{(a - a_2)\,(a_3 - a_1)},$$

wo jetzt a, a_1, a_2, a_3 die Cartesischen Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse bedeuten, und dieses wird für $a_1 = 0$, $a_2 = \infty$, $a_3 = 1$ einfach gleich a; ähnliches gilt für das Büschel B.

Halten wir nun die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel A und B fest, führen aber anstatt der drei Grundstrahlen $a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, resp. $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ drei andere $\bar{a}_1', \bar{a}_2', \bar{a}_3'$, resp. $\bar{b}_1', \bar{b}_2', \bar{b}_3'$ ein, so sind die neuen Koordinaten x', resp. y' eines Punktes P der Ebene nach den Grundlehren der analytischen Geometrie lineare, im allgemeinen gebrochene Funktionen der alten:

2) $$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y' = \frac{\alpha' y + \beta'}{\gamma' y + \delta'},$$

wobei die Determinanten $\alpha\delta - \beta\gamma$, $\alpha'\delta' - \beta'\gamma'$ von Null verschieden sind. Es gilt nämlich, wenn $\bar{a}_1', \bar{a}_2', \bar{a}_3'$ in dem ersten Koordinatensystem resp. die Gleichungen $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$ haben, z. B. für x' die Transformationsgleichung

$$x' = \frac{x - x_1}{x - x_2} \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1},$$

welche in x linear ist. Geht durch eine solche Transformation die Gleichung $x = a$ des Strahles AP in $x' = a'$ über, so ist offenbar der Divisor $\mathfrak{z}_{x-a} = \mathfrak{z}_{x'-a'}$, und es bleibt also die Definition der Schnittpunkte der Geraden und der Kurve von einer solchen Transformation ganz unberührt. Das gleiche ist mit allen späterhin zu gebenden Definitionen der Fall, welche stets so gefafst sind, dafs sie invariant sind, wenn wir eine oder auch beide Variabeln irgend welcher linearen Substitution unterwerfen.

Legen wir dieses allgemeinere Koordinatensystem zu Grunde, so erscheint die Kurve $F(x, y) = 0$ als das Erzeugnis zweier Strahlenbüschel A und B, die in der Weise aufeinander bezogen sind, dafs einem Strahle $x = a$ des ersten Büschels n des zweiten, und einem Strahle $y = b$ des zweiten m des ersten zugeordnet sind. In diesen Doppelverhältniskoordinaten stellt also z. B. eine Gleichung, welche in x und in y linear ist, den allgemeinsten Kegelschnitt durch die Grundpunkte A und B dar.

Hiernach ist es denn auch ohne weiteres ersichtlich, was wir unter der Geraden $x = \infty$, resp. $y = \infty$ zu verstehen haben. Die erste dieser beiden Geraden entspricht dem Doppelverhältniswert ∞ und ist also der Grundstrahl $\bar{a}_2$. Die Gerade $x = \infty$ hat also n, die Gerade $y = \infty$ m Punkte mit der Kurve gemein, und der zugeordnete Divisor ist der gemeinsame Nenner der Funktionen $x - a$, resp. $y - b$, also $\mathfrak{n}_x$ resp. $\mathfrak{n}_y$. Durch lineare Transformation kann man aber stets die Gerade $x = \infty$ in eine Gerade $x' = a'$ mit endlichem Doppelverhältnis a' überführen; denn man braucht ja nur

$$x' - a' = \frac{1}{x}, \qquad x = \frac{1}{x' - a'}$$

zu setzen. Ähnliches gilt für die Gerade $y = \infty$. In der hier angegebenen Weise, also durch lineare Transformation einer oder beider Variabeln, werden wir zunächst durchweg diejenigen Punkte der Kurve untersuchen, die zu unendlich grofsen Werten der Variabeln gehören; erst später werden wir Veranlassung haben, hierin eine Modifikation eintreten zu lassen.

Die vorher gegebene Definition der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden der Strahlenbüschel A und B kann jetzt ohne weiteres

auf beliebige Schnittkurven übertragen werden, wobei wir auch hier noch zunächst von singulären Vorkommnissen absehen. Ist $G(x, y) = 0$ eine zweite Kurve, so werden ihre Schnittpunkte mit der Grundkurve durch die Primdivisoren des Zählers $\mathfrak{z}_G$ der Funktion $G(x, y)$ geliefert; in der That, zerlegen wir die in dem Körper $K(x, y)$ enthaltene Funktion $G = G(x, y)$ in Zähler und Nenner:

$$G = \frac{\mathfrak{z}_G}{\mathfrak{n}_G},$$

so gehören die Primdivisoren des Zählers zu denjenigen Punkten, für welche G verschwindet und in welchen also die Kurve $G = 0$ die Grundkurve schneidet. Hierbei ist ein Punkt als mehrfacher Schnittpunkt in Anrechnung zu bringen, falls der Exponent des zugehörigen Primdivisors gröfser als eins ist. Es ist bemerkenswert, dafs sich bei dieser durch die Kurventheorie gebotenen Anschauungsweise zunächst nur die ganzen Funktionen von x und y der Untersuchung darbieten und hierdurch eine bevorzugte Stellung innerhalb der Gesamtheit der Funktionen des Körpers $K(x, y)$ erhalten.

§ 2.

Fassen wir nun irgend einen Punkt der durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ und die Variable x bestimmten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ ins Auge, so gehört zu ihm ein gewisses Wertsystem $(x = a,\ y = b)$. Jedem Punkte der Riemannschen Fläche entspricht also ein und nur ein reeller oder imaginärer, endlicher oder unendlich ferner Punkt des algebraischen Gebildes. Wir machen nun aber die wichtige Bemerkung, dafs umgekehrt nicht jedem Punkte der Kurve ein einziger Punkt der Riemannschen Fläche zu entsprechen braucht. In der That kann es ja sehr wohl eintreten, dafs zu k Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_k$ der Riemannschen Fläche dasselbe Wertsystem $(x = a,\ y = b)$, also auch derselbe Punkt P der Kurve gehört; und zwar ist das dann und nur dann der Fall, wenn $\mathfrak{z}_{x-a}$ und $\mathfrak{z}_{y-b}$ einen gemeinsamen Teiler $\mathfrak{K}$ von der k^{ten} Ordnung besitzen. In diesem Falle werden wir den Punkt P als einen k-fachen Kurvenpunkt zu bezeichnen haben, und wenn wir durch P eine beliebige Gerade

$$p(x - a) + q(y - b) = 0$$

hindurchlegen, so müssen wir uns die Vorstellung bilden, dafs in dem Schnittpunkte P der Geraden und der Kurve k einfache Schnittpunkte zusammengefallen sind. In der That würde sich ja auch, wenn wir die Gerade unendlich wenig in beliebiger Richtung verschieben wollten, der Punkt P in k einfache, unendlich benachbarte Schnittpunkte auf-

lösen, wie dies aus den Reihenentwickelungen der Funktion y nach Potenzen von $x-a$ unmittelbar hervorgeht. Demgemäfs treffen wir folgende Festsetzung:

Ein Punkt $(x=a,\ y=b)$ der Kurve heifst ein k-facher Kurvenpunkt, wenn die Zähler der Funktionen $x-a,\ y-b$ einen Divisor k^{ter} Ordnung gemein haben. Ist a oder b gleich unendlich, so tritt $\frac{1}{x}$ an Stelle von $x-a$ oder $\frac{1}{y}$ an Stelle von $y-b$.

Hierbei ist es nicht nötig, dafs die k zu dem gemeinschaftlichen Divisor $\mathfrak{K}$ gehörigen Punkte alle voneinander verschieden sind, vielmehr haben wir eben verschiedene Kurvensingularitäten zu unterscheiden, je nachdem die k Primfaktoren jenes Divisors alle voneinander verschieden sind oder zum Teil miteinander zusammenfallen.

Die hier gegebene Definition einer Kurvensingularität weicht in ihrer Form von derjenigen ab, welche in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie gebräuchlich ist. Man pflegt nämlich gewöhnlich einen im Endlichen gelegenen Kurvenpunkt $(x=a, y=b)$ einen k-fachen Punkt zu nennen, wenn für ihn nicht blofs die Funktion $F(x,y)$, sondern auch alle ihre ersten, zweiten, ... $(k-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y};\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\ \cdots\ \frac{\partial^{k-1} F}{\partial x^{k-1}},\ \frac{\partial^{k-1} F}{\partial x^{k-2}\,\partial y},\ \cdots\ \frac{\partial^{k-1} F}{\partial y^{k-1}}$$

verschwinden, während die k^{ten} Ableitungen nicht mehr alle Null sind. Nach dem Taylorschen Satze für Funktionen zweier Veränderlicher kann diese Bedingung auch so formuliert werden, dafs in der Entwickelung der Funktion $F(x,y)$ nach steigenden Potenzen von $x-a$ und $y-b$ die Glieder niedrigster Dimension, welche auftreten, von der k^{ten} Ordnung sind. Setzen wir

$$y-b=u(x-a),$$

wo u eine Unbestimmte bedeutet, so können wir offenbar dieser Bedingung auch folgende Form geben:

Ist $(x=a,\ y=b)$ nach der gewöhnlichen Definition der analytischen Geometrie ein k-facher Punkt der Kurve $F(x,y)=0$, so ist

$$F\big(x, b+u(x-a)\big)$$

für unbestimmtes u durch $(x-a)^k$, aber nicht durch $(x-a)^{k+1}$ teilbar.

Dafs aber diese Definition mit der unsrigen wirklich übereinstimmt, beweisen wir leicht, indem wir die ganze Funktion

$$F(x,\ Y)=a_n(x)\,Y^n+a_{n-1}(x)\,Y^{n-1}+\cdots+a_1(x)\,Y+a_0(x),$$

welche die linke Seite der Kurvengleichung bildet, wirklich aufstellen. Bedeutet nämlich Y eine Unbestimmte, $y_1, y_2, \ldots y_n$ aber die Konjugierten

der algebraischen Funktion y, welche der Gleichung $F = 0$ genügt, so ist zunächst, wie schon auf S. 116 gezeigt wurde:

$$F(x, Y) = a_n(x)(Y - y_1)(Y - y_2) \dots (Y - y_n)$$
$$= a_n(x) N(Y - y),$$

also

$$\pm F\big(x, b + u(x - a)\big) = a_n(x) N\big(y - b - u(x - a)\big).$$

Wir wollen nun diese Funktion noch weiter umformen und geradezu als Norm eines bestimmten Divisors darstellen, und da wir die zu untersuchende Stelle $(x = a,\ y = b)$ als im Endlichen gelegen voraussetzen, so werden wir jetzt und bei analogen späteren Untersuchungen von den nach $(x = \infty)$ fallenden Punkten der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ völlig absehen und daher nicht mit den eigentlichen, sondern mit den Idealnormen der betreffenden Divisoren operieren können (S. 221); dabei soll die Idealnorm eines Divisors $\mathfrak{Q}$ kurz durch $N(\mathfrak{Q})$ bezeichnet werden. Die ganze Funktion $a_n(x)$ verschwindet z. B. für diejenigen endlichen Werte von x, für welche y unendlich wird (S. 74), und zwar tritt, wenn ein Punkt $\mathfrak{P}_0$ λ-mal in dem Nenner $\mathfrak{n}_y$ erscheint, der entsprechende Linearfaktor $x - x_0$ λ-mal in $a_n(x)$ auf; daher ist der Koeffizient $a_n(x)$ einfach die Idealnorm von $\mathfrak{n}_y$:

$$a_n(x) = N(\mathfrak{n}_y),$$

während

$$N(\mathfrak{n}_x) = 1$$

ist, weil die Primdivisoren von $\mathfrak{n}_x$ für die Bildung der Idealnorm ohne Einfluſs sind. Ferner gelten die Divisorengleichungen

$$x - a = \frac{\mathfrak{z}_{x-a}}{\mathfrak{n}_x}, \quad y - b = \frac{\mathfrak{z}_{y-b}}{\mathfrak{n}_y},$$

und es haben der Voraussetzung zufolge die Zähler $\mathfrak{z}_{x-a}$ und $\mathfrak{z}_{y-b}$ einen Divisor k^{ter} Ordnung $\mathfrak{K}$ gemein, dessen Norm also gleich $(x - a)^k$ ist. Daher ist

$$x - a = \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{A}}{\mathfrak{n}_x}, \quad y - b = \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{B}}{\mathfrak{n}_y},$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ganze relativ prime Divisoren sind, also

$$y - b - u(x - a) = \frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{B}\mathfrak{n}_x - u\mathfrak{A}\mathfrak{n}_y)}{\mathfrak{n}_x \mathfrak{n}_y} = \frac{\mathfrak{L}_u}{\mathfrak{n}_x \mathfrak{n}_y},$$

wobei der mit der Unbestimmten u gebildete Zählerdivisor

$$\mathfrak{L}_u = \mathfrak{K}(\mathfrak{B}\mathfrak{n}_x - u\mathfrak{A}\mathfrak{n}_y)$$

ist. Somit erhält man einfach die folgende Darstellung:

$$\pm F\big(x, b + u(x - a)\big) = N(\mathfrak{n}_y) N\big(y - b - u(x - a)\big) = N(\mathfrak{L}_u),$$

und da $N(\mathfrak{K}) = (x-a)^k$ und $\mathfrak{L}_u$ durch $\mathfrak{K}$ teilbar ist, so ist in der That, wie es sein soll, $N(\mathfrak{L}_u)$ durch $(x-a)^k$ teilbar. Diese Potenz von $x-a$ ist aber auch die höchste aufgehende Potenz, da ein weiterer in dem Divisor $\mathfrak{L}_u$ enthaltener und von u unabhängiger Primdivisor von $\mathfrak{z}_{x-a}$ sowohl in $\mathfrak{A}\mathfrak{n}_y$, als auch in $\mathfrak{B}\mathfrak{n}_x$ enthalten sein müfste. Das ist aber unmöglich, weil keines der beiden Divisorenpaare

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), \quad (\mathfrak{n}_y, \mathfrak{B})$$

einen gemeinsamen Teiler hat und ein Primfaktor von $\mathfrak{z}_{x-a}$ nicht in $\mathfrak{n}_x$ enthalten sein kann. Aus dieser Deduktion folgt auch umgekehrt, dafs, wenn die Norm von $\mathfrak{L}_u$ durch $(x-a)^k$ teilbar ist, notwendig der von u unabhängige Divisor $\mathfrak{K}$ vom k^{ten} Grade sein mufs. Beide Definitionen des k-fachen Kurvenpunktes sind also nur formell voneinander verschieden und laufen sachlich auf genau dasselbe hinaus. Wir heben noch besonders folgendes Teilresultat hervor, welches für die Folge von Wichtigkeit ist:

Ein im Endlichen gelegener Punkt $(x=a,\ y=b)$ ist dann und nur dann vielfacher Kurvenpunkt, wenn die Funktionen

$$F(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

für $x=a$ und $y=b$ verschwinden. Dann und nur dann haben $\mathfrak{z}_{x-a}$ und $\mathfrak{z}_{y-b}$ mindestens einen quadratischen Teiler gemein.

Bei der zuerst gegebenen Definition des k-fachen Kurvenpunktes wurde hervorgehoben, dafs der gröfste gemeinsame Teiler $\mathfrak{K}$ der beiden Divisoren $\mathfrak{z}_{x-a}$ und $\mathfrak{z}_{y-b}$ ebensogut aus k zum Teil gleichen, wie aus lauter verschiedenen Primdivisoren bestehen kann. Hierauf gründet sich eine erste Einteilung der Kurvensingularitäten, je nach der Anzahl der verschiedenen Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$, welche in $\mathfrak{K}$ auftreten. Ist

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \mathfrak{P}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{P}_\varkappa^{\alpha_\varkappa},$$

also

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varkappa = k,$$

so giebt es im ganzen an der Stelle $(x=a)$ $\varkappa$ verschiedene, durch die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$ charakterisierte Reihenentwickelungen der Funktion y, deren Anfangsglied gleich b ist. Daher gehen von dem Kurvenpunkte P $\varkappa$ verschiedene Zweige oder Äste der Kurve aus, und man kann auf jedem dieser $\varkappa$ Zweige zu benachbarten Punkten fortschreiten; wir werden daher die Kurvensingularität als eine $\varkappa$-zweigige Singularität bezeichnen. Schreitet man auf dem ersten Aste vorwärts, welcher dem Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Riemannschen Fläche entspricht, so haben

die Zähler von $x-a$ und $y-b$, also auch der Zähler jeder linearen Verbindung dieser Funktionen:

$$\xi_\lambda = y - b - \lambda(x-a)$$

in $\mathfrak{P}_1$ die Ordnungszahl α_1; d. h. jede Gerade des Strahlenbüschels $\xi_\lambda = 0$ durch den Kurvenpunkt P trifft den ersten Kurvenast in α_1 zusammenfallenden Punkten. Die Tangente an den ersten Kurvenast ist dann diejenige Gerade unseres Strahlenbüschels, für welche die Ordnungszahl mindestens $\alpha_1 + 1$ wird, und es giebt also im ganzen $\varkappa$ Tangenten im Punkte P, welche ihrerseits verschiedene oder auch gleiche Richtungen haben können. Hierdurch erst erfährt der Begriff der Kurventangente eine für alle Fälle ausreichende Bestimmung, und wir stellen daher die Definition auf:

> Besitzt die Kurve in P eine $\varkappa$-zweigige Singularität, so verstehen wir unter der Tangente eine Gerade, welche mit dem betreffenden Kurvenzweige einen Schnitt von höherer Multiplicität wie jede andere Gerade des Strahlenbüschels durch P hat; die Kurve hat dann in P $\varkappa$ verschiedene oder zusammenfallende Tangenten.

Wir betrachten nun zunächst diejenigen Kurvensingularitäten, welche in gewissem Sinne die einfachsten sind, weil sich auf sie, wie wir sehen werden, alle anderen zurückführen lassen. Ist $(x=a, y=b)$ ein k-facher Kurvenpunkt, so treten in der Entwickelung von $F(x,y)$ nach steigenden Potenzen von $x-a$ und $y-b$ zunächst Glieder der k^{ten} Dimension auf, und zwar sei, wenn wir die Glieder der r^{ten} Dimension in u_r zusammenfassen:

$$F(x,y) = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots,$$

wobei

$$u_k = c_0(x-a)^k + c_1(x-a)^{k-1}(y-b) + \cdots + c_k(y-b)^k$$

ist. Wenden wir nun das Diagramm an und bezeichnen die k Wurzeln der Gleichung

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_k\lambda^k = 0, \tag{1}$$

in welcher wir c_k der Einfachheit halber als von Null verschieden annehmen, mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, so ergiebt sich $\lambda_\varrho(x-a)$ als erstes Glied einer Reihenentwickelung an der Stelle (a, b). Die Geraden

$$y - b - \lambda_\varrho(x-a) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots k)$$

haben folglich mit der Kurve in P nicht bloſs wie jede andere Gerade k, sondern mindestens $k+1$ koincidente Punkte gemein; sie sind also die Tangenten an die Kurve, da jede von ihnen wenigstens mit

einem der $\varkappa$ Kurvenäste einen Schnitt von höherer Multiplizität, wie die anderen Geraden des Strahlenbüschels durch P besitzt. Nehmen wir insbesondere an, dafs die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_k$ alle voneinander verschieden sind, so hat die Kurve in P einen k-fachen Punkt mit getrennten Tangenten, wie es die nebenstehende Figur für $k=3$ darstellt. In diesem Falle schreiten die Reihenentwickelungen der Funktion y an der Stelle (a, b) nach ganzen Potenzen von $x-a$ fort und entsprechen der Reihe nach den k Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$:

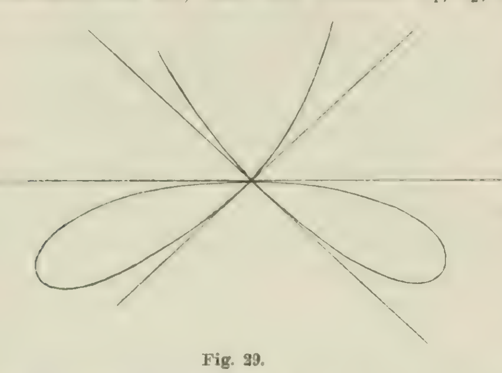


Fig. 29.

$$2)\qquad \begin{cases} y_1 - b = \lambda_1 (x-a) + \lambda_1'(x-a)^2 + \cdots \\ y_2 - b = \lambda_2 (x-a) + \lambda_2'(x-a)^2 + \cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_k - b = \lambda_k (x-a) + \lambda_k'(x-a)^2 + \cdots \end{cases}$$

Die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_x$ besitzt also für $(x=a)$ k gewöhnliche Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_k$, welche gar keine Besonderheit darbieten und in denen nur zufällig die Funktion y den gleichen Wert b erhält, während die Funktion $\frac{y-b}{x-a}$ in ihnen die k ungleichen Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ annimmt.

In diesem einfachen Falle ist es auch ohne weiteres möglich, zu bestimmen, in welchen Ordnungen die Ableitungsfunktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ in den Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_k$ verschwinden. In der That, da

$$F(x, y) = a_n(x)(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)$$

ist, so hat die Derivirte $\frac{\partial F}{\partial y}$ im Punkte $\mathfrak{P}_h$ dieselbe Ordnungszahl wie das Differenzenprodukt

$$a_n(x)(y_h-y_1)(y_h-y_2)\ldots(y_h-y_{h-1})(y_h-y_{h+1})\ldots(y_h-y_k)\ldots(y_h-y_n).$$

Wir wollen in dieser nur vorbereitenden Auseinandersetzung jetzt und in der Folge annehmen, dafs alle Schnittpunkte der beiden Geraden $x=a$ und $y=b$ mit der Kurve ins Endliche fallen; dann sind die gemeinsamen Teiler

$$(\mathfrak{z}_{x-a}, \mathfrak{n}_y) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{z}_{y-b}, \mathfrak{n}_x)$$

beide gleich 1, und es ist $a_n(x) = N(\mathfrak{n}_y)$ nicht durch $x-a$ teilbar. Daher erhalten die ersten $k-1$ Faktoren des obigen Produktes

$$y_h - y_1, \quad y_h - y_2, \ldots y_h - y_k$$

die Ordnungszahl eins, während alle übrigen die Ordnungszahl Null haben; denn da $\mathfrak{n}_y$ und $\mathfrak{z}_{x-a}$ relativ prim sind, so ergeben sich für $x = a$ aufser den Reihenentwickelungen (2) noch $n - k$ weitere Entwickelungen, deren Anfangsglieder alle endlich und von b verschieden sind. Somit verschwindet $\frac{\partial F}{\partial y}$ in jedem der k Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_k$ genau in der $(k-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und da auch $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{z}_{y-b}$ teilerfremd sind, so trifft das gleiche für $\frac{\partial F}{\partial x}$ zu; in diesem Falle sind also $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ beide genau durch das Produkt $(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_k)^{k-1}$ teilbar.

Viel verwickelter kann diese Untersuchung in dem Falle werden, dafs die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ der Gleichung (1) nicht alle voneinander verschieden sind und also die k Tangenten des Punktes P sämtlich oder teilweise miteinander zusammenfallen. Beschränken wir uns zunächst auf den Fall des Doppelpunktes ($k = 2$), so haben wir also

$$F(x, y) = u_2 + u_3 + u_4 + \cdots,$$

und hier ist nach der Voraussetzung u_2 ein Quadrat

$$u_2 = \left(-\lambda(x-a) + (y-b)\right)^2,$$

während die folgenden Glieder die Form haben mögen:

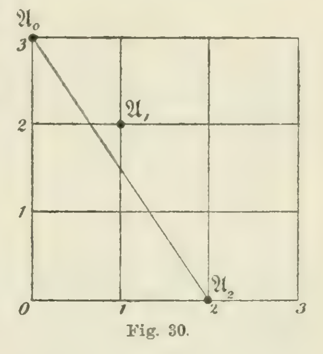


Fig. 30.

$$u_3 = p_0(x-a)^3 + p_1(x-a)^2(y-b) + p_2(x-a)(y-b)^2 + p_3(y-b)^3$$
$$u_4 = q_0(x-a)^4 + q_1(x-a)^3(y-b) + \cdots + q_4(y-b)^4$$
$$u_5 = r_0(x-a)^5 + r_1(x-a)^4(y-b) + \cdots + r_5(y-b)^5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Stellen wir nun die Reihenentwickelungen für den Kurvenpunkt (a, b) auf, so müssen wir eine ganze Anzahl von Fällen unterscheiden. Substituiert man nämlich für y die lineare Funktion

3) $$\eta = y - b - \lambda(x - a),$$

so genügt η der neuen Gleichung

4) $$\eta^2 + p(\lambda)(x-a)^3 + p'(\lambda)(x-a)^2\eta + q(\lambda)(x-a)^4 + \cdots = 0,$$

worin

$$p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + p_3\lambda^3,$$
$$q(\lambda) = q_0 + q_1\lambda + q_2\lambda^2 + q_3\lambda^3 + q_4\lambda^4$$

gesetzt ist. Ist also

1) $p(\lambda) \neq 0$, haben also u_2 und u_3 keine gemeinsamen Wurzeln, so ist bei Anwendung des Diagramms (Fig. 30) der Punkt $\mathfrak{A}_2 = (2, 0)$

auf der Abscissenachse mit dem Punkte $\mathfrak{A}_0 = (0, 3)$ auf der Ordinatenachse zu verbinden; die Steigung der Sehne ist also $\frac{3}{2}$, und es wird somit das Anfangsglied der Entwickelung von η gleich $e(x-a)^{\frac{3}{2}}$, wo der Koeffizient e durch die Gleichung

$$e^2 + p(\lambda) = 0$$

bestimmt ist. Also erhält man in diesem Falle für $y - b$ die Reihe

$$y - b = \lambda(x-a) + e(x-a)^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

worin $e = \sqrt{-p(\lambda)}$ von Null verschieden ist. Die Kurve besitzt alsdann in P einen Rückkehrpunkt (Fig. 31) derart, dafs sie von einer beliebigen, durch P gehenden Geraden in zwei, von ihrer Tangente

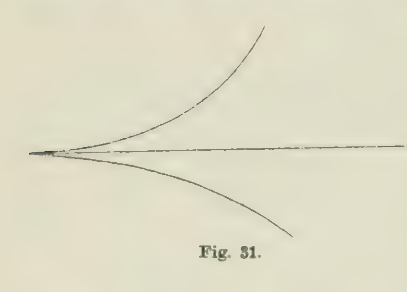


Fig. 31.

$$y - b - \lambda(x-a) = 0$$

aber in drei koincidenten Punkten getroffen wird; denn die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Funktion verschwindet in dritter Ordnung, während eine beliebige lineare Verbindung von $x - a$ und $y - b$ im allgemeinen nur die Ordnungszahl zwei hat. Die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_x$ besitzt an der Stelle $(x = a, y = b)$ einen Verzweigungspunkt $\mathfrak{P}$ von der ersten Ordnung, und wenn man die Ableitungsfunktion $\frac{\partial F}{\partial y}$ bildet, so ergiebt sich für sie unter den vereinfachenden Annahmen, die wir gemacht haben, dafs sie in $\mathfrak{P}$ in dritter Ordnung verschwindet.

2) Wenn $p(\lambda) = 0$ ist, so geht die obige Gleichung (4) über in

$$\eta^2 + p'(\lambda)(x-a)^2\eta + q(\lambda)(x-a)^4 + \cdots = 0;$$

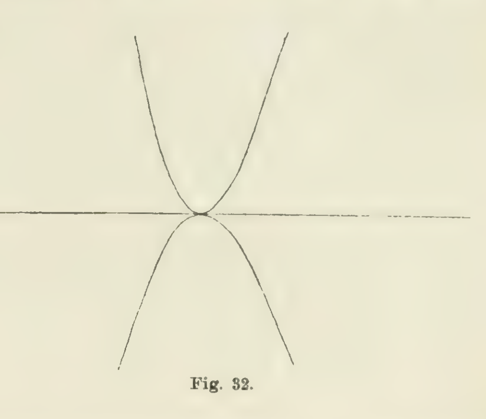
in dem zugehörigen Diagramm enthält die letzte Begrenzungssehne die Punkte $\mathfrak{A}_0 = (0, 4)$, $\mathfrak{A}_1 = (2, 2)$, $\mathfrak{A}_2 = (2, 0)$, sie besitzt also die Steigung 2, und der zugehörige Anfangskoeffizient e wird durch die quadratische Gleichung

$$e^2 + p'(\lambda)e + q(\lambda) = 0 \tag{5}$$

geliefert. Hat also die quadratische Gleichung (5) zwei ungleiche Wurzeln μ_1 und μ_2, so findet man zwei verschiedene Entwickelungen, welche beide nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreiten:

$$y - b = \lambda(x-a) + \mu_1(x-a)^2 + \cdots$$
$$y - b = \lambda(x-a) + \mu_2(x-a)^2 + \cdots$$

Die Kurve hat in diesem Falle (Fig. 32) einen **Selbstberührungspunkt**; bricht man nämlich eine der beiden Reihenentwickelungen nach dem zweiten Gliede ab, so stellt jede dieser Gleichungen eine Parabel dar, welche mit dem einen Kurvenaste eine gewöhnliche, mit dem andern aber eine osculierende Berührung hat, und die Kurve besteht also in der Umgebung der Stelle P aus zwei parabelförmigen, sich daselbst berührenden Ästen, zwischen welchen unendlich viele Parabeln hindurchgelegt werden können. Die Riemannsche Fläche aber besitzt in diesem Falle daselbst zwei gewöhnliche, übereinander liegende Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, in denen beiden $y = b$ wird, während die Funktion


Fig. 32.

$$\frac{y - b - \lambda(x - a)}{(x - a)^2}$$

in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die ungleichen Werte μ_1 und μ_2 annimmt. Die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}$ wird, wie man ebenso wie früher ermittelt, in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ je in zweiter Ordnung Null.

3) Wenn aber die quadratische Gleichung (5) zwei gleiche Wurzeln μ hat, so hat man die Gleichung $F = 0$ zunächst durch die Substitution $\eta = y - b - \lambda(x - a) - \mu(x - a)^2$ zu transformieren und findet alsdann bei Anwendung des Newtonschen Diagramms, dafs η im allgemeinen von derselben Ordnung wie $(x - a)^{\frac{5}{2}}$ wird. Es ergiebt sich nämlich die Reihenentwickelung

$$y - b = \lambda(x - a) + \mu(x - a)^2 + \nu(x - a)^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

worin der Koeffizient ν aus der Gleichung

$$-2\nu^2 = p''(\lambda)q(\lambda) - q'(\lambda)p'(\lambda) + 2r(\lambda),$$
$$r(\lambda) = r_0 + r_1\lambda + r_2\lambda^2 + r_3\lambda^3 + r_4\lambda^4 + r_5\lambda^5$$

zu bestimmen ist und daher im allgemeinen nicht verschwindet. Die Kurve besitzt alsdann in P (Fig. 33) eine sogenannte **Schnabelspitze**, der Kurvenast gabelt sich nämlich wie beim gewöhnlichen Rückkehrpunkte in zwei Teile mit gemeinsamer Tangente, aber diese beiden Kurvenzüge liegen auf derselben Seite der Tangente in P, denn für hinreichend benachbarte Kurvenpunkte nimmt die Funktion

$$y-b-\lambda(x-a)=\mu(x-a)^2+\nu(x-a)^{\frac{5}{2}}+\cdots$$

stets das Vorzeichen von μ an, einerlei, ob man auf dem einen oder dem andern Kurventeile von P aus fortschreitet.*) Konstruiert man hingegen die hyperosculierende Parabel

$$y-b-\lambda(x-a)-\mu(x-a)^2=0,$$

so geht diese zwischen den beiden Kurvenzügen hindurch, da man offenbar für kleine Werte von $x-a$ zwei Gröfsen verschiedenen Vorzeichens erhält, je nachdem man der Potenz $(x-a)^{\frac{5}{2}}$ den einen oder den andern Wert zuerteilt. Die Riemannsche Fläche hat für $(x=a, y=b)$

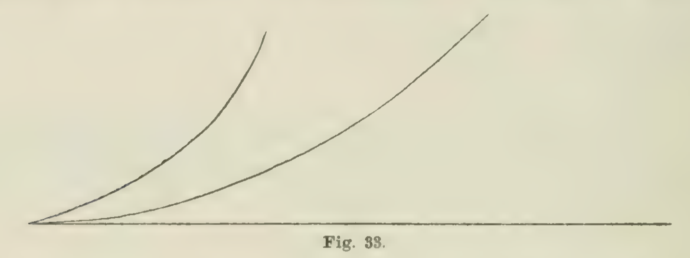


Fig. 33.

einen Windungspunkt $\mathfrak{P}$ erster Ordnung, und die Ableitungsfunktion $\frac{\partial F}{\partial y}$ verschwindet in $\mathfrak{P}$ in fünfter Ordnung.

Wie man sieht, erschöpfen die hier aufgeführten Singularitäten nicht einmal den Fall $k=2$ vollständig, da ja der Koeffizient ν, welcher vorher als von Null verschieden vorausgesetzt wurde, seinerseits wieder verschwinden kann, was zu neuen Singularitäten Veranlassung gäbe. Behandelt man die hier eintretenden Möglichkeiten nach gleicher Methode und setzt alsdann die Untersuchung für den Fall $k>2$ fort, so erhält man immer neue Singularitäten verschiedenen Charakters, deren Aufzählung zu einer unübersichtlichen und verwirrenden Vielheit führen würde. Wir gelangen aber zu einer alle Möglichkeiten umfassenden Übersicht der verschiedenen Kurvensingularitäten, wenn wir von der Erwägung ausgehen, dafs die bereits behandelten Spezialfälle sich vor allem auch dadurch unterscheiden, dafs die Ableitungsfunktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ in den zu P gehörigen Punkten der Riemannschen Fläche ganz verschiedenes Verhalten zeigen. Wir werden so darauf geführt, die diesen Funktionen zugehörigen

*) Allerdings setzen diese Ausführungen $\mu \neq 0$ voraus. Wenn $\mu=0$ ist, unterscheidet sich die Schnabelspitze äufserlich von einem gewöhnlichen Rückkehrpunkte nur dadurch, dafs die beiden nach verschiedenen Seiten laufenden Kurvenzüge sich näher an die Tangente anschmiegen.

Divisoren einer näheren Untersuchung zu unterziehen und von hier aus eine Einteilung und einen Überblick über die sämtlichen bei einer Kurve möglichen Singularitäten zu gewinnen.

§ 3.

Es werde, um die vorher angekündigte Untersuchung vorzunehmen, die linke Seite der Kurvengleichung nach Potenzen von x oder y geordnet; dann ist, wenn

$$1)\quad \begin{cases} F(x,y) = \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m}\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu\nu}x^{\mu}y^{\nu} \\ \quad = a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x) \\ \quad = b_m(y)x^m + b_{m-1}(y)x^{m-1} + \cdots + b_1(y)x + b_0(y) \end{cases}$$

ist, entweder

$$2)\quad \begin{cases} a_\nu(x) = c_{m\nu}x^m + c_{m-1,\nu}x^{m-1} + \cdots + c_{0\nu} \\ \text{oder} \\ b_\mu(y) = c_{\mu n}y^n + c_{\mu,n-1}y^{n-1} + \cdots + c_{\mu 0}. \end{cases}$$

Dann handelt es sich im wesentlichen nur um die Untersuchung desjenigen Divisors, welcher der dem Körper $K(x, y)$ angehörigen Funktion

$$3)\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = n a_n(x)y^{n-1} + (n-1)a_{n-1}(x)y^{n-2} + \cdots + a_1(x)$$

zugeordnet ist, da die andere Ableitungsfunktion $\frac{\partial F}{\partial x}$ mit dieser in einfachem Zusammenhange steht. Betrachten wir nun in der Gleichung (1) x als unabhängige Variable und bezeichnen die Konjugierten der abhängigen Variabeln y mit $y_1, y_2, \ldots y_n$, so ist, wie wir wissen:

$$F(x,y) = a_n(x)(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n),$$

also die h^{te} Konjugierte von $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$3\text{a})\quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_h = a_n(x)(y_h-y_1)(y_h-y_2)\ldots(y_h-y_{h-1})(y_h-y_{h+1})\ldots(y_h-y_n)$$

und dieses Differenzenprodukt ist also für eine beliebige Entwickelung y_h der Funktion y zu untersuchen.

Diese Betrachtung wollen wir zunächst in der Weise vereinfachen, dafs wir jede der beiden Variabeln einer passenden linearen Transformation

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \quad y = \frac{\alpha'\eta + \beta'}{\gamma'\eta + \delta'}$$

unterwerfen und uns gestatten, an Stelle der Gleichung $F(x, y) = 0$ die transformierte Gleichung $\Phi(\xi, \eta) = 0$ zu behandeln. Wir werden dann nachträglich die Wirkung einer derartigen Transformation unter-

suchen und zeigen, daſs dieselbe für unsere Zwecke überhaupt ganz unwesentlicher Natur ist. Damit wird also das zunächst unter vereinfachten Annahmen abgeleitete Resultat als allgemein giltig erwiesen sein.

Diese Vereinfachung besteht aber in zwei Annahmen verschiedenen Charakters. Betrachten wir die Gerade ($x = \infty$), so schneidet dieselbe die Kurve in n Punkten, welche gewöhnliche oder singuläre, getrennte oder zusammenfallende Punkte sein können; wir wollen annehmen, daſs sie die Kurve in n getrennten, gewöhnlichen Punkten schneidet, und daſs die zugehörigen Werte $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ von y endlich sind. Ebenso soll die Gerade ($y = \infty$) die Kurve in m getrennten gewöhnlichen Punkten schneiden, zu welcher endliche Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ von x gehören.

Die zweite Annahme trifft eine Festsetzung über die Koordinaten derjenigen Kurvenpunkte, welche dem Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$ entsprechen. Die geometrische Bedeutung dieses Verzweigungsdivisors bei der auf S. 367 gegebenen Interpretation des Koordinatensystems ist leicht zu erkennen. Verbinden wir das Centrum A des ersten Strahlenbüschels mit einem Kurvenpunkte P, so hat die Gerade AP im allgemeinen mit der Kurve in P nur einen einfachen Schnittpunkt, einen mehrfachen vor allem aber dann, wenn die Gerade AP in P die Kurve berührt, und diese Berührungspunkte P der Kurve liefern also einen Beitrag zum Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$, da ja in allen Punkten dieses Divisors $\mathfrak{z}_{x-a}$ von höherer als erster Ordnung verschwindet. Auſser diesen Berührungspunkten der von A an die Kurve gelegten Tangenten können nur noch die singulären Punkte einen Beitrag zum Divisor $\mathfrak{Z}_x$ geben; diese komplizierteren Verhältnisse sollen später eine ausführliche Erörterung finden, für jetzt genügt die Bemerkung, daſs durch den Divisor $\mathfrak{Z}_x$ jedenfalls eine endliche Anzahl von Punkten auf der Kurve bestimmt wird, und daſs dieselben nur von der Wahl des Centrums A, aber nicht von der Auswahl der Grundstrahlen des Büschels abhängen. Denn führen wir durch lineare Transformation x in ξ über, so ist, wie schon auf S. 249 bemerkt wurde, $\mathfrak{Z}_x = \mathfrak{Z}_\xi$, was eben der Inhalt unserer Behauptung ist. Wir wollen nun die Annahme machen, daſs in den durch den Divisor $\mathfrak{Z}_x$ bestimmten Kurvenpunkten P und in ihren konjugierten, welche durch die sämtlichen Strahlen AP auf der Kurve ausgeschnitten werden, die Variable y endlich ist.

Man überzeugt sich sehr leicht davon, daſs man wirklich durch lineare Transformation den sämtlichen Annahmen genügen kann. Denn da man, wenn die Punkte A und B gewählt sind, jede Gerade der

beiden Strahlenbüschel zur Geraden $(x = \infty)$, resp. $(y = \infty)$ machen kann, so läſst sich, nachdem die zum Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$ gehörigen Punkte P und ihre konjugierten bestimmt sind, zunächst die Gerade $(y = \infty)$ so wählen, daſs sie an diesen Punkten vorbeigeht und überdies die Kurve in m gewöhnlichen und distinkten Punkten schneidet; nachdem dies geschehen, kann man alsdann die Gerade $(x = \infty)$ so wählen, daſs sie ebenfalls die Kurve in n gewöhnlichen, distinkten Punkten schneidet und die Gerade $(y = \infty)$ nicht auf der Kurve trifft. Wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind, so ist also

1) der gröſste gemeinsame Teiler $(\mathfrak{n}_x, \mathfrak{n}_y) = 1$;
2) bestehen $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ aus lauter verschiedenen Primteilern;
3) sind die gröſsten gemeinsamen Teiler $(\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{n}_x)$ und $(\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{n}_y) = 1$ und es sind auch die zu den Primteilern von $\mathfrak{Z}_x$ konjugierten Divisoren in $\mathfrak{n}_x$ nicht enthalten.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so ist die Art des Unendlichwerdens der Funktion $\frac{\partial F}{\partial y}$ sofort festzustellen. Die Funktion besitzt offenbar nur in den Punkten einen Pol, in denen x oder y unendlich wird, also in denjenigen, welche den n, resp. m Primfaktoren von $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ entsprechen; diese sind aber nach unserer Voraussetzung alle voneinander verschieden. Die Gerade $(y = \infty)$ schneidet aber die Kurve in m verschiedenen Punkten $(x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$, in denen die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_x$ unverzweigt ist. Also ist die Idealnorm

$$N(\mathfrak{n}_y) = a_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m),$$

und wir erhalten für $x = \alpha_\mu$ eine Reihenentwickelung, welche nur ein Glied mit dem negativen Exponenten -1 enthält:

$$y_1 = \frac{\lambda_\mu}{x - \alpha_\mu} + \cdots,$$

während die konjugierten Reihenentwickelungen $y_2, y_3, \ldots y_n$ nach den getroffenen Annahmen nur Potenzen mit positiven Exponenten erhalten. Das Produkt

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = a_n(x)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_1 - y_n)$$

besteht somit aus n Faktoren, von denen der erste in unserem Punkte die Ordnungszahl 1, die letzten $n - 1$ die Ordnungszahl -1 besitzen. Die Funktion $\frac{\partial F}{\partial y}$ enthält also jeden der m Primdivisoren von $\mathfrak{n}_y$ in der $-(n-2)^{\text{ten}}$ Potenz und ihr Nenner ist also ein Vielfaches von $\mathfrak{n}_y^{n-2}$.

Noch einfacher ist die Feststellung der Ordnungszahlen für die Primfaktoren von $\mathfrak{n}_x$. Für $x = \infty$ erhalten wir die n konjugierten Reihenentwickelungen

$$y_\nu = \beta_\nu + \frac{\gamma_\nu}{x} + \frac{\delta_\nu}{x^2} + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots n),$$

welche zufolge unserer Voraussetzung sämtlich gewöhnliche Potenzreihen und deren Anfangsglieder $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ voneinander verschieden sind. Folglich hat in dem Produkte

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_h = a_n(x)(y_h - y_1) \ldots (y_h - y_n)$$

der erste Faktor die Ordnungszahl $-m$, weil er eine ganze Funktion m^{ten} Grades ist, während alle folgenden Einheitsfunktionen sind; die Derivirte $\frac{\partial F}{\partial y}$ enthält also jeden Primdivisor von $\mathfrak{n}_x$ in der $-m^{\text{ten}}$ Potenz und ihr Nenner ist also genau $\mathfrak{n}_x^m \mathfrak{n}_y^{n-2}$.

Gehen wir jetzt dazu über, das Verhalten der Funktion $\frac{\partial F}{\partial y}$ in ihren Nullpunkten festzustellen, so ist klar, dafs sie in jedem a-blättrigen Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ mindestens die Ordnungszahl $a-1$ besitzt; denn in dem Produkte

$$a_n(x)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_1 - y_n)$$

erhalten die a ersten Entwickelungen $y_1, y_2, \ldots y_a$ nur Potenzen mit positivem Exponenten und dasselbe Anfangsglied, die $a-1$ Differenzen $y_1 - y_2, \ldots y_1 - y_a$ haben also positive Ordnungszahlen, während die Ordnungszahlen der übrigen Faktoren nach der letzten von uns getroffenen Annahme jedenfalls nicht negativ sind. Indem wir eine genauere Untersuchung dieser Verhältnisse auf später verschieben, genügt es für jetzt festgestellt zu haben, dafs der Zähler von $\frac{\partial F}{\partial y}$ durch den Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$ teilbar und der Nenner gleich dem Produkte $\mathfrak{n}_x^m \mathfrak{n}_y^{n-2}$ ist, so dafs wir setzen können:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^m \mathfrak{n}_y^{n-2}}, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{D}$ einen *ganzen* Divisor bedeutet. Derselbe Divisor $\mathfrak{D}$ tritt auch im Zähler der Ableitungsfunktion $\frac{\partial F}{\partial x}$ auf; denn berücksichtigen wir, dafs

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

und nach dem auf S. 292 bewiesenen Satze

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{Z}_y \mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{Z}_x \mathfrak{n}_y^2}$$

ist, so finden wir

$$-\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_y}{\mathfrak{n}_x^{m-2}\mathfrak{n}_y^n}. \tag{4a}$$

Es erübrigt nun noch, die Wirkung einer linearen Transformation der Variabeln zu untersuchen; hierzu genügt es offenbar, nur eine der beiden Variabeln x einer Substitution

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} \tag{5}$$

zu unterwerfen, da wir ja hinterdrein auch auf die andere eine ganz ebensolche Transformation ausüben können. Geht nun durch (5) $F=0$ in $\Phi=0$ über, so ist, da die Variable x bis zum m^{ten} Grade aufsteigt, identisch

$$F(x, y)(\gamma\xi+\delta)^m = \Phi(\xi, y),$$

also wenn man differenziert und $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ annimmt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma\xi+\delta)^m\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\xi}(\gamma\xi+\delta)^m + m\gamma F(x, y)(\gamma\xi+\delta)^{m-1}\\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma\xi+\delta)^{m-2}.\end{aligned}$$

Nun ist $\gamma\xi+\delta$ Null in den Punkten, für die $x=\infty$ ist, und hat dieselben Pole wie ξ, also hat man die Divisorenzerlegung

$$\gamma\xi+\delta = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{n}_\xi};$$

ferner ist $\mathfrak{Z}_x=\mathfrak{Z}_\xi$, wie schon früher bemerkt wurde, und folglich findet man

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^m\,\mathfrak{n}_y^{n-2}},\\ -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} &= \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_y}{\mathfrak{n}_\xi^{m-2}\,\mathfrak{n}_y^n}.\end{aligned}$$

Diese Formeln haben aber genau dieselbe Form für das Gebilde $\Phi(\xi, y)=0$ wie die ursprünglichen für das Gebilde $F(x, y)=0$. Eine lineare Transformation einer oder auch beider Variabeln läfst somit den Divisor $\mathfrak{D}$ ganz unberührt, und es ist also gleichgiltig, ob man den Divisor $\mathfrak{D}$ durch die Formeln (4) und (4a) für das ursprüngliche oder für irgend ein durch lineare Transformation der Variabeln aus ihm hervorgehendes Gebilde definiert.

Der Divisor $\mathfrak{D}$ hat hiernach die Eigenschaft, dafs in den entsprechenden Punkten der Riemannschen Fläche sowohl $\frac{\partial F}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial F}{\partial y}$ Null wird, vorausgesetzt, dafs die zugehörigen Werte von x und y endlich sind, was durch lineare Transformation stets erreicht werden kann; jeder Primteiler von $\mathfrak{D}$ entspricht also einem vielfachen Punkte der Kurve $F(x, y)=0$. Umgekehrt lehrt die nachfolgende Diskussion dieses Divisors, dafs alle Punkte der Riemannschen Fläche, welche Singularitäten der Kurve entsprechen, in $\mathfrak{D}$ auch wirklich vorkommen, und zwar in einer bestimmten Multiplizität, welche von der Beschaffenheit der Singularität bedingt ist. Aus diesem Grunde bezeichnen wir $\mathfrak{D}$ als den D i v i s o r der D o p p e l p u n k t e oder der singulären

Punkte der Kurve $F(x, y) = 0$. Er spielt in der Theorie der algebraischen Kurven eine Rolle von ähnlicher Wichtigkeit, wie der Verzweigungsdivisor in der Theorie der Riemannschen Flächen; hierbei ist aber zu beachten, dafs, während der Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_x$ nur von der Variabeln x abhängt und derselbe bleibt, gleichviel welche abhängige Variable y man innerhalb des Körpers $K(x, y)$ gewählt haben mag, der Divisor $\mathfrak{D}$ von beiden Variabeln x und y, also von der Kurve abhängt und sich im allgemeinen auch bei birationalen Transformationen nur einer dieser beiden Variabeln verändert. Nur lineare Transformationen sind auf ihn ohne Einflufs.

Der Divisor $\mathfrak{D}$ ist durch die Gleichung (3) als ein Teil des Zählers von $\frac{\partial F}{\partial y}$ definiert; nachdem nämlich festgestellt ist, dafs die Funktion $\frac{\partial F}{\partial y}$ für ein algebraisches Gebilde mit den Ordnungszahlen m, n den Nenner $\mathfrak{n}_x^m \mathfrak{n}_y^{n-2}$ oder einen Teiler hiervon erhält, ist er derjenige Teil des Zählers dieser Funktion, welcher nach Absonderung des hier immer als Faktor auftretenden Verzweigungsdivisors $\mathfrak{Z}_x$ übrig bleibt. Die nachfolgenden Betrachtungen werden die Zweckmäfsigkeit dieser Definition erweisen. Unstatthaft wäre es, den Divisor $\mathfrak{D}$ als den gröfsten gemeinsamen Teiler der Zähler der Ableitungsfunktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ bestimmen zu wollen, weil diese aufser $\mathfrak{D}$ noch weitere gemeinsame Teiler haben können, wenn nämlich $\mathfrak{Z}_x$ und $\mathfrak{Z}_y$ solche besitzen. Dagegen kann man die Einführung des für diese Untersuchungen überflüssigen Verzweigungsteilers vermeiden, wenn man von dem Divisor ausgeht, welcher dem Differential

$$d\varphi = \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{5}$$

zugeordnet ist. Denn da nach den Ausführungen des § 3 der neunzehnten Vorlesung dem Differential dx der Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}$ zugehört, so erhält man nach Formel (4)

$$d\varphi = \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} \sim \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2} \cdot \frac{\mathfrak{n}_x^m \mathfrak{n}_y^{n-2}}{\mathfrak{Z}_x \mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{n}_x^{m-2} \mathfrak{n}_y^{n-2}}{\mathfrak{D}},$$

so dafs sich der Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_x$ forthebt. Es ergiebt sich also der Satz:

Der Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte ist der Nenner des dem Differential $d\varphi$ zugehörigen Differentialteilers, wenn $d\varphi$ durch Gleichung (5) definiert ist.

Die Ordnung des Divisors $\mathfrak{D}$ ist stets eine gerade Zahl $2d$, denn aus den Gleichungen (4) und (4a) ergiebt sich, weil Zähler und Nenner der Funktionen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ von gleicher Ordnung sind:

$$\begin{aligned} 2d &= 2(m-1)n - w_y \\ &= 2(n-1)m - w_x, \end{aligned}$$

und da die Verzweigungszahlen w_x und w_y gerade Zahlen sind, so ist es auch $2d$. Führt man an ihrer Stelle lieber das Geschlecht

$$p = \frac{w_x}{2} - (n-1) = \frac{w_y}{2} - (m-1)$$

ein, so findet man die symmetrische Formel

$$d = (m-1)(n-1) - p. \tag{6}$$

Da p nicht negativ ist, so ergiebt sich für d die obere Grenze

$$d \leqq (m-1)(n-1),$$

ein Gebilde mit den Ordnungszahlen m, n kann also nie mehr als $(m-1)(n-1)$ Doppelpunkte haben, und diese Zahl nur dann, wenn $p = 0$, das Gebilde also rational ist.

§ 4.

Will man jetzt für eine gegebene Kurve $F(x, y) = 0$ den Beitrag berechnen, welchen eine bei $(x = a,\ y = b)$ liegende Singularität zum Divisor der Doppelpunkte liefert, so kann man einfach in der Weise verfahren, dafs man in allen Punkten der Riemannschen Fläche, die diesem Kurvenpunkte entsprechen, die Reihenentwickelungen der Funktion y aufstellt, aus ihnen das Differenzenprodukt $\frac{\partial F}{\partial y}$ bildet und sodann die Formel (4) des vorigen Abschnittes anwendet. Dabei können und wollen wir überall voraussetzen, dafs die Zahlen a und b endlich sind und dafs das Gleiche auch von den übrigen zu $x = a$ gehörigen Werten von y gilt; denn dies kann durch lineare Transformation der Variabeln stets erzielt werden. Dann besitzt also auch der Faktor $a_n(x) = N(\mathfrak{n}_n)$, der in $\frac{\partial F}{\partial y}$ auftritt, an den zu untersuchenden Stellen stets die Ordnungszahl Null und kann daher fortgelassen werden.

Wir wollen diese Untersuchung zunächst in dem Falle durchführen, dafs dem singulären Punkte P der Kurve nur ein Punkt $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche entspricht, die Singularität der Kurve also nach Art des Rückkehrpunktes und der Schnabelspitze einzweigig ist. Es mag nämlich im Punkte $\mathfrak{P}$ die Reihenentwickelung gelten:

$$y_1 - b = \lambda(x-a)^{\frac{s}{r}} + \lambda_1(x-a)^{\frac{s_1}{r}} + \lambda_2(x-a)^{\frac{s_2}{r}} + \cdots,$$

so daſs die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_x$ daselbst einen r-blättrigen Windungspunkt besitzt. Bezeichnen wir nun mit ω eine primitive r^{te} Einheitswurzel, so entspringen aus der Reihenentwickelung $r-1$ konjugierte:

$$y_{h+1} - b = \lambda\omega^{hs}(x-a)^{\frac{s}{r}} + \lambda_1\omega^{hs_1}(x-a)^{\frac{s_1}{r}} + \cdots,$$

worin h die Werte $1, 2, \ldots r-1$ annimmt. Dann hat die Funktion $\frac{\partial F}{\partial y}$ in $\mathfrak{P}$ dieselbe Ordnungszahl, wie das Differenzenprodukt

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \cdots (y_1 - y_r),$$

denn die übrigen Faktoren $a_n(x)$, $y_1 - y_{r+1}, \ldots y_1 - y_n$ sind sämtlich Einheitsfunktionen, weil $y_{r+1}, \ldots y_n$ für $x = a$ endliche und von b verschiedene Werte erhalten. Bezeichnen wir nun den gröſsten gemeinschaftlichen Teiler von r und s mit (r, s) und bilden der Reihe nach

$$(r, s) = r_1, \quad (r_1, s_1) = r_2, \quad (r_2, s_2) = r_3, \ldots,$$

so müssen wir in der Bildung dieser Zahlen so weit gehen, bis der Teiler eins erreicht ist. Berechnen wir nämlich die $r-1$ Differenzen

$$y_1 - y_{h+1} = \lambda(1-\omega^{hs})(x-a)^{\frac{s}{r}} + \lambda_1(1-\omega^{hs_1})(x-a)^{\frac{s_1}{r}} + \cdots$$
$$(h = 1, 2, \ldots r-1),$$

so liefert eine solche zu dem Differenzenprodukt $\frac{\partial F}{\partial y}$ als Beitrag den Faktor $(x-a)^{\frac{s}{r}}$, wenn nicht

$$\omega^{hs} = 1$$

ist. Wenn aber diese Gleichung für einen Wert von h erfüllt ist, so ist

$$hs \equiv 0 \pmod{r},$$

also

$$h\frac{s}{r_1} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{r}{r_1}\right),$$

und da $\frac{s}{r_1}$ und $\frac{r}{r_1}$ teilerfremd sind, so muſs h ein Vielfaches von $\frac{r}{r_1}$, also h eine der Zahlen

$$\frac{r}{r_1}, \; 2\frac{r}{r_1}, \cdots (r_1 - 1)\frac{r}{r_1}$$

sein. Schaltet man zunächst diese $r_1 - 1$ Differenzen aus, so liefern die übrigen den Beitrag $\mathfrak{P}^{s(r-r_1)}$.

Betrachten wir jetzt die vorher ausgeschalteten Differenzen, so hat jede derselben den Faktor $(x-a)^{\frac{s_1}{r}}$, wenn nicht

$$\omega^{hs_1} = 1,$$

also

$$hs_1 \equiv 0 \pmod{r}$$

ist. Da aber

$$h = \frac{r}{r_1} h_1$$

ist, wo h_1 eine der Zahlen $1, 2, \ldots r_1 - 1$ ist, so mufs alsdann $\frac{h_1 s_1}{r_1}$ eine ganze Zahl, also h_1 ein Vielfaches von $\frac{r_1}{r_2}$ sein. Sieht man also wieder von diesen $r_2 - 1$ Differenzen ab, für welche

$$h_1 = \frac{r_1}{r_2}, \quad 2\frac{r_1}{r_2}, \cdots (r_2 - 1)\frac{r_1}{r_2},$$

also

$$h = \frac{r}{r_2}, \quad 2\frac{r}{r_2}, \cdots (r_2 - 1)\frac{r}{r_2}$$

ist, so ergeben die übrig bleibenden den Beitrag $\mathfrak{P}^{s_1(r_1 - r_2)}$, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man, dafs $\frac{\partial F}{\partial y}$ genau durch $\mathfrak{P}^e$ teilbar ist, worin der Exponent

1) $$e = s(r - r_1) + s_1(r_1 - r_2) + s_2(r_2 - r_3) + \cdots$$

ist und die Summe soweit fortzusetzen ist, bis der Teiler $r_\nu = 1$ auftritt. Andererseits erhält der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$ die folgende Potenz von $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P}^{r-1} = \mathfrak{P}^{(r - r_1) + (r_1 - r_2) + (r_2 - r_3) + \cdots}.$$

Zufolge der Formel (4) des vorigen Paragraphen tritt also im Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte der Primteiler $\mathfrak{P}$ in der Potenz

$$\mathfrak{P}^\varepsilon = \mathfrak{P}^{e - r + 1}$$

auf, deren Exponent in eine der beiden folgenden Formen gesetzt werden kann:

2) $$\varepsilon = (s - 1)(r - r_1) + (s_1 - 1)(r_1 - r_2) + (s_2 - 1)(r_2 - r_3) + \ldots$$
oder
$$\varepsilon = (s - 1)(r - 1) + (s_1 - s)(r_1 - 1) + (s_2 - s_1)(r_2 - 1) + \cdots$$

Aus dieser Formel ergiebt sich u. a. auch, dafs jeder Punkt $\mathfrak{P}$, welcher sowohl in $\mathfrak{Z}_x$ wie in $\mathfrak{Z}_y$ vorkommt, auch im Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte auftritt; denn in der Reihenentwickelung an dieser Stelle sind alsdann die Zahlen r und s gröfser als eins, woraus folgt, dafs der eben bestimmte Exponent ε positiv wird. Aus diesem Grunde ist auch, wie schon auf S. 383 angegeben wurde, jeder Primdivisor, für welchen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ verschwinden, notwendigerweise Teiler von $\mathfrak{D}$; denn aus den Formeln (4) des vorigen Paragraphen geht hervor, dafs ein derartiger Teiler andernfalls in $\mathfrak{Z}_x$ und $\mathfrak{Z}_y$ enthalten sein müfste, und dies kann nicht der Fall sein, wenn er in $\mathfrak{D}$ nicht enthalten ist. Andererseits sieht man auch, dafs $\mathfrak{D}$ im allgemeinen nicht mit dem gröfsten ge-

meinsamen Teiler der Zähler von $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ identisch ist, nämlich immer dann nicht, wenn für einen Punkt $\mathfrak{P}$ die Zahlen r und s, welche nach S. 248 die Ordnungszahlen von $x-a$ und $y-b$ in $\mathfrak{P}$ sind, beide gröfser als eins sind.

Die durch die Formel (2) bestimmte Zahl ε ist stets eine gerade Zahl. Denn in der Summe

$$\varepsilon = (s-1)(r-r_1) + (s_1-1)(r_1-r_2) + (s_2-1)(r_2-r_3) + \cdots$$

ist jeder einzelne Summand gerade. Wäre nämlich z. B. der erste Summand ungerade, so wäre s gerade und $r-r_1$ ungerade; das ist aber unmöglich, weil, wenn s gerade ist, der gröfste gemeinsame Teiler $r_1 = (r, s)$ gleichzeitig mit r gerade oder ungerade, also

$$r \equiv r_1 \pmod{2}$$

ist; ganz das gleiche gilt auch für jeden der folgenden Summanden.

Wir gehen jetzt dazu über, den Einflufs einer Kurvensingularität auf den Divisor der Doppelpunkte zu bestimmen, welche dadurch entsteht, dafs mehrere Kurvenzweige sich in dem Punkte P durchsetzen oder berühren. Es genügt aber, wenn wir den Fall einer zweizweigigen Singularität vollständig erörtern, denn wir werden nachträglich leicht zeigen können, dafs jede beliebige, noch so verwickelte Singularität als Übereinanderlagerung einer Anzahl einzweigiger und zweizweigiger Singularitäten aufgefafst werden kann, in dem Sinne, dafs der Anteil, welchen die Singularität zu dem Divisor $\mathfrak{D}$ liefert, einfach das Produkt der von den Komponenten gelieferten Beiträge ist.

Die Singularität komme dadurch zu stande, dafs die beiden Reihenentwickelungen

$$\overline{\mathfrak{P}}_1\left((x-a)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{P}}_2\left((x-a)^{\frac{1}{\beta}}\right)$$

der algebraischen Funktion y in den beiden Punkten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, welche resp. ein α- und ein β-blättriger Punkt der Riemannschen Fläche sein mögen, eine Anzahl von Gliedern gemein haben. Wir bezeichnen nun die erste Entwickelung und ihre konjugierten durch $y_1, y_2, \ldots y_\alpha$, die zweite mit ihren konjugierten durch $y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \ldots y_{\alpha+\beta}$. Wenn wir nun den durch diese partielle Übereinstimmung der beiden Reihen hervorgerufenen Anteil zum Divisor der Doppelpunkte feststellen, so ist es klar, dafs der Primteiler $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{D}$ ebenso oft wie in dem für $y = y_1$ gebildeten Produkte

$$Y_1(y) = (y-y_{\alpha+1})(y-y_{\alpha+2}) \cdots (y-y_{\alpha+\beta}),$$

der Primdivisor $\mathfrak{P}_2$ aber ebenso oft, wie in dem für $y = y_{\alpha+1}$ gebildeten Produkte

$$Y_2(y) = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_\alpha)$$

vorkommt, indem alle übrigen Faktoren von $\frac{\partial F}{\partial y}$ für den Punkt $\mathfrak{P}_1$ resp. $\mathfrak{P}_2$ entweder Einheitsfunktionen sind oder wenigstens nicht von den beiden zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gehörigen Kurvenzweigen herrühren.

Man kann aber zunächst leicht erkennen, dafs der Divisor $\mathfrak{P}_1$ in dem ersten Produkte den gleichen Exponenten erhält wie der Divisor $\mathfrak{P}_2$ in dem zweiten. Führen wir nämlich die erste Multiplikation aus, so erhalten wir

$$Y_1(y) = y^\beta + B_1(x)y^{\beta-1} + B_2(x)y^{\beta-2} + \dots + B_\beta(x),$$

worin die Koeffizienten $B_\varrho(x)$ als symmetrische Verbindungen der konjugierten Entwickelungen $y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \dots y_{\alpha+\beta}$ gewöhnliche, nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende Reihen sind. Setzen wir jetzt für y die Reihenentwickelung y_1 ein, so mag sich ergeben:

$$Y_1(y_1) = c(x-a)^{\frac{k}{\alpha}} + \dots,$$

so dafs $\mathfrak{D}$ den Beitrag $\mathfrak{P}_1^k$ erhält. Setzen wir aber für y eine der konjugierten Entwickelungen $y_2, y_3, \dots y_\alpha$, so erhalten wir für das erste Glied $c\omega^k(x-a)^{\frac{k}{\alpha}}$, wo ω eine primitive α^{te} Einheitswurzel ist, also ist das Produkt

$$Y_1(y_1)\, Y_1(y_2)\, Y_1(y_3) \dots Y_1(y_\alpha) = \pm\, c^\alpha (x-a)^k + \dots$$

Führen wir die analoge Untersuchung für das zweite Produkt durch, so mag sich ergeben:

$$Y_2(y_{\alpha+1}) = c'(x-a)^{\frac{l}{\beta}} + \dots,$$

also

$$Y_2(y_{\alpha+1})\, Y_2(y_{\alpha+2}) \dots Y_2(y_{\alpha+\beta}) = \pm\, c'^\beta (x-a)^l + \dots$$

Nun aber sind die beiden so berechneten Produkte bis aufs Vorzeichen einander gleich, weil sie beide die Resultante der beiden in y ganzen Funktionen $Y_1(y)$ und $Y_2(y)$ sind; es ist nämlich

$$Y_1(y_1)\, Y_1(y_2) \dots Y_1(y_\alpha) = \Pi(y_r - y_s) \quad \binom{r = 1, 2, \dots \alpha}{s = \alpha+1, \dots \alpha+\beta},$$

$$Y_2(y_{\alpha+1})\, Y_2(y_{\alpha+2}) \dots Y_2(y_{\alpha+\beta}) = \Pi(y_s - y_r) \quad \binom{s = \alpha+1, \dots \alpha+\beta}{r = 1, 2, \dots \alpha},$$

folglich sind die Exponenten k und l einander gleich, d. h. es hat die Entwickelung $Y_1(y_1)$ im Punkte $\mathfrak{P}_1$ dieselbe Ordnungszahl wie die Entwickelung $Y_2(y_{\alpha+1})$ im Punkte $\mathfrak{P}_2$, was zu beweisen war.

Die wirkliche Berechnung des Exponenten l kann aber alsdann sehr viel einfacher erfolgen und unmittelbar aus den in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$

geltenden Reihenentwickelungen abgelesen werden. Beide Reihen haben einen gewissen Bestandteil gemein, welchen wir in der Form darstellen:

$$G(x) = \lambda(x-a)^{\frac{s}{r}} + \lambda_1(x-a)^{\frac{s_1}{r}} + \cdots + \lambda_{\nu-1}(x-a)^{\frac{s_{\nu-1}}{r}}.$$

Hierbei mögen die Exponenten auf einen kleinsten gemeinsamen Nenner r gebracht sein, so dafs die Zahlen $r, s, s_1, \ldots s_{\nu-1}$ teilerfremd sind; der Generalnenner r mufs alsdann ein gemeinsamer Teiler von α und β sein, da der Bestandteil G sowohl in der ersten Reihe $\overline{\mathfrak{P}}_1\left((x-a)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, als auch in der zweiten $\overline{\mathfrak{P}}_2\left((x-a)^{\frac{1}{\beta}}\right)$ auftritt. Diese Reihen lassen sich daher in die Form setzen:

$$y_1 \quad = G(x) + \mu(x-a)^{\frac{p}{\alpha}} + \cdots$$

$$y_{\alpha+1} = G(x) + \nu(x-a)^{\frac{q}{\beta}} + \cdots,$$

wo die Glieder $\mu(x-a)^{\frac{p}{\alpha}}$ und $\nu(x-a)^{\frac{q}{\beta}}$ nicht mehr gleich sind. Bilden wir daher die Differenz

$$y_1 - y_{\alpha+1} = c(x-a)^f + \cdots,$$

so ist f der kleinere der beiden Brüche $\frac{p}{\alpha}$ und $\frac{q}{\beta}$:

$$f = m\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}\right).$$

Um jetzt das Produkt

$$Y_1(y_1) = (y_1 - y_{\alpha+1})(y_1 - y_{\alpha+2}) \cdots (y_1 - y_{\alpha+\beta}) = \prod_h (y_1 - y_{\alpha+1+h})$$

$$(h = 0, 1, 2, \ldots \beta - 1)$$

auszuwerten, empfiehlt es sich, vorerst die Faktoren zu berücksichtigen, für welche der Bestandteil $G(x)$ beim Übergang von $y_{\alpha+1}$ zu der konjugierten Entwickelung $y_{\alpha+1+h}$ keine Änderung erfahren hat. Ist nun ϱ eine primitive β^{te} Einheitswurzel, so ist

$$y_{\alpha+h+1} = \lambda\varrho^{\frac{sh\beta}{r}}(x-a)^{\frac{s}{r}} + \lambda_1\varrho^{\frac{s_1h\beta}{r}}(x-a)^{\frac{s_1}{r}} + \cdots$$
$$+ \lambda_{\nu-1}\varrho^{\frac{s_{\nu-1}h\beta}{r}}(x-a)^{\frac{s_{\nu-1}}{r}} + \nu\varrho^{qh}(x-a)^{\frac{q}{\beta}} + \cdots,$$

und es werden daher die ersten ν Potenzen von ϱ, welche hier auftreten, dann und nur dann gleich Eins, wenn

$$sh \equiv s_1 h \equiv \cdots \equiv s_{\nu-1}h \equiv 0 \pmod{r}$$

ist; da aber $r, s, \ldots s_{\nu-1}$ teilerfremd sind, so mufs h ein Vielfaches von r, also eine der Zahlen

$$0, \quad r, \quad 2r, \ldots \beta - r$$

sein. Für diese $\frac{\beta}{r}$ Differenzen $y_1 - y_{\alpha+1+h}$ ergiebt sich alsdann dasselbe Anfangsglied $c(x-a)^f$ der Reihenentwickelung, also für das Produkt aller das Glied

$$(x-a)^{\frac{\beta}{r}f},$$

und da $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ die Ordnungszahl eins hat, so erhalten wir von hier aus zur Zahl l den Beitrag

$$\frac{\alpha\beta}{r}f,$$

welcher stets eine ganze Zahl ist, weil der Bruch f entweder den Nenner α oder den Nenner β erhält und r sowohl in α als in β aufgeht.

Berücksichtigen wir jetzt eine der $r-1$ Differenzen

$$y_1 - y_{\alpha+2}, \quad y_1 - y_{\alpha+3}, \cdots y_1 - y_{\alpha+r},$$

welche zwischen der ersten und der zweiten der bisher in Rechnung gezogenen Differenzen, nämlich zwischen $y_1 - y_{\alpha+1}$ und $y_1 - y_{\alpha+1+r}$, auftreten, so kann man diese auch so schreiben:

$$(y_1 - y_{\alpha+1}) + (y_{\alpha+1} - y_{\alpha+2}), \quad (y_1 - y_{\alpha+1}) + (y_{\alpha+1} - y_{\alpha+3}), \cdots$$
$$(y_1 - y_{\alpha+1}) + (y_{\alpha+1} - y_{\alpha+r}),$$

und wenn man nun hier z. B. die Differenz $y_{\alpha+1} - y_{\alpha+2}$ bildet, so unterscheiden sich bereits die Bestandteile, welche von der Funktion $G(x)$ herrühren, und es hat also $y_{\alpha+1} - y_{\alpha+2}$ eine kleinere Ordnungszahl als $y_1 - y_{\alpha+1}$. Daher liefert das Produkt

$$(y_1 - y_{\alpha+2})(y_1 - y_{\alpha+3}) \cdots (y_1 - y_{\alpha+r})$$

denselben Beitrag wie das Produkt

$$(y_{\alpha+1} - y_{\alpha+2})(y_{\alpha+1} - y_{\alpha+3}) \cdots (y_{\alpha+1} - y_{\alpha+r}),$$

wenn man das letztere auf den ersten Bestandteil $G(x)$ beschränkt. Für ein solches Produkt haben wir aber im Vorhergehenden den Anteil bereits bestimmt; wir fanden nämlich als erstes Glied der Entwickelung $(x-a)^{\frac{e}{r}}$, wo

1) $$e = s(r-r_1) + s_1(r_1 - r_2) + \cdots + s_{\nu-1}(r_{\nu-1} - 1)$$

und $r_1 = (s, r)$, $r_2 = (s_1, r_1)$ u. s. w. ist. Wenn wir schliefslich irgend eines der folgenden aus $r-1$ Faktoren bestehenden Produkte nehmen, welche nach den Differenzen

$$(y_1 - y_{\alpha+1}), \quad (y_1 - y_{\alpha+1+r}), \quad (y_1 - y_{\alpha+1+2r}), \cdots (y_1 - y_{\alpha+\beta-r+1})$$

eingeschaltet sind, so liefert jedes derselben, wie man leicht sieht, immer wieder denselben Beitrag wie das erste, das wir soeben unter-

sucht haben. Daher erhalten wir von allen noch fehlenden Produkten zusammen den Beitrag

$$(x-a)^{\frac{e}{r}\frac{\beta}{r}},$$

also da $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ die Funktion erster Ordnung ist, so liefern jene Produkte zur Zahl l den Anteil $e\frac{\alpha}{r}\frac{\beta}{r}$.

So erhalten wir schliefslich die einfache Endformel für den Exponenten l:

$$3) \qquad l = \frac{\alpha\beta}{r} f + e\frac{\alpha}{r}\frac{\beta}{r} = \frac{\alpha\beta}{r}\left(f + \frac{e}{r}\right),$$

wo der Bruch f die kleinere von den beiden Zahlen $\frac{p}{\alpha}$, $\frac{q}{\beta}$ ist und die ganze Zahl e allein durch den beiden Reihenentwickelungen gemeinsamen Bestandteil $G(x)$ vermöge der Formel (1) bestimmt ist. Da in diese Formel die beiden Reihenentwickelungen y_1 und $y_{\alpha+1}$ in völlig symmetrischer Weise eintreten und keine vor der andern einseitig bevorzugt ist, so erhalten wir aufs neue einen Beweis, dafs die beiden Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ denselben Exponenten in dem Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte besitzen.

Haben wir jetzt eine beliebige Kurvensingularität P, in welcher $\varkappa$ Kurvenzweige zusammenlaufen, so entsprechen dem Kurvenpunkte P $\varkappa$ verschiedene Punkte der Riemannschen Fläche $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$; dann können wir den Anteil, den der Punkt P zum Divisor der Doppelpunkte liefert, stets in folgender Weise ermitteln. Wir wenden zuvörderst eine lineare Transformation an, durch welche der Punkt P und auch alle seine konjugierten, in denen x denselben Wert a erhält, ins Endliche fallen. Sodann bestimmen wir für jeden der Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$ vermöge der Formel (2) die Potenzen $\mathfrak{P}_1^{\varepsilon_1}, \mathfrak{P}_2^{\varepsilon_2}, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa^{\varepsilon_\varkappa}$, welche durch jeden Kurvenast einzeln geliefert werden. Zweitens bestimmen wir durch die Gleichung (3) die Beiträge, welche durch das Zusammentreten je zweier Kurvenäste entstehen:

$$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)^{l_{12}}, \quad (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3)^{l_{13}}, \ldots (\mathfrak{P}_{\varkappa-1}\mathfrak{P}_\varkappa)^{l_{\varkappa-1,\varkappa}},$$

wobei die Anzahl dieser Potenzen gleich der Anzahl der Kombinationen von $\varkappa$ Elementen zu je zweien, also gleich $\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa-1)$ ist. Hierdurch haben wir offenbar den von dem Punkte P hervorgerufenen Beitrag zum Divisor $\mathfrak{D}$ vollkommen erschöpft, da jede Differenz zweier konjugierten Reihenentwickelungen $y_h - y_i$, welche überhaupt den Divisor der Doppelpunkte beeinflufst, in einem der Teilprodukte und auch nur in einem einzigen auftritt. Bilden wir endlich das Produkt

$$4)\quad \mathfrak{D} = \prod_{(P)} \{\mathfrak{P}_1^{\varepsilon_1}\mathfrak{P}_2^{\varepsilon_2}\ldots\mathfrak{P}_\varkappa^{\varepsilon_\varkappa}(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)^{l_{12}}(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3)^{l_{13}}\ldots(\mathfrak{P}_{\varkappa-1}\mathfrak{P}_\varkappa)^{l_{\varkappa-1,\varkappa}}\}$$

und erstrecken dasselbe über alle Punkte P der Kurve (nicht über die Punkte der Riemannschen Fläche), so ist dieses offenbar mit dem Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte vollkommen identisch, und wir haben so eine schöne und theoretisch vollkommen durchsichtige Darstellung des Divisors $\mathfrak{D}$ gewonnen.

Der einfachste Fall einer $\varkappa$-zweigigen Singularität ist der, wenn in der Formel (4) die Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varkappa$ gleich Null, die Exponenten $l_{12}, l_{13}, \ldots l_{\varkappa-1,\varkappa}$ gleich eins werden. Dieser Fall tritt, wie schon in dem vorigen Abschnitte ausgeführt wurde, dann ein, wenn die Kurve einen $\varkappa$-fachen Punkt mit getrennten Tangenten hat. Aus der Gleichung (3), durch welche die Exponenten bestimmt werden, folgt aber auch umgekehrt, dafs er nur für eine solche Singularität eintritt, dafs also, wenn

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_\varkappa = 0, \quad l_{12} = l_{13} = \cdots = l_{\varkappa-1,\varkappa} = 1$$

ist, die Kurve notwendig bei P einen $\varkappa$-fachen Punkt mit getrennten Tangenten besitzt. Ist nämlich

$$\frac{\alpha\beta}{r} f + e\frac{\alpha}{r}\frac{\beta}{r} = 1,$$

so ist, da beide Summanden nicht negative ganze Zahlen sind und der erste seiner Bedeutung nach nicht Null sein kann, notwendig

$$\frac{\alpha\beta}{r} f = 1 \quad \text{und} \quad e = 0.$$

Wenn aber $e = 0$ ist, so ist notwendig $r = r_1 = \cdots = r_{\nu-1} = 1$, also lautet der den beiden Reihenentwickelungen gemeinsame Teil

$$G(x) = \lambda(x-a)^s + \lambda_1(x-a)^{s_1} + \cdots + \lambda_{\nu-1}(x-a)^{s_{\nu-1}}.$$

Nun ist f die kleinere von den beiden Zahlen $\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\beta}$, also entweder

$$\beta p = 1 \quad \text{und} \quad \frac{p}{\alpha} \leqq \frac{q}{\beta}, \qquad \text{oder} \qquad \alpha q = 1 \quad \text{und} \quad \frac{q}{\beta} \leqq \frac{p}{\alpha};$$

im ersten Falle ist $\beta = p = 1$, und die beiden Reihenentwickelungen lauten also

$$y_1 = G(x) + \mu(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots, \quad y_{\alpha+1} = G(x) + \nu(x-a)^{\frac{q}{\beta}} + \cdots;$$

dann aber ist $G(x)$ notwendig eine Konstante, und da die zweiten Glieder der beiden Reihenentwickelungen bereits verschieden sind, so können die Tangenten an beide Kurvenzweige nicht übereinstimmen. Es gilt also der Satz:

Sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_k$ k verschiedene konjugierte Punkte der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$, und ist der Divisor der Doppelpunkte genau durch

$$(\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_k)^{k-1}$$

teilbar, so entspricht den k Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_k$ ein einziger Punkt P des algebraischen Gebildes, und dieser ist ein k-facher Punkt mit getrennten Tangenten.

Dieser Satz ist die Umkehrung desjenigen, der auf S. 375 erwähnt wurde. Für $k = 2$ hat man den gewöhnlichen Doppelpunkt; es ist hiernach klar, dafs der k-fache Punkt mit getrennten Tangenten als Übereinanderlagerung von $\frac{1}{2}k(k-1)$ Doppelpunkten aufgefafst werden kann. Ein k-facher Punkt mit getrennten Tangenten ist daher auch als eine Singularität von gleicher Einfachheit wie ein Doppelpunkt anzusehen. Ein k-facher Punkt hingegen mit Tangenten, die alle oder zum Teil zusammenfallen, darf, wie die obige allgemeine Formel (4) zeigt, im allgemeinen nicht in gleich einfacher Weise als blofse Übereinanderlagerung von Doppel- oder Rückkehrpunkten aufgefafst werden und ist daher eine Singularität höherer Art.

§ 5.

Gehen wir jetzt zur Idealnorm des Divisors $\mathfrak{D}$ für die Variable x über, so erhalten wir, da die Idealnorm aller konjugierten Primfaktoren

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$$

gleich $x - a$ ist:

$$N(\mathfrak{D}) = \prod_{(P)} (x-a)^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\varkappa + 2\Sigma k_{12}},$$

worin Σk_{12} über alle Kombinationen zu zweien der $\varkappa$ Primdivisoren

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa,$$

zu erstrecken ist, welche dem Kurvenpunkte P entsprechen. Diese ganze Funktion von x heifst nach Kronecker der aufserwesentliche Teiler der Diskriminante D der Kurvengleichung; da die Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varkappa$, wie früher bewiesen, gerade Zahlen sind, so ist sie stets das volle Quadrat einer ganzen Funktion X:

$$N(\mathfrak{D}) = X^2;$$

der Grad von X ist offenbar die schon in Formel (6) des § 3 bestimmte Zahl d.

Im Gegensatze hierzu heifst die Idealnorm des Verzweigungsdivisors $\mathfrak{Z}_x$ der wesentliche Teiler der Diskriminante der Kurvengleichung oder die Diskriminante Δ des Körpers K, die somit durch die Gleichung erklärt wird:

$$\Delta = N(\mathfrak{Z}_x).$$

Gehen wir nun in der Formel (3) des § 2 zur Norm über, so finden wir, da die Diskriminante D der Kurvengleichung in Beziehung auf die Variable y bekanntlich*) durch die Gleichung

$$D = a_n(x)^{n-2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_2\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_n$$
$$= N(\mathfrak{n}_y)^{n-2}\, N\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

bestimmt ist, und da ferner nach Gleichung (4) desselben Paragraphen

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^m\,\mathfrak{n}_y^{n-2}},$$

also

$$N\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{N(\mathfrak{D})\,N(\mathfrak{Z}_x)}{N(\mathfrak{n}_y)^{n-2}}$$

ist:

$$D = \Delta \cdot X^2.$$

Dieses wichtige Resultat fassen wir in folgendem Satze zusammen:

Die Diskriminante D einer Kurvengleichung $F(x, y) = 0$ in Beziehung auf die Variable y besteht stets aus zwei Faktoren. Der erste derselben Δ ist die Idealnorm des zur Variabeln x gehörigen Verzweigungsdivisors $\mathfrak{Z}_x$ oder die Körperdiskriminante, sein Grad gleich der Verzweigungszahl w. Der zweite sogenannte aufserwesentliche Teiler ist die Idealnorm des Divisors $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte und als solche das Quadrat einer ganzen Funktion X; der Grad dieser Funktion X ist die vorher bestimmte Zahl d. Diese Gradbestimmungen sind an die Voraussetzung gebunden, dafs die Werte, welche die Variable x in den Punkten von $\mathfrak{Z}_x$ und von $\mathfrak{D}$ erhält, sämtlich endlich ausfallen; andernfalls treten Graderniedrigungen der ganzen Funktionen ein.

In der älteren Litteratur geht alles auf die Untersuchung dieser ganzen Funktionen D, Δ, X, also auf die Untersuchung gewisser Normen von Divisoren hinaus. Bei unserer Art der Betrachtung treten

*) Vgl. z. B. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5. Aufl., S. 135.

diese Divisoren selbst in den Vordergrund, und die Sätze über die Normen erscheinen als blofse Folgerungen dieser Analyse der Divisoren. In dieser von Dedekind eingeleiteten Wendung der Untersuchung ist ein wesentlicher Fortschritt zu erblicken; denn zu bestimmten Divisoren gehören bestimmte Normen, aber zu bestimmten Normen gehören, wie schon auf S. 150 erwähnt wurde, im allgemeinen mehrere verschiedene Divisoren. Aufserdem verhalten sich die Divisoren, wie wir wissen, bei jeder Transformation invariant, die Normen aber kommen überhaupt erst dadurch zum Vorschein, dafs man eine bestimmte Variable x bevorzugt und in Beziehung auf sie das Produkt der Konjugierten bildet. Kurz, die Divisoren sind hier wie überall das Wesentliche, obgleich oder eben weil sie nicht analytische Gebilde, sondern diesen zugeordnete, invariante Symbole sind; die Sätze über Funktionen, insbesondere über Normen sind interessante, aber beiläufige Korollarien der für die Divisoren geltenden Gesetze.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Auflösung der Singularitäten. — Erste Methode. — Zweite Methode. — Funktionenringe. — Die Bedeutung des Divisors der Doppelpunkte für Funktionenringe. — Adjungierte Kurven und Differentiale erster Gattung. — Die birationale Transformation als allgemeinstes Abbildungsprinzip algebraischer Kurven.

§ 1.

Anstatt die Bestimmung des Divisors der Doppelpunkte durch direkte Bildung eines der beiden Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial x}$ oder $\frac{\partial F}{\partial y}$ vorzunehmen, kann man auch einen anderen Weg einschlagen, welcher zugleich ein geometrisch bedeutsames Resultat ergiebt. Man kann nämlich durch eine successive Folge einfacher Transformationen die gegebene Kurve $F(x, y) = 0$ in eine andere überführen, welche an all den Stellen, an denen die Singularitäten der ersten Kurve gelegen sind, gewöhnliche Punkte besitzt und welche an Stelle dieser verlorenen Singularitäten nur vielfache Punkte mit getrennten Tangenten eingetauscht hat; diese letzteren können aber nach dem Früheren als einfache Singularitäten angesehen werden. Das hier einzuschlagende Verfahren, welches als Auflösung der singulären Punkte der gegebenen Kurve bezeichnet wird, kann dann auch dazu dienen, für die ursprüngliche Kurve den Divisor der Doppelpunkte zu berechnen; denn jede einzelne der anzuwendenden Transformationen besteht in einer bestimmten und leicht zu übersehenden Reduktion dieses Divisors.

Die Kurve $F(x, y) = 0$ werde zu diesem Zwecke zunächst durch eine lineare Transformation der Variabeln, welche ja, wie wir wissen, den Divisor der Singularitäten unberührt läfst, so umgeformt, dafs sich für die Gerade $(x = \infty)$ n verschiedene endliche Werte $(y = \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$ ergeben, und dafs die singulären Punkte der Kurve sämtlich ins Endliche fallen. Dann haben zufolge der ersten Voraussetzung die Divisoren $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ keinen Teiler gemein, und in der Kurvengleichung

$$1) \qquad F(x, y) = g x^m y^n + \cdots = 0$$

hat das Glied höchster Dimension notwendig einen von Null verschiedenen Koeffizienten g; denn immer dann, wenn $g = 0$ ist, wird für $x = \infty$ auch einer der Werte von y unendlich, wie dies unmittelbar

aus dem auf S. 75 bewiesenen Satze oder auch durch direkte Anwendung des Diagramms folgt. Zufolge der zweiten Voraussetzung sind die Divisoren $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ beide zum Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte teilerfremd.

Ist nun bei $(x = a,\ y = b)$ ein k-facher Kurvenpunkt P gelegen, so wollen wir zunächst annehmen, dafs die Gerade $x - a = 0$ die Kurve aufser in P in $n - k$ von P und voneinander verschiedenen Punkten schneidet; wir wollen dann nachträglich zeigen, in welcher Weise sich diese Voraussetzung realisieren läfst, wenn sie nicht von vornherein erfüllt sein sollte. Setzt man dann

$$x - a = \frac{\mathfrak{z}_{x-a}}{\mathfrak{n}_x}, \quad y - b = \frac{\mathfrak{z}_{y-b}}{\mathfrak{n}_y},$$

so haben (vgl. S. 372) die Zähler $\mathfrak{z}_{x-a}$ und $\mathfrak{z}_{y-b}$ den dem Kurvenpunkt P entsprechenden Divisor k^{ter} Ordnung

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{P}_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$$

gemein, und in den Gleichungen

$$\mathfrak{z}_{x-a} = \mathfrak{K}\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{z}_{y-b} = \mathfrak{K}\mathfrak{M}$$

sind nicht blofs die Divisoren $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zu einander teilerfremd, sondern es mufs auch vermöge unserer Voraussetzung der Divisor $\mathfrak{L}$ aus $n - k$ ungleichen Primdivisoren bestehen, welche alle von $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$ verschieden sind. Wir unterwerfen nun die Kurve der einfachen Transformation

$$\eta = \frac{y - b}{x - a} \tag{2}$$

und zeigen, dafs hierdurch in demjenigen Teile des Divisors der Doppelpunkte, welcher von $\mathfrak{K}$ herrührt, eine Reduktion hervorgebracht wird. Die Variable

$$\eta = \frac{\mathfrak{z}_{y-b}\,\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{z}_{x-a}\,\mathfrak{n}_y}$$

hat den Grad $m + n - k$, denn Zähler und Nenner haben den Faktor $\mathfrak{K}$, aufser diesem aber keinen weiteren Teiler gemein, da nach Weghebung des Faktors $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{z}_\eta = \frac{\mathfrak{z}_{y-b}\,\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{K}} = \mathfrak{n}_x\mathfrak{M}$$

und

$$\mathfrak{n}_\eta = \frac{\mathfrak{z}_{x-a}\,\mathfrak{n}_y}{\mathfrak{K}} = \mathfrak{n}_y\mathfrak{L}$$

relativ prim sind; es sind nämlich alle vier Paare von Divisoren

$$(\mathfrak{n}_x, \mathfrak{n}_y), \quad (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}), \quad (\mathfrak{n}_x, \mathfrak{L}), \quad (\mathfrak{n}_y, \mathfrak{M})$$

ohne gemeinsamen Teiler. Demzufolge mufs die durch die Substitution (2) transformierte Gleichung $\Phi(x, \eta) = 0$ in x den Grad $m + n - k$, in η den Grad n haben.

Dasselbe ergiebt sich auch, wenn man die Funktion $F(x, y)$ nach Potenzen von $x - a$ und $y - b$ entwickelt und dann η an Stelle von y durch die Gleichung (2) einführt; denn weil P ein k-facher Punkt ist, so hat man

$$F(x, y) = c_0 (x - a)^k + c_1 (x - a)^{k-1} (y - b) + \cdots + c_k (y - b)^k + \cdots \\ + g (x - a)^m (y - b)^n,$$

wo g derselbe Koeffizient wie in Gleichung (1) ist. Ersetzt man nun hier $y - b$ durch $\eta (x - a)$, so hebt sich der Faktor $(x - a)^k$ heraus, und man findet

$$F(x, y) = (x - a)^k (c_0 + c_1 \eta + \cdots + c_k \eta^k + \cdots + g (x - a)^{m+n-k} \eta^n);$$

es ist also identisch

$$F(x, y) = (x - a)^k \Phi (x, \eta)$$

und es steigt in der That in der transformierten Gleichung

$$\Phi (x, \eta) = 0$$

x bis zum $(m + n - k)^{\text{ten}}$ Grade auf. Hieraus ergiebt sich durch Differentiation nach y die Identität

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x - a)^{k-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

Bezeichnet man nun den Divisor der Doppelpunkte der transformierten Kurve $\Phi = 0$ mit $\mathfrak{E}$, so hat man nach der Formel (4) in § 3 der vorigen Vorlesung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D} \mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^m \, \mathfrak{n}_y^{n-2}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^{m+n-k} \, \mathfrak{n}_\eta^{n-2}},$$

folglich, wenn man diese Divisorengleichungen in die vorige Formel einsetzt:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D} \, \mathfrak{n}_x^{n-1} \, \mathfrak{z}_{x-a}^{n-k-1}}{\mathfrak{K}^{n-2}} = \frac{\mathfrak{D} \, \mathfrak{n}_x^{n-1} \, \mathfrak{L}^{n-k-1}}{\mathfrak{K}^{k-1}}.$$

Die Bedeutung dieser wichtigen Formel ist folgende: Es hat zunächst der Divisor $\mathfrak{E}$ gegenüber $\mathfrak{D}$ eine Reduktion erfahren, da aus $\mathfrak{D}$ der Faktor $\mathfrak{K}^{k-1}$ entfernt worden ist; sind nämlich die Primfaktoren

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$$

des Divisors $\mathfrak{K}$ in dem Divisor $\mathfrak{D}$ der Reihe nach mit den Exponenten $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\varkappa$ behaftet, so tritt der Punkt $\mathfrak{P}_r$ in dem neuen Divisor $\mathfrak{E}$ der Doppelpunkte in der Multiplizität

$$\varepsilon_r = \delta_r - (k - 1) \alpha_r$$

auf, und es wird also durch unsere Transformation eine Verringerung der Exponenten hervorgebracht. Andererseits sind in den Divisor $\mathfrak{E}$ hierfür zwei neue Faktoren, nämlich $\mathfrak{n}_x^{n-1}$ und $\mathfrak{L}^{n-k-1}$ eingetreten. Diese neuen Singularitäten sind aber, wie aus dem auf S. 394 aufgestellten Satze

folgt, nichts weiter als ein n-facher und ein $(n-k)$-facher Punkt mit getrennten Tangenten, die dadurch hervorgerufen sind, dafs die Transformation den n Schnittpunkten der Geraden $x=\infty$ denselben Punkt $(x=\infty, \eta=0)$ und den $n-k$ Punkten, in welchen die Gerade $x=a$ die Kurve aufser in P schneidet, denselben Punkt $(x=a, y=\infty)$ zuordnet. Das Gleiche folgt auch daraus, dafs in den n Punkten von $\mathfrak{n}_x$ die Reihenentwickelungen gelten:

$$y=\beta_\nu+\frac{\gamma_\nu}{x}+\cdots \qquad (\nu=1,2,\ldots n),$$

also ist

$$\eta=\frac{\beta_\nu-b}{x}+\cdots,$$

und da $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ voneinander verschieden sind, so erhält man hier einen gewöhnlichen n-fachen Punkt. Andererseits ergiebt sich in den Punkten des Divisors $\mathfrak{L}$

$$y=\lambda_r+\mu_r(x-a)+\cdots \qquad (r=1,2,\ldots n-k),$$

worin die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-k}$ nach unserer Voraussetzung alle voneinander und von b verschieden sind. Folglich ist

$$\eta=\frac{\lambda_r-b}{x-a}+\mu_r+\cdots,$$

oder wenn wir, da η für $x=a$ unendlich wird, zum reciproken Werte übergehen:

$$\frac{1}{\eta}=\frac{x-a}{\lambda_r-b}-\mu_r\left(\frac{x-a}{\lambda_r-b}\right)^2+\cdots;$$

die Kurve hat also hier in der That einen $(n-k)$-fachen Punkt mit getrennten Tangenten.

In der hier angegebenen Weise kann durch eine Folge von Transformationen jede beliebige noch so komplizierte Kurvensingularität aufgelöst, d. h. durch einfache Singularitäten der transformierten Kurve ersetzt werden, vorausgesetzt, dafs die Gerade $x=a$ wirklich der Bedingung genügt, die wir gestellt haben, und die Kurve aufser in P in $n-k$ von P und voneinander verschiedenen Punkten schneidet. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so müssen wir der Transformation (2) erst eine andere vorausschicken, welche, ohne die Singularitäten wesentlich zu verändern, jene Voraussetzung für die neue Kurve statthaft macht.

Wir gelangen zu dieser Hilfstransformation, wenn wir berücksichtigen, dafs sich in dem Strahlenbüschel

$$x-a-\lambda(y-b)=0$$

offenbar solche Geraden befinden, welche die Kurve aufser in P nur in lauter von P und voneinander verschiedenen Punkten treffen. Be-

stimmen wir nun λ dieser Forderung gemäſs, so wollen wir die Transformation

$$\xi = \frac{x-a-\lambda(y-b)}{y-b'} \tag{2}$$

anwenden, wobei die Gröſse b' so gewählt werden möge, daſs die Gerade $y-b'=0$ die Kurve in m voneinander und von den Schnittpunkten der Zählergeraden verschiedenen Punkten schneidet; hierbei hat die Einführung des Nenners $y-b'$ den Zweck, die für $(\xi=\infty)$ sich einstellenden Singularitäten der transformierten Kurve zu möglichst einfachen zu machen. Wir wollen zeigen, daſs diese Transformation wirklich den gewünschten Erfolg hat, und nehmen hierbei wieder an, daſs die Nenner $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ aus n resp. m verschiedenen Primfaktoren bestehen und keinen gemeinsamen Teiler haben.

Die Variable ξ erhält die Divisorenzerlegung

$$\xi = \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{G}}{\mathfrak{n}_x\mathfrak{n}_y} : \frac{\mathfrak{z}_{y-b'}}{\mathfrak{n}_y} = \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{G}}{\mathfrak{n}_x\mathfrak{z}_{y-b'}},$$

worin $\mathfrak{G}$ einen ganzen Divisor bedeutet; sie ist also, da der Bruch bereits die reduzierte Form hat, vom Grade $m+n$, und ihr Nenner ist

$$\mathfrak{n}_\xi = \mathfrak{n}_x\mathfrak{z}_{y-b'}.$$

Setzen wir nun in der Kurvengleichung unter Benutzung von (2)

$$x = a+\xi(y-b')+\lambda(y-b),$$

so erhalten wir

$$F(x,y) = F\big(a+\xi(y-b')+\lambda(y-b),y\big) = \Phi(\xi,y),$$

also durch Differentiation nach ξ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\partial F}{\partial x}(y-b'). \tag{3}$$

Bezeichnen wir nun den Divisor der Doppelpunkte für die ursprüngliche und für die transformierte Kurve mit $\mathfrak{D}$ und $\overline{\mathfrak{D}}$, so haben wir zufolge der Formel (4a) auf S. 382

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_y}{\mathfrak{n}_x^{m-2}\mathfrak{n}_y^{n}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{Z}_y}{\mathfrak{n}_\xi^{m-2}\mathfrak{n}_y^{m+n}}.$$

Trägt man diese Divisorenzerlegungen in die Gleichung (3) ein und berücksichtigt, daſs $\frac{\mathfrak{n}_\xi}{\mathfrak{n}_x} = \mathfrak{z}_{y-b'}$ ist, so ergiebt sich schlieſslich

$$\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{z}_{y-b'}^{m-1}\mathfrak{n}_y^{m-1}.$$

Die Wirkung dieser Transformation ist also nur die, daſs zum Divisor der Doppelpunkte der Faktor $\mathfrak{z}_{y-b'}^{m-1}\mathfrak{n}_y^{m-1}$ hinzugetreten ist, und dies besagt nach dem auf S. 394 bewiesenen Satze, daſs die

m Schnittpunkte der Geraden $y - b' = 0$ auf einen einzigen m-fachen Punkt mit getrennten Tangenten ($\xi = \infty$, $y = b'$) und ebenso die m Schnittpunkte der Geraden $y = \infty$ auf einen m-fachen Punkt ($\xi = -\lambda$, $y = \infty$) abgebildet worden sind. In der That hat man auch, wenn man y als unabhängige Variable ansieht, bei ($y = b'$) die m schon in den ersten Gliedern verschiedenen Reihenentwickelungen

$$x = \alpha_\mu + \beta_\mu (y - b') + \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m),$$

woraus

$$\xi = \frac{\alpha_\mu - a - \lambda(b' - b)}{y - b'} + \cdots$$

folgt, und ebenso für ($y = \infty$) die m Reihenentwickelungen

$$x = \gamma_\mu + \frac{\delta_\mu}{y} + \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m),$$

also

$$\xi = -\lambda + \frac{\gamma_\mu - a - \lambda(b' - b)}{y} + \cdots,$$

durch welche die aufgestellte Behauptung aufs neue bewiesen wird. Abgesehen von diesen einfachen hinzutretenden Singularitäten ist der Divisor der Doppelpunkte unverändert geblieben, aber die transformierte Kurve $\Phi = 0$ hat in der That die geforderte Eigenschaft, daſs die Gerade $\xi = 0$ auſserhalb des aufzulösenden vielfachen Punktes in $m + n - k$ voneinander und von P verschiedenen Punkten schneidet.

In dieser Weise fortgehend, kann man also eine gegebene Kurve $F(x, y) = 0$ mit noch so komplizierten Singularitäten durch eine Folge umkehrbarer Substitutionen Punkt für Punkt eindeutig auf eine Kurve mit einfachen Singularitäten abbilden, und es gilt also der Satz:

> Jede Kurve kann durch umkehrbar eindeutige Transformation auf eine andere abgebildet werden, welche nur vielfache Punkte mit getrennten Tangenten besitzt.

§ 2.

Anstatt die Singularitäten der Kurve successive durch passend gewählte Abbildungen aufzulösen, wie das im vorigen Paragraphen geschehen ist, können wir auch ein allgemeineres Verfahren anwenden, indem wir eine ganze Schar von Transformationen betrachten und zeigen, daſs dieselben bis auf gewisse Ausnahmeelemente sämtlich die Eigenschaft haben, die Kurve auf eine andere mit gewöhnlichen Doppelpunkten abzubilden. Diese für die Zwecke der Praxis weniger geeignete Methode hat gegenüber der ersten den Vorzug, die Auflösung der Singularitäten mit einem Schlage zu bewerkstelligen

und einen theoretisch vollkommeneren Einblick in das Wesen der auflösenden Transformationen zu gewähren.

Wir nehmen zu diesem Zwecke das algebraische Gebilde $F(x, y) = 0$ bereits in solcher Gestalt an, dafs die Primfaktoren des Nenners $\mathfrak{n}_x$ der Variabeln x n verschiedenen und unverzweigten Punkten der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ entsprechen, und betrachten alsdann dasjenige Ideal von Funktionen des Körpers $K(x, y)$, welches zu einem Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ gehört, wobei

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

ein ganzer Divisor der Ordnung

$$q = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_h$$

sein soll. Dabei behalten wir uns vor, die Ordnungszahl q hinreichend grofs zu wählen, und nehmen überdies zur Vereinfachung der folgenden Untersuchung an, dafs auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_h$ und ihre in Bezug auf x konjugierten Punkte unverzweigt sind und dafs auch keine zwei von ihnen einander konjugiert sind. Die Idealnormen dieser Primfaktoren

$$N(\mathfrak{P}_1) = x - a_1, \quad N(\mathfrak{P}_2) = x - a_2, \dots N(\mathfrak{P}_h) = x - a_h$$

sind daher alle voneinander verschieden, und an der Stelle $(x = a_i)$ liegt niemals ein Verzweigungspunkt, und es gehört ihr immer nur ein Primteiler $\mathfrak{P}_i$ des Divisors $\mathfrak{Q}$ zu. Es sei nun $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(n)}$ ein Fundamentalsystem jenes Ideals, dann wollen wir aus dem Komplex aller Funktionen η des Ideals

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \dots + u_n \eta^{(n)}, \tag{1}$$

wobei $u_1, u_2, \dots u_n$ ganze Funktionen von x sind, diejenigen aussondern, welche sich im Unendlichen regulär verhalten und also Vielfache des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ sind. Wir werden dann zeigen, dafs, wenn wir die Variable x festhalten und an Stelle der Variabeln y eine Funktion η einführen, das transformierte Gebilde $\Phi(x, \eta) = 0$ im allgemeinen, d. h. bei Vermeidung gewisser spezieller Funktionen η, keine anderen Singularitäten als Doppelpunkte besitzen kann.

Da die Idealnorm des Nenners einer Funktion η des Ideals gleich der Norm von $\mathfrak{Q}$, also

$$N(\mathfrak{n}_\eta) = N(\mathfrak{Q}) = (x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_h)^{\lambda_h} = A(x)$$

ist, so lautet die Gleichung der Funktion η, wenn man die Nenner der Koeffizienten beseitigt:

$$\Phi(x, \eta) = A(x)(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) \dots (\eta - \eta_n) = 0,$$

wo $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ die Konjugierten bedeuten. Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$D = A(x)^{2(n-1)} \prod_{g \gtrless h} (\eta_g - \eta_h) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

$$= A(x)^{n-2} N\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right),$$

also ein Produkt von $n(n-1)$ Linearformen der Gröfsen $u_1, u_2, \ldots u_n$, welches bei Ausführung der Multiplikation ganze Funktionen von x zu Koeffizienten erhält. Andererseits ist nach der schon oft benutzten Formel (4) auf S. 382, welche Funktion η unseres Ideals auch gewählt worden sein mag,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\mathfrak{D} \mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^r \mathfrak{n}_\eta^{n-2}},$$

wobei r ein positiver Exponent ist, der für uns unwesentlich ist. Also erhält man beim Übergang zur Idealnorm, da $N(\mathfrak{n}_\eta) = A(x)$, $N(\mathfrak{n}_x) = 1$ ist,

$$D = A(x)^{n-2} N\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right) = N(\mathfrak{D}) N(\mathfrak{Z}_x).$$

Die Gleichungsdiskriminante D besteht somit, wie wir schon früher erkannt haben, aus zwei Faktoren, von denen der eine die Körperdiskriminante $\Delta = N(\mathfrak{Z}_x)$, also von den Unbestimmten u unabhängig und ein gemeinsamer Teiler der Koeffizienten von D ist, während der andere die Norm des Divisors $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte ist und uns hierdurch über die Beschaffenheit dieses Divisors Aufschlufs giebt. Wir werden nämlich zeigen, dafs dieser zweite Faktor, welcher eine ganze homogene Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_n$ des Grades $n(n-1)$ mit ganzen Funktionen von x als Koeffizienten ist, das Quadrat einer Form U ist, welche keinen von den Unbestimmten u unabhängigen Teiler besitzt und bei Spezialisierung der u im allgemeinen lauter verschiedene Wurzeln erhält. Es können sich also, wenn man den Parametern angemessene individuelle Werte erteilt und zunächst von den Primfaktoren von $\mathfrak{n}_x$ absieht, für die Kurve $\Phi(x, \eta) = 0$ in der That nur Doppelpunkte einstellen, da ja alsdann jedem einzelnen der quadratischen Faktoren von $\frac{D}{\Delta}$ ein und nur ein Doppelpunkt entspricht.

Zum Beweise dieser Thatsache haben wir die Diskriminante D für alle möglichen Linearfaktoren $x - a$ zu untersuchen und unterscheiden hierbei zwei Fälle, je nachdem $x - a$ ein Faktor der Körperdiskriminante Δ ist oder nicht.

1) Wenn $x - a$ ein Faktor der Körperdiskriminante Δ ist, so mögen etwa bei $(x = a)$ drei Punkte $\mathfrak{P}_\alpha, \mathfrak{P}_\beta, \mathfrak{P}_\gamma$ der Riemannschen Fläche übereinander liegen, in denen resp. α, β, γ Blätter der Fläche zusammenhängen. Dann kann man ebenso wie auf S. 207 u. flg. das

Fundamentalsystem $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$ in ein normales $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}$ so umformen, daſs

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \cdots + u_n \eta^{(n)} = v_1 \xi^{(1)} + v_2 \xi^{(2)} + \cdots + v_n \xi^{(n)} = \xi$$

ist, worin $v_1, v_2, \ldots v_n$ lineare Funktionen der u mit unimodularer Determinante sind; und da nach unserer Voraussetzung die Punkte $\mathfrak{P}_\alpha, \mathfrak{P}_\beta, \mathfrak{P}_\gamma$ in dem Divisor $\mathfrak{Q}$ nicht auftreten, so gehören zu dem Fundamentalsystem $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}$ die Ordnungszahlen

	$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(\alpha)}$;	$\xi^{(\alpha+1)}, \xi^{(\alpha+2)}, \ldots \xi^{(\alpha+\beta)}$;	$\xi^{(\alpha+\beta+1)}, \xi^{(\alpha+\beta+2)}, \ldots \xi^{(n)}$
$\mathfrak{P}_\alpha$	$0, 1, \ldots \alpha-1$;	$\infty, \infty, \ldots \infty$;	$\infty, \infty, \ldots \infty$
$\mathfrak{P}_\beta$	$\infty, \infty, \ldots \infty$;	$0, 1, \ldots \beta-1$;	$\infty, \infty, \ldots \infty$
$\mathfrak{P}_\gamma$	$\infty, \infty, \ldots \infty$;	$\infty, \infty, \ldots \infty$;	$0, 1, \ldots \gamma-1$

Also erhalten bis auf beliebig hohe Potenzen von $x-a$ die Konjugierten von ξ folgende Darstellungen:

$$\xi_1 = v_1 + v_2 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots + v_{\alpha-1}(x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

$$\xi_2 = v_1 + \varrho v_2 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots + \varrho^{\alpha-1} v_{\alpha-1}(x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_\alpha = v_1 + \varrho^{\alpha-1} v_2 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots + \varrho^{(\alpha-1)^2} v_{\alpha-1}(x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

$$\left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}\right)$$

$$\xi_{\alpha+1} = v_{\alpha+1} + v_{\alpha+2}(x-a)^{\frac{1}{\beta}} + \cdots + v_{\alpha+\beta}(x-a)^{\frac{\beta-1}{\beta}}$$

$$\xi_{\alpha+2} = v_{\alpha+1} + \sigma v_{\alpha+2}(x-a)^{\frac{1}{\beta}} + \cdots + \sigma^{\beta-1} v_{\alpha+\beta}(x-a)^{\frac{\beta-1}{\beta}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{\alpha+\beta} = v_{\alpha+1} + \sigma^{\beta-1} v_{\alpha+2}(x-a)^{\frac{1}{\beta}} + \cdots + \sigma^{(\beta-1)^2} v_{\alpha+\beta}(x-a)^{\frac{\beta-1}{\beta}}$$

$$\left(\sigma = e^{\frac{2\pi i}{\beta}}\right)$$

$$\xi_{\alpha+\beta+1} = v_{\alpha+\beta+1} + v_{\alpha+\beta+2}(x-a)^{\frac{1}{\gamma}} + \cdots + v_n(x-a)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\xi_{\alpha+\beta+2} = v_{\alpha+\beta+1} + \tau v_{\alpha+\beta+2}(x-a)^{\frac{1}{\gamma}} + \cdots + \tau^{\gamma-1} v_n(x-a)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_n = v_{\alpha+\beta+1} + \tau^{\gamma-1} v_{\alpha+\beta+2}(x-a)^{\frac{1}{\gamma}} + \cdots + \tau^{(\gamma-1)^2} v_n(x-a)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\left(\tau = e^{\frac{2\pi i}{\gamma}}\right).$$

Berechnen wir nun die Diskriminante D, so verfahren wir in der Art, dafs wir zuerst das Differenzenprodukt der ersten α Konjugierten $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\alpha$ bilden; jedes der $\alpha(\alpha-1)$ Glieder dieses Produktes ist, wenn wir uns auf das erste Glied beschränken, von der Form

$$c v_2 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}},$$

worin c jetzt und in der Folge eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Ebenso liefern die Faktoren der beiden aus $\xi_{\alpha+1}, \dots \xi_{\alpha+\beta}$, resp. aus $\xi_{\alpha+\beta+1}, \dots \xi_n$ gebildeten Differenzenprodukte Anfangsglieder der Form

$$c v_{\alpha+2} (x-a)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \text{resp.} \quad c v_{\alpha+\beta+2} (x-a)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Wenn man sodann eine der α ersten Konjugierten von einer der folgenden β abzieht, so ist das Anfangsglied $v_1 - v_{\alpha+1}$, und ebenso geben Differenzen wie $\xi_1 - \xi_{\alpha+\beta+1}$, resp. wie $\xi_{\alpha+1} - \xi_{\alpha+\beta+1}$ Anfangsglieder der Form

$$v_1 - v_{\alpha+\beta+1}, \quad \text{resp.} \quad v_{\alpha+1} - v_{\alpha+\beta+1}.$$

Da ferner die ganze Funktion $A(x)$ nach den von uns getroffenen Voraussetzungen den Faktor $x-a$ nicht enthält, so ergiebt sich für die Diskriminante

$$D = c(x-a)^{(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)} v_2^{\alpha(\alpha-1)} v_{\alpha+2}^{\beta(\beta-1)} v_{\alpha+\beta+2}^{\gamma(\gamma-1)} \times$$
$$(v_1 - v_{\alpha+1})^{2\alpha\beta} (v_1 - v_{\alpha+\beta+1})^{2\alpha\gamma} (v_{\alpha+1} - v_{\alpha+\beta+1})^{2\beta\gamma}$$
$$+ \text{ höheren Potenzen von } x-a.$$

Diese Formel ist zunächst unter der Annahme abgeleitet, dafs jede der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma > 1$ ist; sie gilt aber auch in dem Falle, dafs eine derselben gleich eins ist, da ja, wenn z. B. $\alpha = 1$ ist, v_2 den Exponenten Null erhält und also wirklich, wie es sein mufs, aus dem Produkt ganz fortfällt.

Da die Körperdiskriminante Δ, wie wir wissen, den Faktor $(x-a)$ ebenfalls in der Multiplizität $(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)$ enthält, so besitzt die Gleichungsdiskriminante D alle diese Faktoren in gleicher Ordnung wie Δ, und bei Spezialisierung der Unbestimmten u oder v ist es, damit keiner dieser Faktoren in einer höheren Potenz aus der Diskriminante heraustritt, notwendig und hinreichend, den folgenden Ungleichungen zu genügen:

$$v_1 \not\equiv v_{\alpha+1}, \quad v_1 \not\equiv v_{\alpha+\beta+1}, \quad v_{\alpha+1} \not\equiv v_{\alpha+\beta+1} \quad (\text{mod. } x-a),$$

und wenn resp. $\alpha, \beta, \gamma > 1$ ist, den weiteren Ungleichungen

$$v_2 \not\equiv 0, \quad v_{\alpha+2} \not\equiv 0, \quad v_{\alpha+\beta+2} \not\equiv 0 \quad (\text{mod. } x-a).$$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so erhält das Gebilde bei $x = a$ keine Singularität.

2) Wenn $x-a$ nicht in der Körperdiskriminante enthalten ist, so ersetzen wir ebenfalls das Fundamentalsystem $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$ durch ein normales $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}$. Da nun der Zähler von $x-a$ aus n verschiedenen Primteilern besteht und nach Voraussetzung entweder einer oder gar keiner von diesen in dem Divisor $\mathfrak{Q}$ enthalten ist, so hat das System der Ordnungszahlen die Form

	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)} \ldots \xi^{(n)}$
$\overline{\mathfrak{P}}_1$	$-\lambda$	∞	$\infty \ldots \infty$
$\overline{\mathfrak{P}}_2$	∞	0	$\infty \ldots \infty$
$\overline{\mathfrak{P}}_3$	∞	∞	$0 \ldots \infty$
. .	. .	. .	. . . . .
$\overline{\mathfrak{P}}_n$	∞	∞	$\infty \ldots 0$

wobei λ einfach die Ordnungszahl von $A(x)$ für $x=a$ ist; denn wenn $x-a$ nicht in $A(x)$ vorkommt, so ist $\lambda=0$, wenn aber $x-a$ ein Faktor von $A(x)$ ist, so ist λ positiv und gleich dem zugehörigen Exponenten von $x-a$. Folglich ist bis auf Glieder beliebig hoher Ordnung in $x-a$

$$\xi_1=(x-a)^{-\lambda} v_1, \quad \xi_2=v_2, \quad \xi_3=v_3, \ldots \xi_n=v_n.$$

Ferner ist, wenn E eine Einheitsfunktion für die Stelle $x=a$ bedeutet,

$$D=E\cdot(x-a)^{2\lambda(n-1)}\prod_{g==h}(\xi_g-\xi_h) \qquad (g, h=1, 2, \ldots n),$$

also erhält man durch Einsetzen, wenn man die Potenzen mit negativem Exponenten von $x-a$ beseitigt, bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$D=E(x\,|\,a)\cdot\left(v_1-(x-a)^{\lambda} v_2\right)^2\left(v_1-(x-a)^{\lambda} v_3\right)^2 \ldots \left(v_1-(x-a)^{\lambda} v_n\right)^2 \times$$
$$(v_2-v_3)^2(v_2-v_4)^2 \ldots (v_2-v_n)^2(v_3-v_4)^2 \ldots (v_{n-1}-v_n)^2.$$

Diese Gleichung zeigt, daſs bei unbestimmten $v_1, v_2, \ldots v_n$ die Diskriminante D den Faktor $x-a$ nicht enthält. Bei Spezialisierung der Gröſsen $v_1, v_2, \ldots v_n$ erhält D an einzelnen Stellen $(x=a)$ allerdings quadratische Faktoren, wenn nämlich z. B. v_2-v_3 oder $v_1-(x-a)^{\lambda} v_2$ durch $x-a$ teilbar wird; aber dann wird im allgemeinen eben nur ein Faktor $(x-a)^2$ und keine höhere Potenz in D auftreten können, weil in $\sqrt{D}$ nur ein Faktor und dieser nur durch die erste Potenz von $x-a$ teilbar wird. Die Kurve erhält somit, wenn man die Funktionen $v_1, v_2, \ldots v_n$ geeigneten Ungleichheitsbedingungen unterwirft, nur Doppelpunkte an solchen durchweg ins Endliche fallenden Ausnahmestellen. Da die Nullpunkte der ganzen Funktion von x:

$$U=\sqrt{\frac{D}{\Delta}},$$

die Stellen $(x = a)$ bestimmen, an welche die Doppelpunkte fallen, so wäre es, damit diese Stellen alle ungleich ausfallen, zur wirklichen Aufstellung jener Ungleichheitsbedingungen erforderlich, in Beziehung auf x die Diskriminante der Funktion U, welche nicht identisch verschwinden kann, zu bilden und die Gröſsen $u_1, u_2, \ldots u_n$ so als ganze Funktionen von x zu bestimmen, daſs diese zweite Diskriminante einen von Null verschiedenen Wert erhält.

Das Ergebnis dieser Untersuchung ist hiernach folgendes: Die Diskriminante D der sogenannten Fundamentalgleichung $\Phi(x, \eta) = 0$ des Gebildes $F(x, y) = 0$ besitzt die Zerlegung

$$D = \Delta U^2,$$

worin Δ die Körperdiskriminante bedeutet, U aber eine ganze homogene Funktion der Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$ von der Dimension $\frac{1}{2} n(n-1)$ ist, deren Koeffizienten ganze Funktionen von x ohne gemeinsamen Teiler sind, und welche, als Funktion von x betrachtet, bei unbestimmten u lauter einfache Wurzeln besitzt und daher auch bei Spezialisierung diese Eigenschaft behalten kann. Hieraus folgt, daſs die Bildkurve $\Phi(x, \eta) = 0$ auſserhalb der Geraden $x = \infty$ nur Doppelpunkte als Singularitäten hat. Es bleibt also schlieſslich nur noch übrig, das Verhalten der Kurve in den Schnittpunkten mit der Geraden $x = \infty$ zu regeln. Hier nun können und wollen wir es einfach so einrichten, daſs die Gerade $x = \infty$ die Kurve $\Phi(x, \eta) = 0$ in n verschiedenen gewöhnlichen Punkten $\eta = \beta_i$ mit endlicher Ordinate β_i schneidet. Damit eine derartige Verfügung möglich sei, muſs es innerhalb des Ideals $I\left(\frac{1}{\mathfrak{Q}}\right)$ Funktionen geben, welche nicht bloſs für das zu endlichen Werten von x gehörige, sondern für das g a n z e Gebiet $\mathfrak{R}_x$ Vielfache des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$, also von der Form $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Q}}$ sind, wo $\mathfrak{G}$ einen ganzen Divisor bedeutet. Zur Erreichung dieses Zieles müssen wir aber vor allem Sorge tragen, daſs die Ordnungszahlen des Fundamentalsystems

$$\eta^{(1)}, \quad \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$$

für $x = \infty$ s ä m t l i c h nicht negativ ausfallen; denn sonst könnte es eintreten, daſs, wenn wir innerhalb des Ideals diejenigen Funktionen aussondern, welche sich im Unendlichen regulär verhalten, einige der Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ gleich Null gesetzt werden müssen und daſs diese Gleichungen in Widerspruch mit den vorher aufgestellten Ungleichheiten treten. Ist aber diese Bedingung erst erfüllt, so werden wir es auch stets erzielen können, daſs die Anfangsglieder $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ der n Reihenentwickelungen der Funktion η bei $(x = \infty)$, also auch die Schnittpunkte der Geraden $x = \infty$ mit der Kurve alle verschieden sind.

Wir genügen aber, wie wir nun zeigen wollen, obiger Forderung einfach dadurch, dafs wir die Ordnungszahl q des Divisors $\mathfrak{Q}$ gröfser als die Verzweigungszahl w_x der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ annehmen. Es sei nämlich das Fundamentalsystem $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$ für $x = \infty$) normal und besitze an dieser Stelle die Ordnungszahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$. Ist nun $\check{\eta}^{(1)}, \check{\eta}^{(2)}, \ldots \check{\eta}^{(n)}$ das komplementäre System, so ist dieses nach dem Satze V auf S. 231 ein Fundamentalsystem für den Divisor $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}_x}$ und hat die Ordnungszahlen $-\sigma_1, -\sigma_2, \ldots -\sigma_n$. Da aber die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ gröfser als w_x, also der Divisor $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}_x}$ von positiver Ordnung ist, so können sich die Funktionen $\check{\eta}^{(1)}, \check{\eta}^{(2)}, \ldots \check{\eta}^{(n)}$ im Unendlichen nicht regulär verhalten, weil sie sonst mehr Nullstellen wie Pole erhalten würden, und folglich sind $-\sigma_1, -\sigma_2, \ldots -\sigma_n$ negative, also $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ positive Zahlen. Bilden wir jetzt diejenigen Funktionen des Ideals

$$\eta = u_1 \eta^{(1)} + u_2 \eta^{(2)} + \cdots + u_n \eta^{(n)},$$

welche im Unendlichen regulär sind, so ergiebt sich als Dimension dieser Schar nach S. 224 und S. 226:

$$(\sigma_1 + 1) + (\sigma_2 + 1) + \cdots + (\sigma_n + 1) = q - \frac{w}{2} + n > \frac{w}{2} + n.$$

Wir können also für $u_1, u_2, \ldots u_n$ irgend welche ganze Funktionen resp. von den Graden $\sigma_1 + 1, \sigma_2 + 1, \ldots \sigma_n + 1$ nehmen, und da das System $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$ für $x = \infty$ normal, nach dem Satze auf S. 167 also die Determinante $|a_{ik}|$ der Anfangskoeffizienten der konjugierten Reihenentwickelungen der n Funktionen von Null verschieden ist, so lassen sich die Koeffizienten der höchsten Glieder in $u_1, u_2, \ldots u_n$ stets so wählen, dafs die Anfangsglieder $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ der Reihenentwickelungen von η beliebige vorgegebene, also auch voneinander verschiedene Gröfsen werden. Damit ist unsere Behauptung vollständig erwiesen. Es gilt also der wichtige, zuerst von Kronecker bewiesene Satz:

> Jede Kurve $F(x, y) = 0$ kann durch eine Transformation $\eta = \Phi(x, y)$, bei welcher die eine Variabele ungeändert bleibt, umkehrbar eindeutig auf eine Kurve $\Phi(x, \eta) = 0$ abgebildet werden, welche nur im Endlichen liegende Doppelpunkte als Singularitäten besitzt.

§ 3.

Nachdem wir in den vorhergehenden Paragraphen untersucht haben, in welcher Weise für eine beliebig gegebene Kurve $F(x, y) = 0$ der Divisor der Doppelpunkte ermittelt und reduziert werden kann, wollen wir nunmehr erörtern, welche Bedeutung diesem Begriffe in

der Theorie der algebraischen Kurven zukommt, und einen für alle Anwendungen der Theorie der algebraischen Funktionen auf Kurven grundlegenden Satz aufstellen.

Geht man von dem geometrischen Bilde der Gleichung $F(x, y) = 0$ aus, so bieten sich als nächstes und unmittelbarstes Objekt der Untersuchung, wie schon auf S. 369 bemerkt wurde, die ganzen Funktionen von x und y dar; denn eine solche ganze Funktion $G(x, y)$ stellt, gleich Null gesetzt, eine zweite Kurve dar und giebt also in Verbindung mit der Gleichung $F = 0$ ein Schnittpunktesystem auf der Grundkurve. Wir werden so darauf geführt, innerhalb des Funktionenkörpers $K(x, y)$ dasjenige engere Gröfsengebiet auszusondern, welches aus ganzen Funktionen von x und y gebildet wird; ein solches Gebiet bezeichnen wir mit Herrn Hilbert als einen in dem Funktionenkörper enthaltenen Funktionenring. Nun hat eine ganze Funktion $G(x, y)$ offenbar die Eigenschaft, nur an den Stellen unendlich zu werden, in denen entweder x oder y unendlich ist; es entsteht also die Frage, ob oder inwieweit diese Eigenschaft für die in dem Körper enthaltenen ganzen Funktionen von x und y charakteristisch ist und zur Definition verwendet werden kann. Es ist aber von vornherein ersichtlich, dafs es eine unstatthafte Umkehrung des Satzes wäre zu behaupten, dafs jede Funktion des Körpers, welche nur für x oder $y = \infty$ Pole besitzt, sich als ganze Funktion von x und y müsse darstellen lassen; denn es kann sehr wohl eintreten, dafs eine solche Funktion bei ihrer Darstellung in x und y notwendig in gebrochener Form erscheint. Betrachten wir z. B. die kubische Parabel $y^2 = px^3$, so hat offenbar die Funktion $\frac{y}{x}$ jene Eigenschaft, da sie nur einen einzigen Pol (erster Ordnung) bei $x = \infty$ besitzt, und sie ist offenbar doch, auch wenn man die Kurvengleichung selbst zu Hilfe nimmt, niemals als ganze Funktion von x und y darstellbar. Daher ist es wichtig, Bedingungen kennen zu lernen, unter denen man sicher sein kann, dafs eine Gröfse des Körpers als ganze Funktion von x und y darstellbar ist und also dem Ringe angehört; ein solches System von hinreichenden, wenn auch nicht notwendigen Bedingungen wird aber durch folgenden wichtigen Satz geliefert:

> Wenn in der Gleichung $F(x, y) = 0$ x bis zum m^{ten}, y bis zum n^{ten} Grade aufsteigt und $\mathfrak{n}_x$ und $\mathfrak{n}_y$ die Nennerdivisoren von x und y, $\mathfrak{D}$ aber den Divisor der Doppelpunkte bedeutet, so ist jede Funktion des Körpers $K(x, y)$, welche ein Vielfaches des Divisors $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{n}_x^{m-1}\,\mathfrak{n}_y^{n-1}}$ ist, als ganze Funktion von x und y darstellbar.

Wesentlich in diesem Satze ist also vor allem die Voraussetzung, daſs der Zähler der Funktion den Divisor der Doppelpunkte enthalten soll; auſserdem haben wir, um den Satz in den Grenzen seiner späteren Anwendungen zu halten, eine weitere, aber nebensächliche Voraussetzung über die Ordnung des Unendlichwerdens der Funktion für $(x=\infty)$ oder $(y=\infty)$ hinzugefügt.

Beim Beweise des Satzes haben wir öfter von einer dem Körper angehörigen Funktion $\varphi(x,y)$ die Summe der konjugierten Gröſsen

$$S(\varphi)=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n$$

zu bilden. Für diese Gröſse, welche nach S. 117 die Spur der Funktion φ heiſst und stets eine rationale Funktion von x ist, gelten nun einige einfache Gesetze, von denen wir jetzt und später Gebrauch machen und welche wir deshalb dem Beweise der vorher ausgesprochenen Behauptung voraufschicken.

Hat man bei der Divisorenzerlegung

$$\varphi=\frac{\mathfrak{z}_\varphi}{\mathfrak{n}_\varphi},$$

so ist der Nenner der Spur $S(\varphi)$ im allgemeinen offenbar die Idealnorm von $\mathfrak{n}_\varphi$, weil diese ja, wenn man von den nach $(x=\infty)$ fallenden Punkten absieht, das Produkt aller Konjugierten von $\mathfrak{n}_\varphi$ ist. In besonderen Fällen erhält man aber viel einfachere Resultate, denn es gilt der folgende Satz, der übrigens auch später für den Beweis des Abelschen Theorems von grundlegender Bedeutung ist:

Wenn der Nenner von φ ein Teiler des Verzweigungsdivisors $\mathfrak{Z}_x$ ist, so ist die Spur von φ eine Konstante.

Denn ist

$$\varphi=\frac{\mathfrak{z}_\varphi}{\mathfrak{Z}_x},$$

so gelten in einem α-blättrigen Verzweigungspunkte $\mathfrak{V}_\alpha$ der Riemannschen Fläche Reihenentwickelungen der Form:

$$\varphi_1=\frac{c_{\alpha-1}}{(x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}+\frac{c_{\alpha-2}}{(x-a)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}}+\cdots+\frac{c_1}{(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}}+\cdots$$

$$\varphi_2=\frac{c_{\alpha-1}}{\omega^{\alpha-1}(x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}+\frac{c_{\alpha-2}}{\omega^{\alpha-2}(x-a)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}}+\cdots+\frac{c_1}{\omega(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}}+\cdots$$

$$\varphi_3=\frac{c_{\alpha-1}}{\omega^{2(\alpha-1)}(x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}+\frac{c_{\alpha-2}}{\omega^{2(\alpha-2)}(x-a)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}}+\cdots+\frac{c_1}{\omega^2(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_\alpha=\frac{c_{\alpha-1}}{\omega^{(\alpha-1)(\alpha-1)}(x-a)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}+\frac{c_{\alpha-2}}{\omega^{(\alpha-1)(\alpha-2)}(x-a)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}}+\cdots+\frac{c_1}{\omega^{\alpha-1}(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}}+\cdots$$

wobei ω eine primitive α^{te} Einheitswurzel bedeutet. Da nun für jede ganze Zahl r, die nicht durch α teilbar ist,

$$1 + \omega^r + \omega^{2r} + \cdots + \omega^{(\alpha-1)r} = 0$$

ist, so fällt in der Summe $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\alpha$ der Hauptteil der Entwickelung fort. Also mufs auch, wenn bei $(x = a)$ mehrere Punkte der Riemannschen Fläche übereinander liegen, die Spur

$$S(\varphi) = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$$

eine bei $(x = a)$ reguläre Funktion sein; dies gilt aber für jede beliebige endliche oder unendlich ferne Stelle $(x = a)$, da man für unendlich ferne Punkte nur $x - a$ durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen hat, folglich ist $S(\varphi)$ eine Konstante, was zu beweisen war.

Ganz dasselbe Resultat fliefst auch ohne Anwendung von Reihenentwickelungen aus der einfachen Erwägung, dafs die Funktion φ nach Multiplikation mit $x - a$, resp. mit $\frac{1}{x}$ für die Primfaktoren von $\mathfrak{z}_{x-a}$, resp. von $\mathfrak{n}_x$ positive Ordnungszahlen erhält. Folglich hat auch die rationale Funktion

$$S\big((x-a)\varphi\big) = (x-a)\,S(\varphi), \quad \text{resp.} \quad S\left(\frac{1}{x}\,\varphi\right) = \frac{1}{x}\,S(\varphi)$$

für $(x = a)$, resp. $(x = \infty)$ eine positive, $S(\varphi)$ also an jeder beliebigen Stelle eine nicht negative Ordnungszahl. Folglich ist $S(\varphi) = \text{const.}$

Dieser Satz läfst sich leicht in folgender Art erweitern:

> Wenn der Nenner der Funktion φ das Produkt aus dem Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$ und einer positiven Potenz von $\mathfrak{n}_x$ ist, so dafs
>
> $$\varphi = \frac{\mathfrak{z}_\varphi}{\mathfrak{Z}_x \mathfrak{n}_x^\mu}$$
>
> ist, so ist $S(\varphi)$ eine ganze Funktion μ^{ten} Grades von x.

Denn zunächst trifft für alle endlichen Werte von x die gleiche Deduktion wie vorher zu, und folglich hat $S(\varphi)$ im Endlichen keine Pole und ist also eine ganze Funktion. Der Grad dieser ganzen Funktion ist aber notwendig gleich μ, weil die Funktion

$$\frac{\varphi}{x^\mu} = \frac{\mathfrak{z}_\varphi}{\mathfrak{Z}_x\,\mathfrak{z}_x^\mu}$$

für $(x = \infty)$ die Überlegung des vorigen Absatzes gestattet und sich hierdurch als regulär für diese Stelle erweist.

Nach dieser Vorbereitung schreiten wir zu dem Beweise des Hauptsatzes und gehen hierbei von der Überlegung aus, dafs jede

Funktion Ψ des Körpers auf eine und nur eine Weise in die Form gesetzt werden kann:

$$\Psi = r_0 + r_1 y + r_2 y^2 + \cdots + r_{n-1} y^{n-1},$$

wobei $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ rationale Funktionen von x bedeuten; es ist also nur zu beweisen, dafs unter der angegebenen Voraussetzung die Funktionen r_h ganz werden. Zur Bestimmung derselben wenden wir nun, wie auf S. 233, die Lagrangesche Interpolationsformel an, welche, wenn u eine Unbestimmte und $F(x, y) = 0$ die Kurvengleichung bedeutet, ergiebt:

$$r_0 + r_1 u + r_2 u^2 + \cdots + r_{n-1} u^{n-1} = \frac{\Psi_1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1} \frac{F(x, u)}{u - y_1} + \cdots + \frac{\Psi_n}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_n} \frac{F(x, u)}{u - y_n},$$

wobei $\Psi_1, \ldots \Psi_n$ die Konjugierten der Funktion Ψ sind. Setzen wir also

$$1) \qquad \varphi = \frac{\Psi}{\frac{\partial F}{\partial y}} \frac{F(x, u)}{u - y},$$

so ist für beliebiges u:

$$r_0 + r_1 u + \cdots + r_{n-1} u^{n-1} = S(\varphi).$$

Wir haben nun zu zeigen, dafs, falls $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor und

$$2) \qquad \Psi = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}{\mathfrak{n}_x^{m-1}\, \mathfrak{n}_y^{n-1}}$$

ist, die rationale Funktion $S(\varphi)$ für unbestimmtes u eine ganze Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist. Hierdurch ist unser Satz bewiesen, da dann notwendig auch alle Koeffizienten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ ganze Funktionen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades sind. Zu diesem Zwecke stellen wir den zu φ gehörigen Divisor dar und betrachten zunächst den darin auftretenden Faktor

$$\frac{F(x, u)}{u - y}.$$

Da der Zähler eine ganze Funktion m^{ten} Grades von x, der Nenner eine ganze Funktion ersten Grades von y ist, so tritt im Zähler $\mathfrak{n}_y$, im Nenner $\mathfrak{n}_x^m$ auf. Aufser bei $(x = \infty)$ könnte obige Funktion noch bei $y = u$ unendlich werden; dafs das aber nicht der Fall ist, erkennt man, wenn man berücksichtigt, dafs $F(x, y) = 0$ ist und daher unser Quotient auch in die nennerfreie Form gesetzt werden kann:

$$\frac{F(x, u)}{u - y} = \frac{F(x, u) - F(x, y)}{u - y} = a_n(x)\,(u^{n-1} + u^{n-2} y + \cdots + y^{n-1})$$
$$+ a_{n-1}(x)\,(u^{n-2} + \cdots + y^{n-2}) + \cdots + a_2(x)\,(u + y) + a_1(x),$$

aus welcher hervorgeht, daſs die Funktion bei $y = u$ endlich bleibt. Daher erhält die Funktion die Divisorendarstellung

$$\frac{F(x, u)}{u - y} = \frac{\mathfrak{n}_y \mathfrak{H}}{\mathfrak{n}_x^m},$$

wo $\mathfrak{H}$ ein ganzer Divisor ist. Tragen wir also die Divisorengleichung (2) und die nach Formel (4) auf S. 382 für $\frac{\partial F}{\partial y}$ geltende Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D} \mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^m \mathfrak{n}_y^{n-2}}$$

in (1) ein, so erhalten wir

$$\varphi = \frac{\mathfrak{G} \mathfrak{H}}{\mathfrak{Z}_x \mathfrak{n}_x^{m-1}}.$$

Nach dem voraufgeschickten Hilfssatze ist also $S(\varphi)$ eine ganze Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von x, und damit ist unser Satz bewiesen. Man kann ihn noch leicht in der Weise erweitern, daſs man etwas allgemeinere Voraussetzungen über die Ordnung des Unendlichwerdens der Funktion Ψ einführt. Es gilt nämlich der Satz:

> Wenn $\mu < m$ und $\nu < n$ ist, so ist eine Funktion Ψ des Körpers, welche ein Vielfaches des Divisors $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{n}_x^\mu \mathfrak{n}_y^\nu}$ ist, eine ganze Funktion von x und y, welche in x den Grad μ, in y den Grad ν hat.

Denn sind u und v zwei unbestimmte Gröſsen, so hat man nach dem vorher bewiesenen Satze:

$$\Psi (x-u)^{m-1-\mu} (y-v)^{n-1-\nu} = r_0 + r_1 y + \cdots + r_{n-1} y^{n-1},$$

wo $r_0, r_1, \dots r_{n-1}$ ganze Funktionen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Das ist aber bei unbestimmten u, v nur möglich, wenn die Funktion rechter Hand identisch den Faktor $(x-u)^{m-1-\mu}(y-v)^{n-1-\nu}$ enthält; nach Weghebung desselben findet man

$$\Psi = \bar{r}_0 + \bar{r}_1 y + \cdots + \bar{r}_\nu y^\nu,$$

wo $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots \bar{r}_\nu$ ganze Funktionen μ^{ter} Ordnung von x sind, was zu beweisen war.

Zufolge dieses Satzes ist es, wenn man von kurventheoretischen Vorstellungen ausgeht, überall möglich, sich auf den geschlossenen Kreis derjenigen Gröſsen des Körpers zu beschränken, welche sich als ganze Funktionen von x und y darstellen lassen und deren Zählerdivisor sich daher als das volle Schnittpunktsystem einer Kurve

interpretieren läfst. Handelt es sich z. B. um die Bestimmung der p Integrale erster Gattung

$$u_1 = \int \varphi^{(1)} dx, \quad u_2 = \int \varphi^{(2)} dx, \ldots u_p = \int \varphi^{(p)} dx,$$

so wissen wir aus dem Früheren (S. 300), dafs eine solche Funktion $\varphi^{(i)}$ ein Vielfaches des Divisors $\frac{\mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{z}_x}$ ist. Bilden wir also das Produkt

$$\varphi^{(i)} \frac{\partial F}{\partial y} = \psi^{(i)},$$

so ist jede dieser Funktionen ein Vielfaches des Divisors $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{n}_x^{m-2}\,\mathfrak{n}_y^{n-2}}$. Auf Grund des vorher aufgestellten Satzes ist hiernach $\psi^{(i)}$ eine ganze Funktion von x und y, welche in x den Grad $m-2$, in y den Grad $n-2$ hat; es ist also

$$\varphi = \frac{\Sigma a_{gh} x^g y^h}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, 2, \ldots m-2 \\ h = 0, 1, 2, \ldots n-2 \end{pmatrix}.$$

Dabei mufs also die Zählerkurve $\Sigma a_{gh} x^g y^h = 0$ noch der Forderung genügen, dafs sie durch die Doppelpunkte der Kurve $F = 0$ hindurchgeht, und da, wie wir wissen, genau p linear unabhängige Integrale existieren, so sind diese den $(n-1)(m-1)$ Koeffizienten a_{gh} auferlegten Bedingungen nur

$$(n-1)(m-1) - p = d$$

linearen unabhängigen Gleichungen äquivalent. Während also die Ordnung des Divisors $\mathfrak{D}$ gleich $2d$ ist, reduziert sich die Anzahl der von den Koeffizienten a_{gh} zu erfüllenden linearen Gleichungen auf die Hälfte d.

Eine derartige Kurve, wie sie hier im Zähler auftritt, bezeichnet man als eine der Grundkurve $F(x, y) = 0$ adjungierte Kurve. Sie ist durch die Bedingung charakterisiert, dafs sie durch die Doppelpunkte der Grundkurve hindurchgeht, wobei im Falle höherer Singularitäten diese Forderung allerdings erst durch die früheren Auseinandersetzungen ihre volle Bestimmung erfährt; eine zur Grundkurve adjungierte Kurve ist nämlich eine solche, für welche der dem Schnittpunktesystem zugeordnete Divisor durch den Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte teilbar ist.

Die Anzahl der Schnittpunkte, welche eine derartige adjungierte Kurve mit der Grundkurve gemein hat, ist, da x im Grade $m-2$, y im Grade $n-2$ auftritt, gleich

$$(m-2)n + (n-2)m = 2(m-1)(n-1) - 2 = 2d + 2p - 2.$$

Von diesen entfallen $2d$ Schnittpunkte auf den Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte, während die Kurvenschar, wie wir nun noch zeigen wollen,

andere feste Schnittpunkte nicht besitzt; eine derartige adjungierte Kurve besitzt also $2p-2$ freie oder variable Schnittpunkte mit der Grundkurve. Die letzten $2p-2$ Schnittpunkte der Kurvenschar mit der Grundkurve entsprechen nämlich genau den $2p-2$ Primdivisoren der Differentiale erster Gattung. Denn ist

$$\Psi = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{W}}{\mathfrak{n}_x^{m-2}\,\mathfrak{n}_y^{n-2}},$$

wo $\mathfrak{W}$ der ganze Divisor der Ordnung $2p-2$ ist, der den freien Schnittpunkten der Kurve $\Psi = 0$ entspricht, so ist zufolge des Satzes auf S. 384 der zu dem Differentiale

$$\frac{\Psi}{\frac{\partial F}{\partial y}}\,dx$$

gehörige Divisor gleich $\mathfrak{W}$; der Divisor $\mathfrak{W}$ ist also ein ganzer Divisor der Klasse W der Differentiale, und da diese primitiv ist (S. 308), so besitzt die Schar der adjungierten Kurven auch keine weiteren festen Schnittpunkte mit der Grundkurve, was zu beweisen war.

§ 4.

Die im Vorhergehenden angewendeten Methoden zur Auflösung der Singularitäten einer gegebenen Kurve beruhen sämtlich darauf, dafs man die Kurve durch eine umkehrbare Transformation auf eine andere abbildet. Derartige birationale Transformationen allgemeinster Beschaffenheit spielen nicht blofs in der Theorie der Funktionen, sondern auch in der der höheren algebraischen Kurven eine überaus wichtige Rolle. Wir wollen daher nunmehr die geometrische Bedeutung derartiger umkehrbar eindeutiger Abbildungen in ihren Grundzügen erörtern.

Wenn man eine gegebene Kurve $F(x, y) = 0$ durch eine Transformation der Form

$$\xi = r(x, y), \quad \eta = r_1(x, y),$$

welche umkehrbar ist und somit die Auflösung

$$x = R(\xi, \eta), \quad y = R_1(\xi, \eta)$$

besitzt, in eine andere $\Phi(\xi, \eta) = 0$ überführt, so ist eine derartige Abbildung die allgemeinste, durch welche algebraische Kurven eindeutig aufeinander bezogen werden können. Bei einer solchen ändern sich, wie wir gesehen haben, im allgemeinen die Gradzahlen m und n, die Singularitäten der Kurve und überhaupt die meisten Anzahlen und Besonderheiten, welche der Kurve im gewöhnlichen Sinne eigentümlich sind. Es giebt aber trotzdem eine

Anzahl von Eigenschaften, welche auch durch derartige allgemeinste Abbildungen nicht zerstört werden können, und gerade diesen bei beliebiger Transformation invarianten Elementen der Kurve wird naturgemäfs eine ganz besonders wichtige Rolle in der Kurventheorie zufallen. Nach unseren früheren Auseinandersetzungen besitzt z. B. die ursprüngliche und die Bildkurve stets dasselbe Geschlecht, und es erweist sich also vor allem das Geschlecht der Kurve als eine invariante Anzahl. Wenn wir ferner durch die Doppelpunkte der Kurve $F = 0$ eine adjungierte Kurve

$$\Psi = \sum_{g=0}^{m-2} \sum_{h=0}^{n-2} a_{gh} x^g y^h = 0$$

hindurchlegen, so schneidet dieselbe nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen die Grundkurve aufser in den Doppelpunkten noch in $2p - 2$ freien Punkten, welche den Primdivisoren eines zu der Kurve gehörigen Differentialteilers erster Gattung entsprechen. Bildet man daher die Kurve durch eine birationale Transformation ab, so entsprechen diesen $2p - 2$ Punkten ebenso viele Punkte der Bildkurve, und da der Differentialteiler hierbei ganz unverändert bleibt, so müssen auf ihr solche $2p - 2$ Punkte ebenfalls mit den Doppelpunkten auf einer adjungierten Kurve liegen. In diesem Sinne entsprechen also den zu $F = 0$ adjungierten Kurven die adjungierten der Kurve $\Phi = 0$, so dafs sich die Schar dieser adjungierten Kurven oder vielmehr der von ihnen ausgeschnittenen Schnittpunktsysteme bei beliebiger Transformation invariant erhält.

Die Beziehung zwischen den beiden Kurven ist, wie oftmals hervorgehoben, im allgemeinen eine eindeutige. Nur in den singulären Stellen der Kurven geht diese Eindeutigkeit verloren; denn da zu einem k-fachen Punkte der Kurve $F = 0$ k Primdivisoren gehören, so können einem solchen Punkte mehrere der Bildkurve entsprechen; eben diese Eigenschaft war es, welche dazu benutzt werden konnte, eine derartige Singularität in k einfache Punkte der Bildkurve aufzulösen.

Die hier auseinandergesetzten Prinzipien sind nicht auf ebene Kurven beschränkt, sondern sie können unmittelbar auf Raumkurven übertragen werden. Ist nämlich $z = \chi(x, y)$ irgend eine Funktion des Körpers, und trägt man in jedem Punkte der Kurve $F(x, y) = 0$ die zugehörige z-Koordinate auf, so gehört zu jedem Punkte der ebenen Kurve $F = 0$ im allgemeinen ein und nur ein Punkt einer Raumkurve, welche so auf die ebene Kurve eindeutig bezogen ist. Noch etwas

allgemeiner ist folgende Bestimmung: Ist $F(x, y) = 0$ die Grundkurve, so seien

$$\xi = \Phi(x, y), \quad \eta = \Psi(x, y), \quad \zeta = X(x, y)$$

irgend drei Funktionen des Körpers, welche die Eigenschaft haben, dafs zu einem Wertsystem (ξ, η, ζ) im allgemeinen nur ein Wertsystem (x, y) gehört: dann ist der Körper der rationalen Funktionen von ξ, η, ζ identisch mit dem Körper der rationalen Funktionen von x und y, also

$$K(\xi, \eta, \zeta) = K(x, y),$$

und es lassen sich umgekehrt auch x und y rational durch ξ, η, ζ darstellen:

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

Durch die obigen Gleichungen wird nun eine Raumkurve definiert, für welche der zu dem Wertsystem (x, y) gehörige Punkt der Riemannschen Fläche die Rolle eines Parameters spielt, und welche so umkehrbar eindeutig auf die Grundkurve abgebildet ist. Die Definition des Geschlechtes kann alsdann unmittelbar von der ebenen auf die Raumkurve übertragen werden.

Ist $(\xi = a, \eta = b, \zeta = c)$ ein Punkt der Raumkurve, so haben die Zähler der Funktionen $\xi - a, \eta - b, \zeta - c$ nach unserer Annahme im allgemeinen nur einen Primdivisor gemein. Für eine endliche Anzahl von Punkten (a, b, c) können aber Ausnahmen eintreten, und wenn dann $\mathfrak{z}_{\xi-a}, \mathfrak{z}_{\eta-b}, \mathfrak{z}_{\zeta-c}$ einen Divisor k^{ter} Ordnung gemein haben, so erhält die Raumkurve daselbst einen k-fachen Punkt. Es ist nun fast unmittelbar zu sehen, dafs zu einer gegebenen Kurve $F(x, y) = 0$ eine räumliche Bildkurve stets so bestimmt werden kann, dafs sie von Doppelpunkten frei ist; man kann also eine vollkommene Beseitigung der Singularitäten durch Erhöhung der Anzahl der Dimensionen herbeiführen. In der That kann man zuvörderst nach dem Satze auf S. 402 die Singularitäten der ebenen Kurve als vielfache Punkte mit getrennten Tangenten voraussetzen und sodann z. B. $\xi = x, \eta = y$ nehmen und die Funktion $\zeta = X(x, y)$ in mannigfaltiger Weise so bestimmen, dafs sie in einem k-fachen Punkte der Kurve $F(x, y) = 0$ k verschiedene Werte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_k$ erhält (S. 216). Es gilt also der Satz:

Jede ebene algebraische Kurve kann umkehrbar eindeutig auf eine doppelpunktfreie Raumkurve abgebildet werden.

Betrachtet man eine Kurve anstatt als Punkt- als Tangentengebilde, so sind die Tangentenkoordinaten rationale Funktionen der

Punktkoordinaten, also Funktionen des Körpers. Da nämlich die Tangente die Gleichung hat:

$$(\xi - x)\,dy - (\eta - y)\,dx = 0,$$

so sind ihre Linienkoordinaten

$$u = \frac{dy}{y\,dx - x\,dy}, \quad v = \frac{dx}{x\,dy - y\,dx}.$$

Umgekehrt ist, wie man leicht durch Differentiation bestätigt:

$$x = \frac{dv}{v\,du - u\,dv}, \quad y = \frac{du}{u\,dv - v\,du},$$

also ist die obige Beziehung stets eindeutig umkehrbar. Diese und ähnliche Umformungen sind also spezielle birationale Transformationen und können daher nach den dargelegten Prinzipien untersucht werden, wobei stets der Satz von der Erhaltung des Geschlechtes eine besonders wichtige Rolle spielt. Wir wollen diese Methoden in einer Reihe von Anwendungen erörtern, vorher aber, da wir hierbei die Kurven am besten unter projektiven und darum von den früheren etwas abweichenden Gesichtspunkten betrachten, die Modifikationen auseinandersetzen, welche unsere allgemeinen Entwickelungen und Begriffsbildungen erfahren, wenn wir die etwas spezielleren Voraussetzungen der projektiven Geometrie der Untersuchung zu Grunde legen und durchweg mit homogenen Gleichungen operieren.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Homogene Gleichungen und Divisorenscharen. — Lineare Transformation. — Schnittkurven. — Der Divisor der Doppelpunkte im projektiven Sinne. Seine Darstellung. — Aronholdsche Form der Abelschen Differentiale. — Die Bedeutung des Divisors der Doppelpunkte bei dieser Darstellung; adjungierte Kurven. — Der Restsatz für adjungierte Kurven. — Korresidualität.

§ 1.

Wir gelangen am einfachsten zu den allgemeinsten algebraischen Gebilden, welche durch homogene Gleichungen dargestellt werden, wenn wir innerhalb des Körpers $K(z, u)$ drei Funktionen x_0, x_1, x_2 so wählen, daſs umgekehrt u und z rational durch zwei ihrer Quotienten, z. B. durch $\frac{x_1}{x_0}$ und $\frac{x_2}{x_0}$ ausgedrückt werden können und daſs zwischen x_0, x_1, x_2 keine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten besteht. Zufolge der ersten Voraussetzung wird der Körper $(K(z, u)$ durch die Gesamtheit der rationalen Funktionen von $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}$ erschöpft, so daſs

$$K\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = K(z, u)$$

ist. Betrachten wir ferner die den drei Funktionen zugeordneten Divisoren und bezeichnen ihren gröſsten gemeinsamen Teiler mit $\mathfrak{M}$, indem wir

$$1) \qquad x_0 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}_0, \quad x_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}_1, \quad x_2 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2$$

setzen, so sind $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ drei g a n z e Divisoren ohne gemeinsamen Teiler, welche einer und derselben Klasse A angehören; die Dimension der Klasse A muſs dann zufolge der zweiten Voraussetzung mindestens gleich drei sein:

$$\{A\} \geqq 3,$$

denn sonst würde eben zwischen den Divisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, also auch zwischen den Funktionen x_0, x_1, x_2 eine lineare homogene Gleichung bestehen.

Bei allen nachfolgenden Untersuchungen haben wir ausschlieſslich mit homogenen Gleichungen zwischen x_0, x_1, x_2 zu thun. Derartige Gleichungen bleiben aber bestehen, wenn wir x_0, x_1, x_2 durch $\mu x_0, \mu x_1, \mu x_2$ ersetzen, wie wir auch den Proportionalitätsfaktor μ im übrigen wählen

mögen. Besteht hiernach zwischen x_0, x_1, x_2 eine homogene Gleichung ν^{ten} Grades von der Form

$$\Phi(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

so gilt dieselbe Gleichung auch für die zugehörigen Divisoren

$$\Phi(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = 0.$$

Diese letztere Gleichung ist so zu verstehen, daſs zwischen den Potenzprodukten der Dimension ν:

$$\mathfrak{A}_0^{\alpha_0}\mathfrak{A}_1^{\alpha_2}\mathfrak{A}_2^{\alpha_2} \qquad (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \nu),$$

welche sämtlich der Klasse A^ν angehören, eine bestimmte l i n e a r e homogene Relation besteht; ihre algebraische Bedeutung ist also durch die Ausführungen in § 2 der siebzehnten Vorlesung völlig erklärt. Wir dürfen und wollen daher in der Folge mit homogenen Gleichungen höheren Grades zwischen gegebenen Divisoren ebenso gut wie bisher mit linearen Gleichungen rechnen.

Zufolge dieser Bemerkungen spielt in obigen Gleichungen (1) der Divisor $\mathfrak{M}$ eine ganz unwesentliche Rolle und kann durch einen beliebigen anderen Divisor der Klasse $\frac{1}{A}$ ersetzt werden; man kann z. B., was wir in der Folge meist thun werden,

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\mathfrak{A}}$$

setzen, wobei

$$\mathfrak{A} = c_0\mathfrak{A}_0 + c_1\mathfrak{A}_1 + c_2\mathfrak{A}_2$$

einen beliebigen Divisor der aus den linearen Verbindungen der Grunddivisoren bestehenden Schar $\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ bedeutet. Immer dann, wenn wir mit homogenen Gleichungen zu operieren haben, handelt es sich nicht eigentlich um Gleichungen zwischen Funktionen, sondern vielmehr um solche zwischen Divisoren. Die Untersuchung der projektiven Eigenschaften algebraischer Kurven ist hiernach, wie wir jetzt im einzelnen zeigen werden, algebraisch völlig gleichwertig der Untersuchung einer Schar von Divisoren und der zwischen diesen bestehenden Gleichungen.

Betrachten wir einen beliebigen Divisor

$$\mathfrak{A} = c_0\mathfrak{A}_0 + c_1\mathfrak{A}_1 + c_2\mathfrak{A}_2$$

der Schar $\mathfrak{S}$, so ist, wenn die Ordnung der Klasse A gleich n ist,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_n,$$

und die n Primfaktoren dieses Divisors entsprechen den n Schnittpunkten der Kurve mit der Geraden

$$c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0,$$

weil eben der Zähler der Funktion auf der linken Seite der Gleichung gleich $\mathfrak{A}$ ist. Ebenso aber, wie wir die Gesamtheit der Geraden der Ebene anstatt aus $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ auch aus drei anderen Geraden zusammensetzen können, die ein Dreieck bilden, so können wir auch die Gesamtheit der in der Schar $\mathfrak{S}$ enthaltenen Divisoren, anstatt aus $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ aus drei anderen linear unabhängigen Divisoren der Schar komponieren. Bilden wir nämlich

$$2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_0 = a_{00}\mathfrak{A}_0 + a_{01}\mathfrak{A}_1 + a_{02}\mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{B}_1 = a_{10}\mathfrak{A}_0 + a_{11}\mathfrak{A}_1 + a_{12}\mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{B}_2 = a_{20}\mathfrak{A}_0 + a_{21}\mathfrak{A}_1 + a_{22}\mathfrak{A}_2 \end{cases}$$

und wählen die Koeffizienten dieser Gleichungen so, daſs die Determinante

$$r = |a_{gh}| \qquad (g, h = 0, 1, 2)$$

von Null verschieden ist, so sind auch $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ linear unabhängig, und es lassen sich $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ als lineare homogene Funktionen von $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ darstellen, die wir durch Auflösung der Gleichungen (2) erhalten. Es können also nicht bloſs die linearen Verbindungen von $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ als Linearformen der Divisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ dargestellt werden, sondern es gilt auch das Umgekehrte; die Schar $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ ist somit mit der Schar $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ identisch. Diese Transformation der Grunddivisoren der Schar $\mathfrak{S}$ entspricht offenbar genau einer Veränderung des Koordinatendreiecks, auf welches die Gleichung der Kurve bezogen wird. Bezeichnen wir nämlich mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Divisoren der Schar $\mathfrak{S}$ und setzen wir

$$3)\qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \dfrac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \dfrac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}} \\ y_0 = \dfrac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}}, \quad y_1 = \dfrac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}}, \quad y_2 = \dfrac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}}, \end{cases}$$

so hat man zufolge der Gleichungen (2), wenn die Funktion $\mu = \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ ein Proportionalitätsfaktor ist,

$$2\text{a})\qquad \begin{cases} \mu y_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ \mu y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \mu y_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

wodurch wir auf die gewöhnlichen Gleichungen der Koordinatentransformation oder der Kollineation zurückkommen. Die Gleichungen (2) und (2a) sind also im wesentlichen äquivalent, und es läſst sich das eine System aus dem andern unmittelbar ableiten.

Wir werden nun in der Folge ausschliefslich mit denjenigen Eigenschaften der algebraischen Kurven zu thun haben, welche durch Kollineation nicht zerstört werden können; dies bedeutet aber in algebraischer Ausdrucksweise, dafs wir nur solche Eigenschaften betrachten, welche nicht den einzelnen Divisoren, sondern der ganzen Schar $\mathfrak{S}$ eigentümlich und von der Art des Aufbaues der Schar unabhängig sind.

Da wir hiernach die Gleichung der Kurve, je nach der Wahl des Koordinatensystems, in verschiedenen Formen erhalten können, so benutzen wir die uns zur Verfügung stehende Transformation öfter, um ungeeignete Gleichungsformen zu vermeiden. Wir können und wollen z. B. für die Folge annehmen, dafs der Divisor $\mathfrak{A}_0$ aus n verschiedenen Primfaktoren besteht und dafs $\mathfrak{A}_1$ sowohl wie $\mathfrak{A}_2$ zu $\mathfrak{A}_0$ teilerfremd sind. Diese Voraussetzung ist leicht zu erfüllen; denn wir können die erste Seite $x_0 = 0$ des Koordinatendreiecks so annehmen, dafs sie die Kurve in n gewöhnlichen verschiedenen Punkten schneidet und sodann die anderen beiden Seiten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ so wählen, dafs sie durch keinen jener n Schnittpunkte hindurchgehen. Bilden wir unter dieser Voraussetzung die Gleichung der Kurve

$$4)\qquad F(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad \text{oder} \quad F(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = 0,$$

so ist die linke Seite derselben eine homogene Funktion n^{ten} Grades, in welcher die Koeffizienten von x_1^n und x_2^n, resp. von $\mathfrak{A}_1^n$ und $\mathfrak{A}_2^n$ von Null verschieden sind. Da nämlich jede Gerade der Ebene die Kurve in n Punkten schneidet, so mufs die Gleichung der Kurve notwendig vom n^{ten} Grade sein, d. h. es mufs jedes Glied der Gleichung die Dimension n besitzen, und es mufs ferner der Koeffizient z. B. von x_1^n von Null verschieden sein, weil andernfalls, entgegen unserer Voraussetzung, der Punkt ($x_0 = 0$, $x_2 = 0$) auf der Kurve liegen würde. Die Kurve ist ferner nach § 2 der sechzehnten Vorlesung unzerlegbar, da sie zufolge der im Anfange dieses Abschnittes getroffenen Annahme auf das ursprünglich gegebene algebraische Gebilde $f(u, z) = 0$ **umkehrbar** eindeutig bezogen ist.

Die wirkliche Aufstellung der Gleichung $F = 0$ und damit eine Bestätigung der eben erwähnten Eigenschaften erfolgt jetzt am einfachsten, wenn wir unter Benutzung der früher erlangten Resultate zunächst auf die nicht homogenen Gleichungen zurückgehen. Bilden wir nämlich die Quotienten

$$x = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0} = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0} = \frac{x_2}{x_0},$$

so sind dies zwei Funktionen des Körpers mit gleichem Nenner, welche zufolge unserer Voraussetzungen beide den Grad n haben, weil die Brüche bereits die reduzierte Form besitzen. Ferner ist y eine ganze Funktion von x, weil sie nur gleichzeitig mit x unendlich wird, und es besteht somit zwischen x und y eine Gleichung n^{ten} Grades

$$\overline{F}(x, y) = a_n(x) y^n + a_{n-1}(x) y^{n-1} + a_{n-2}(x)^{n-2} + \cdots + a_1(x) y + a_0(x) = 0,$$

in welcher $a_n(x) = 1$ und allgemeiner $a_{n-h}(x)$ eine ganze Funktion höchstens h^{ten} Grades von x ist. Das letztere folgt einfach daraus, daſs der Koeffizient

$$\pm\, a_{n-h}(x) = y_1 y_2 \cdots y_h + \cdots$$

ist und jede der n konjugierten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ für $(x = \infty)$ einen Pol erster, a_{n-h} also einen Pol h^{ter} Ordnung besitzt. Daher ist $a_0(x)$ der einzige Koeffizient der Gleichung, in welchem x bis zum n^{ten} Grade aufsteigen kann, und da die Funktion $\overline{F}(x, y)$ in x ebenso wie in y den Grad n haben muſs, so muſs in $a_0(x)$ der Koeffizient von x^n von Null verschieden sein. Kehren wir jetzt zu der homogenen Gleichungsform zurück, so finden wir

$$4\text{a)}\quad F(x_0, x_1, x_2) = x_0^n\, \overline{F}\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = x_2^n + a_{n-1}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) x_0 x_2^{n-1} + \cdots + a_0\left(\frac{x_1}{x_0}\right) x_0^n,$$

wobei also die Glieder x_1^n, x_2^n in der Kurvengleichung wirklich auftreten müssen.

Schneiden wir jetzt die Grundkurve $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ durch eine beliebige Kurve m^{ter} Ordnung

$$G(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

welche natürlich die Grundkurve nicht als Teil enthalten darf, so werden die Schnittpunkte beider Kurven durch den Zähler der Funktion $G(x_0, x_1, x_2)$, also durch den Divisor

$$G(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$$

geliefert. Da dieser Divisor eine ganze homogene Funktion m^{ter} Ordnung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ ist, so gehört er der Klasse A^m an, seine Ordnung ist mn, und ebenso groſs ist auch die Zahl der Schnittpunkte beider Kurven; hierbei muſs aber jeder Schnittpunkt mit der Multiplizität in Anrechnung gebracht werden, welche durch den Exponenten des zugehörigen Primdivisors angegeben wird. Umgekehrt stellt jeder derartige Divisor $G(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ das volle Schnittpunktesystem der Kurve $G = 0$ mit der Grundkurve dar. Die Untersuchung vollständiger Schnittpunktsysteme schneidender Kurven mit der Grundkurve ist also algebraisch

der Untersuchung derjenigen ganzen Divisoren äquivalent, welche ganze homogene Funktionen der Grunddivisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sind. Bei der geometrischen Deutung des Divisors $G(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ hat man zu beachten, dafs nach den Ausführungen auf S. 372 jeder Primdivisor $\mathfrak{P}$ einem Kurvenpunkt nur insoweit entspricht, als er auf einem bestimmten Zweige gelegen ist; jeder Kurvenzweig mufs also in den singulären Punkten besonders in Rechnung gezogen werden.

§ 2.

Wir wollen jetzt zuvörderst auf die Gleichung $F = 0$ die Formeln (4) und (4a) auf S. 382 zur Anwendung bringen, durch welche der Divisor der Doppelpunkte in die Untersuchung eingeführt wurde, und die Modifikation erörtern, welche durch die Benutzung homogener Koordinaten und die Forderung der Invarianz bei beliebiger Kollineation notwendig werden.

Zunächst erhalten wir durch Differentiation der identischen Gleichung (4a) des vorigen Paragraphen nach x_1 und x_2 die Formeln:

$$1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_1} = x_0^{n-1} \dfrac{\partial \overline{F}(x, y)}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_0^{n-1} \dfrac{\partial \overline{F}(x, y)}{\partial y} \end{cases}$$

und hier ist nach den anfangs erwähnten Hauptgleichungen

$$\frac{\partial \overline{F}(x, y)}{\partial x} = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_y}{\mathfrak{A}_0^{2(n-1)}}$$

$$\frac{\partial \overline{F}(x, y)}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}_0^{2(n-1)}}.$$

Da aber x und y beide denselben Nenner $\mathfrak{A}_0$ besitzen, so erhalten für die n Primfaktoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_n$ des Divisors $\mathfrak{A}_0$ die Funktionen x und y dieselben Werte $(x = \infty)$ und $(y = \infty)$. Der Punkt $(x = \infty, y = \infty)$ spielt also im Sinne der bei der Entwickelung obiger Formel zu Grunde gelegten Anschauungen die Rolle eines n-fachen Punktes mit getrennten Tangenten, d. h. er würde ein solcher werden können, wenn wir auf x und y beliebige lineare gebrochene Transformationen anwenden wollten. Der ganze Divisor $\mathfrak{D}$ mufs somit nach den Ausführungen in § 2 und 4 der dreiundzwanzigsten Vorlesung notwendig den Faktor $\mathfrak{A}_0^{n-1}$ enthalten, und wir können daher setzen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}_0^{n-1}\,\overline{\mathfrak{D}},$$

wo $\overline{\mathfrak{D}}$ ebenfalls einen ganzen Divisor bedeutet. Hiernach zerfällt der Divisor $\mathfrak{D}$ in zwei Teile, von denen aber der erste $\mathfrak{A}_0^{n-1}$ bei der

jetzigen Betrachtungsweise ganz unwesentlich ist, weil er überhaupt blofs durch den Übergang zu nicht homogenen Koordinaten hervorgerufen ist und der Divisor $\mathfrak{A}_0$ durch irgend einen anderen Divisor der Schar $\mathfrak{S}$, der gemeinsamer Nenner von x und y wird, ersetzt werden kann. Der zweite Bestandteil $\overline{\mathfrak{D}}$ ist hingegen der wesentliche, denn wir werden von diesem nachträglich zeigen, dafs er bei allen Kollineationen der Kurve völlig unverändert bleibt; wir werden daher diesen Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$ von nun ab als den „Divisor der Doppelpunkte der Kurve im projektiven Sinne" oder auch, wenn keine Verwechselungen zu befürchten sind, schlechthin als den Divisor der Doppelpunkte bezeichnen. Die beiden Divisoren $\mathfrak{D}$ und $\overline{\mathfrak{D}}$ unterscheiden sich also dadurch voneinander, dafs der erste bei linearer (gebrochener) Transformation jeder der beiden Variabeln x und y, der zweite bei linearer (ganzer) Transformation der homogenen Variabeln x_0, x_1, x_2 unverändert bleibt.

Durch Einführung des so definierten Divisors $\overline{\mathfrak{D}}$ erhalten wir jetzt, wenn

$$x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}$$

ist, folgendes System von drei Gleichungen, von denen die letzten beiden sich unmittelbar aus den Formeln (1) ergeben, während die erste in analoger Weise durch Berücksichtigung der Gleichberechtigung der Variabeln x_0, x_1, x_2 erschlossen wird:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_0} = \dfrac{\overline{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{Z}_{x_1:x_2}}{\mathfrak{A}^{n-1}} \\[2ex] \dfrac{\partial F(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_1} = \dfrac{\overline{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{Z}_{x_2:x_0}}{\mathfrak{A}^{n-1}} \\[2ex] \dfrac{\partial F(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_2} = \dfrac{\overline{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{Z}_{x_0:x_1}}{\mathfrak{A}^{n-1}}; \end{cases}$$

hierbei bedeutet z. B. $\mathfrak{Z}_{x_0:x_1} = \mathfrak{Z}_{x_1:x_0}$ denjenigen Verzweigungsdivisor, welcher zu der Variabeln

$$x = \frac{x_1}{x_0} = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}$$

gehört.

Noch etwas einfacher werden diese Gleichungen, wenn man lieber auf die auch zwischen den Divisoren bestehende Gleichung

$$F(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = 0$$

zurückgeht; man kann nämlich die Funktion $F(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ formal ganz ebenso nach $\mathfrak{A}_i$, wie $F(x_0, x_1, x_2)$ nach x_i differenzieren und er-

hält alsdann, da der Nenner $\mathfrak{A}^{n-1}$ für die Divisorengleichungen ganz fortfällt, die Formeln:

$$2a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)}{\partial \mathfrak{A}_0} = \overline{\mathfrak{D}}\, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2} \\ \dfrac{\partial F(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)}{\partial \mathfrak{A}_1} = \overline{\mathfrak{D}}\, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_0} \\ \dfrac{\partial F(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)}{\partial \mathfrak{A}_2} = \overline{\mathfrak{D}}\, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{A}_0 : \mathfrak{A}_1}. \end{cases}$$

Jedes der beiden Gleichungssysteme (2) und (2a) kann zur Definition des Divisors $\overline{\mathfrak{D}}$ verwendet werden; da die Ordnung der Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}$ gleich $w = 2p + 2(n-1)$ ist, so ergiebt sich für die Ordnung $2\overline{d}$ des Divisors $\overline{\mathfrak{D}}$:

$$3)\qquad 2\overline{d} = (n-1)(n-2) - 2p,$$

also umgekehrt

$$3a)\qquad p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \overline{d}.$$

Man erhält also z. B. in dem Falle, wo die Kurve nur einfache Doppelpunkte besitzt, das Geschlecht der Kurve, wenn man die Anzahl der wirklich vorhandenen Doppelpunkte von der Maximalzahl

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

von Doppelpunkten abzieht, welche eine irreduktible Kurve n^{ter} Ordnung haben kann.

Die Gleichungen (2) oder (2a) lassen eine einfache geometrische Schlufsfolgerung zu. Ist (c_0, c_1, c_2) ein beliebiger Punkt der Ebene, so heifst bekanntlich die Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$c_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + c_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

die erste Polare des Punktes in Bezug auf die Grundkurve $F = 0$. Dem aus $n(n-1)$ Punkten bestehenden Schnitte einer solchen Polare mit der Grundkurve entspricht alsdann nach den Formeln (2) der Divisor

$$\overline{\mathfrak{D}}\,(c_0 \mathfrak{Z}_{x_1 : x_2} + c_1 \mathfrak{Z}_{x_2 : x_0} + c_2 \mathfrak{Z}_{x_0 : x_1}),$$

welcher den festen Teiler $\overline{\mathfrak{D}}$ enthält. Daher gilt der Satz:

> Das Netz aller ersten Polaren schneidet auf der Grundkurve Punktsysteme aus, welche einen festen, dem Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$ genau entsprechenden Bestandteil besitzen,

oder einfacher für den Fall einfacher Doppelpunkte:

> Alle ersten Polaren gehen durch die Doppelpunkte der Kurve hindurch.

Es braucht aber $\overline{\mathfrak{D}}$ nicht der **größte** gemeinsame Teiler der Divisorenschar zu sein, welche den Schnittpunktsystemen der ersten Polaren zugehört, weil die drei Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_{x_1:x_2}$, $\mathfrak{Z}_{x_2:x_0}$, $\mathfrak{Z}_{x_0:x_1}$, wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, sehr wohl noch einen gemeinsamen Teiler besitzen können. Hingegen kann der Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$, ebenso wie der früher eingeführte Divisor $\mathfrak{D}$, als Nenner eines auf die Kurve bezüglichen Differentialteilers definiert werden. Bilden wir nämlich die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} x_2 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

von denen die erste aus dem Satze von Euler über homogene Funktionen erhalten wird, die zweite durch Differentiation von $F = 0$ folgt, so ergiebt sich durch Auflösung

$$\frac{x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1}{\frac{\partial F}{\partial x_0}} = \frac{x_2\, dx_0 - x_0\, dx_2}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \frac{x_0\, dx_1 - x_1\, dx_0}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = dM.$$

Berücksichtigt man nun, daſs dem ersten Zähler

$$x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1 = x_1^2 d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

der Differentialteiler $\frac{\mathfrak{Z}_{x_1:x_2}}{\mathfrak{A}^2}$ zugeordnet ist, so findet man vermöge der Formeln (2) für den Bruch dM die Divisorendarstellung

$$4) \qquad dM \sim \frac{\mathfrak{A}^{n-3}}{\overline{\mathfrak{D}}}.$$

Der Divisor $\overline{\mathfrak{D}}$ ist also der Nenner des zu dM gehörigen Differentialteilers; dieses Differential kann aber, wie eben gezeigt, in drei verschiedenen Formen, also auch in der Gestalt

$$dM = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 \end{vmatrix}}{a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}}$$

dargestellt werden, wobei a_0, a_1, a_2 ganz beliebige Grössen bedeuten, welche den Wert des Bruches nicht beeinflussen.

Diese Darstellung von $\overline{\mathfrak{D}}$ als Nenner eines Differentialteilers wollen wir jetzt zu dem Nachweise benutzen, daſs sich dieser Divisor bei beliebiger linearer Transformation von x_0, x_1, x_2 invariant verhält. Geht nämlich durch Kollineation die Kurve $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ in $\Phi(y_0, y_1, y_2) = 0$

über, so gilt vermöge der Transformationsgleichungen (2a) auf S. 422 die Identität

$$F(x_0, x_1, x_2) = \Phi(y_0, y_1, y_2),$$

wobei wir der Einfachheit halber den Proportionalitätsfaktor $\mu = 1$, also in den Gleichungen (3) auf S. 422 $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ angenommen haben. Hieraus folgt durch Differentiation nach x_0, x_1, x_2 unter Berücksichtigung jener Transformationsgleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_0} = a_{00}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_0} + a_{10}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} + a_{20}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = a_{01}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_0} + a_{11}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} + a_{21}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = a_{02}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_0} + a_{12}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} + a_{22}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2}. \end{cases}$$

Andererseits erhält man aus den Formeln der linearen Transformation durch Differentiation und Anwendung des Multiplikationstheorems der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ dy_0 & dy_1 & dy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & dx_0 \\ 0 & x_1 & dx_1 \\ 0 & x_2 & dx_2 \end{vmatrix};$$

folglich ist, wenn r wieder die Substitutionsdeterminante bedeutet:

$$r\,dM = r\,\frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{\dfrac{\partial F}{\partial x_0}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ dy_0 & dy_1 & dy_2 \end{vmatrix}}{a_{00}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_0} + a_{10}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} + a_{20}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_2}},$$

wobei nach dem letzten Ergebnisse in dem Ausdrucke rechts die Koeffizienten a_{00}, a_{10}, a_{20} durch irgend drei andere ersetzt werden können.

Das Differential dM geht also bei irgend welcher Kollineation in eine Form über, welche in genau derselben Beziehung zur Kurve $\Phi = 0$ steht, wie das ursprüngliche Differential zur Kurve $F = 0$; da aber der Nenner dieses Differentials eben unser Divisor $\mathfrak{D}$ war, so ist hiermit in der That bewiesen, daſs er bei jeder linearen Transformation unverändert bleibt.

Das Differential dM kann, wie Aronhold zuerst gezeigt hat, dazu dienen, jedes zu der Kurve $F = 0$ gehörige Abelsche Integral in eine Gestalt zu setzen, in welcher die Gröſsen x_0, x_1, x_2 in völlig symmetrischer Weise erscheinen. Da nämlich nach Formel (4) der Zähler des zu dem Differentiale dM gehörigen Divisors gleich $\mathfrak{A}^{n-3}$ ist, so wird, wenn man dasselbe mit einer homogenen Funktion $(n-3)^{\text{ten}}$ Grades

$\theta(x_0, x_1, x_2)$ multipliziert, das Produkt von dem accessorischen Nenner $\mathfrak{A}$ unabhängig, also nur eine Funktion der Verhältnisse $x_0 : x_1 : x_2$. Das so erhaltene Integral

$$5)\quad I = \int \theta(x_0, x_1, x_2)\, dM = \int \theta(x_0, x_1, x_2) \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 \end{vmatrix}}{a_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}}$$

stellt, wenn θ eine ganze oder gebrochene homogene Funktion der Ordnung $n-3$ ist, das allgemeinste auf die Kurve $F=0$ bezügliche Abelsche Integral dar. Da der Differentialteiler von dM durch die Gleichung (4) gegeben ist, so geht auch die Divisorenzerlegung des Differentials dI unmittelbar aus der der Funktion θ hervor. Die Funktion θ erscheint hierbei im allgemeinen als Quotient zweier ganzer Funktionen G und H, welche gleich Null gesetzt, zwei Kurven darstellen, deren Grade sich um $n-3$ unterscheiden, und deren Schnittpunkte mit der Grundkurve $F=0$ den Zähler und den Nenner von θ liefern.

§ 3.

Durch die letzten Auseinandersetzungen werden wir auf die Untersuchung desjenigen Teilbereiches geführt, welcher aus ganzen homogenen Funktionen von x_0, x_1, x_2 besteht, und wir haben demgemäfs auch hier, ganz analog wie in § 3 der vorigen Vorlesung Bedingungen festzustellen, unter welchen wir sicher sein können, dafs eine Funktion dem aus der Gesamtheit der ganzen Funktionen von x_0, x_1, x_2 gebildeten Ringe angehört. Ein solches System von hinreichenden, wenn auch nicht notwendigen Bedingungen wird nun durch folgenden Satz geliefert:

> Eine Funktion des Körpers, welche ein Vielfaches des Divisors $\frac{\bar{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{A}^{\nu}}$ ist, ist als ganze homogene Funktion ν^{ter} Ordnung von x_0, x_1, x_2 darstellbar.

Derselbe Satz kann, wie man unmittelbar sieht, ohne Zuhilfenahme des Nenners $\mathfrak{A}$ auch so ausgesprochen werden:

> Bedeutet A die Klasse der drei äquivalenten ganzen Divisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, so kann jeder Divisor der Klasse A^{ν}, welcher ein Vielfaches des Divisors $\bar{\mathfrak{D}}$ der Doppelpunkte ist, als ganze homogene Funktion ν^{ter} Ordnung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ dargestellt werden.

Zum Beweise setzen wir, wie auf S. 423

$$x = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}, \quad y = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_0},$$

und bilden die zwischen x und y bestehende Gleichung

$$\overline{F}(x, y) = a_n(x) y^n + a_{n-1}(x) y^{n-1} + \cdots + a_1(x) y + a_0(x) = 0$$

und den Differentialquotienten

$$1) \qquad \frac{\partial \overline{F}}{\partial y} = \frac{\overline{\mathfrak{D}} \mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}_0^{n-1}}.$$

Ist nun $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}$ ein Divisor der Klasse A^ν, welcher durch $\overline{\mathfrak{D}}$ teilbar ist, so läfst sich zunächst die Funktion

$$\omega = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}_0^\nu} = \frac{\overline{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}}{\mathfrak{A}_0^\nu}$$

in die Form setzen

$$2) \qquad \omega = r_0 + r_1 y + r_2 y^2 + \cdots + r_{n-1} y^{n-1},$$

wo die Koeffizienten rationale Funktionen von x sind. Wir können aber zeigen, dafs r_h für jeden Index h nicht blofs eine rationale, sondern eine ganze Funktion von x vom Grade $\nu - h$ ist. Ersetzen wir nämlich in der letzten Gleichung y durch seine Konjugierten $y_1, y_2, \ldots y_n$, bilden wir also

$$\omega_h = r_0 + r_1 y_h + r_2 y_h^2 + \cdots + r_{n-1} y_h^{n-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

so findet man leicht die Auflösung der n sich ergebenden linearen Gleichungen nach den Unbekannten $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$, indem man ebenso wie auf S. 233 die Lagrangesche Interpolationsformel zur Anwendung bringt:

$$r_{n-1} = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\omega_h a_n}{\overline{F}'(y_h)} \qquad \left(\overline{F}'(y) = \frac{\partial \overline{F}}{\partial y}\right)$$

$$r_{n-2} = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\omega_h (a_n y_h + a_{n-1})}{\overline{F}'(y_h)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_0 = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\omega_h (a_n y_h^{n-1} + a_{n-1} y_h^{n-2} + \cdots + a_2 y_h + a_1)}{\overline{F}'(y_h)}.$$

Es ist also

$$3) \qquad r_h = S\left(\frac{\omega (a_n y^{n-1-h} + \cdots + a_{h+1})}{\frac{\partial \overline{F}}{\partial y}}\right).$$

Da aber nach unseren Voraussetzungen die Funktion

$$a_n y^{n-1-h} + \cdots + a_{h+1}$$

in x und y die Dimension $n-1-h$ und somit den Nenner $\mathfrak{A}_0^{n-1-h}$ besitzt, so ist

$$\omega(a_n y^{n-1-h} + \cdots + a_{h+1}) = \frac{\overline{\mathfrak{D}}\overline{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{A}_0^{\nu+n-1-h}},$$

wo auch $\overline{\mathfrak{H}}$ einen ganzen Divisor bedeutet. Hieraus folgt durch Benutzung der Gleichung (1):

$$\frac{\omega(a_n y^{n-1-h} + \cdots + a_{h+1})}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\overline{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{A}_0^{\nu-h}\,\mathfrak{Z}_x},$$

und es ist also nach dem auf S. 412 bewiesenen Satze die Spur r_h dieses Quotienten in der That eine ganze rationale Funktion des Grades $\nu - h$ von x. Multiplizieren wir jetzt in (2) mit dem Nenner $\mathfrak{A}_0^\nu$ herauf, so ergiebt sich die Eigenschaft, die zu beweisen war: es ist

$$\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{D}}\,\overline{\mathfrak{H}} = \Phi_\nu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = \Sigma C \mathfrak{A}_0^{\alpha_0}\mathfrak{A}_1^{\alpha_1}\mathfrak{A}_2^{\alpha_2} \qquad (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \nu),$$

wo Φ_ν eine ganze homogene Funktion des Grades ν ist.

Eine derartige Kurve $\Phi_\nu(x_0, x_1, x_2) = 0$, welche durch alle Doppelpunkte der Grundkurve $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ hindurchgeht, bezeichnen wir, ganz ebenso wie früher (S. 415), als eine zur Grundkurve adjungierte Kurve; dieselbe hat aufserhalb der Doppelpunkte noch

$$\nu n - 2\overline{d} = 2(p-1) + (\nu - n + 3)n$$

Schnittpunkte mit der Grundkurve gemein, welche durch die Primfaktoren des Divisors $\overline{\mathfrak{H}}$ bestimmt sind.

Bei der Aronholdschen Form der Abelschen Differentiale spielen die adjungierten Kurven eine wichtige Rolle. Soll nämlich das Differential

$$dI = \theta(x_0, x_1, x_2)\, dM$$

von der ersten Gattung sein, so mufs, da

$$dM \sim \frac{\mathfrak{A}^{n-3}}{\overline{\mathfrak{D}}}$$

ist, θ ein Vielfaches von $\frac{\overline{\mathfrak{D}}}{\mathfrak{A}^{n-3}}$ sein; folglich ist nach dem eben Bewiesenen θ eine ganze Funktion und $\theta = 0$ eine adjungierte Kurve der Ordnung $n-3$; die Schar dieser Kurven hat die Dimension p, und jede derselben besitzt $2p-2$ freie Schnittpunkte mit der Grundkurve. Soll ferner dI ein Differential dritter Gattung mit den beiden Unstetigkeiten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sein, denen die beiden Kurvenpunkte P_1 und P_2

mit den Koordinaten a_0, a_1, a_2 und b_0, b_1, b_2 entsprechen mögen, so legen wir durch die beiden Punkte eine Gerade

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0;$$

diese schneidet die Kurve aufser in P_1 und P_2 noch in $n-2$ weiteren Punkten, denen der Divisor $\mathfrak{Q}$ der Ordnung $n-2$ entsprechen möge und es ist $\Delta = \frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{Q}}{\mathfrak{A}}$. Da nun θ ein Vielfaches des Divisors $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}^{n-3}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ sein mufs, so ist das Produkt

$$\theta \cdot \Delta = H$$

ein Vielfaches von $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{A}^{n-2}}$ und folglich eine ganze homogene Funktion der Ordnung $n-2$ von x_0, x_1, x_2; die Gleichung $H = 0$ stellt also eine adjungierte Kurve der Ordnung $n-2$ dar, welche durch die $n-2$ übrigen Schnittpunkte der Geraden $\Delta = 0$ hindurchgeht. Fallen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zusammen, wird also das Differential von der zweiten Gattung, so ist die Nennergerade $\Delta = 0$ die Tangente im Punkte P, und es wird also

$$\Delta = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}\right)_a x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_a x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_a x_2,$$

die sonstige Ableitung bleibt aber völlig unverändert.

Es kann ferner bei einem Differential dritter Gattung eintreten, dafs zwar die Primdivisoren $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ verschieden sind, aber die zugehörigen Kurvenpunkte in einen einzigen Punkt P zusammenfallen, nämlich dann und nur dann, wenn in P eine mehrzweigige Singularität der Kurve vorhanden ist; dann ist die Nennergerade $\Delta = 0$ unbestimmt, da jede durch den Punkt P hindurchgehende Gerade gewählt werden kann. Jede Linearform Δ, welche einer Geraden des Strahlbüschels durch den Punkt P zugehört, kann somit als Nenner der Funktion $\theta = \frac{H}{\Delta}$ genommen werden, und die verschiedenen so erhaltenen Differentiale unterscheiden sich nur um solche der ersten Gattung.

Auch der Fall des Integrals zweiter Gattung bedarf, falls P ein singulärer Punkt der Kurve ist, einer weiteren Erörterung. Zu dem Primdivisor $\mathfrak{P}$ gehört nämlich unter allen Umständen ein bestimmter Kurvenzweig, welcher in P ein reguläres oder singuläres Verhalten zeigt, je nachdem ausschliefslich die Tangente oder aber die sämtlichen Geraden des Strahlenbüschels durch P mit dem Kurvenzweige einen Schnitt höherer als erster Ordnung gemein haben; das erste ist z. B. beim Doppelpunkte der Fall, während das letztere eintritt, wenn

der Kurvenzweig in P einen Rückkehrpunkt besitzt. Im ersten Falle mufs die Tangente als Nennergerade genommen werden, weil nur für diese der zugehörige Divisor den Faktor $\mathfrak{P}^2$ erhält; im zweiten kann wieder jede Gerade des Büschels die Nennergerade sein, und die Darstellung von θ wird unbestimmt.

§ 4.

Der Begriff der adjungierten Kurven führt nun zu einem Satze, welcher von grundlegender Bedeutung ist, sobald man die Lehre von den algebraischen Funktionen auf kurventheoretischen Vorstellungen aufbaut.

Betrachten wir das Punktsystem, welches eine adjungierte Kurve m^{ter} Ordnung aufser den singulären Punkten auf der Grundkurve ausschneidet, so können wir den zugehörigen Divisor irgendwie in zwei ganze Faktoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zerlegen, wodurch das Punktsystem in zwei Teile zerfällt, die auch insofern völlig bestimmt sind, als jeder Kurvenpunkt in jedem der beiden Teile mit einer durch die Faktoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ gegebenen Multiplizität auftritt. Zwei derartige Divisoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, resp. die zugehörigen Punktsysteme, werden als Reste voneinander bezeichnet; die charakteristische Beziehung zweier Reste $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ besteht also darin, dafs das Produkt

$$\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$$

ein durch $\overline{\mathfrak{D}}$ teilbarer ganzer Divisor der Klasse A^m und folglich nach dem Satze des vorigen Abschnittes eine ganze homogene Funktion m^{ter} Ordnung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ ist. Jeder beliebig gegebene ganze Divisor $\mathfrak{R}$ kann als Rest eines anderen $\mathfrak{S}$ dargestellt werden; denn wenn man nur den Exponenten m hinreichend grofs wählt, so kann man stets innerhalb der Klasse A^m ganze und durch $\overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}$ teilbare Divisoren $\mathfrak{G}$ finden, und der Quotient $\frac{\mathfrak{G}}{\overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}} = \mathfrak{S}$ ist alsdann Rest von $\mathfrak{R}$. Es folgt aber hieraus auch, dafs sogar zu jedem ganzen Divisor $\mathfrak{R}$ stets unendlich viele Reste $\mathfrak{S}$ gefunden werden können, da der Exponent m, d. i. die Ordnung der schneidenden Kurve, auch beliebig grofs angenommen werden kann.

Zwei ganze Divisoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, resp. die zugehörigen Punktgruppen, heifsen nun korresidual, wenn sie Reste eines und desselben Divisors $\mathfrak{S}$ sind; alsdann sind

$$\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}\mathfrak{S} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}' = \overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}'\mathfrak{S}$$

ganze Divisoren der Klassen A^m und $A^{m'}$, also $\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}}$ ein Divisor der Klasse $A^{m'-m}$. Diese Beziehung läfst sich aber auch umkehren, denn es gilt der Satz:

Wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}}$ einer Klasse angehört, welche eine Potenz von A ist, so ist jeder Divisor $\mathfrak{S}$, welcher Rest von $\mathfrak{R}$ ist, auch Rest von $\mathfrak{R}'$; die Divisoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ sind also korresidual.

Denn nach der Voraussetzung ist $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ ein ganzer Divisor einer Klasse A^m, und da die Klasse von $\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}}$ ebenfalls eine Potenz von A ist, so ist auch

$$\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}}\,\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{D}}\mathfrak{R}'\mathfrak{S}$$

ein ganzer Divisor einer Klasse $A^{m'}$; $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{S}$ sind also Reste voneinander, was zu beweisen war.

Aus dem Beweise dieses Satzes folgt aber auch, dafs bei dem Begriffe der Korresidualität der gemeinsame Rest $\mathfrak{S}$ eine unwesentliche Rolle spielt, und dafs zwei Divisoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, welche Reste von $\mathfrak{S}$ sind, auch in Beziehung auf jeden anderen Divisor $\mathfrak{S}'$ korresidual sind, welcher Rest des einen von ihnen ist. Wir können daher noch folgenden Satz formulieren:

Sind vier ganze Divisoren $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ so beschaffen, dafs durch die drei zu den Divisoren

$$\mathfrak{R}\mathfrak{S},\quad \mathfrak{R}'\mathfrak{S},\quad \mathfrak{R}\mathfrak{S}'$$

gehörigen Punktgruppen je eine adjungierte Kurve bestimmt wird, so wird auch durch $\mathfrak{R}'\mathfrak{S}'$ eine adjungierte Kurve festgelegt. Sind also $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ korresidual in Bezug auf $\mathfrak{S}$, und ist $\mathfrak{S}'$ Rest von $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{S}'$ auch Rest von $\mathfrak{R}'$.

In dieser Form ist unser Satz eine der fruchtbarsten Quellen für die Ergründung der Eigenschaften der auf höheren algebraischen Kurven gelegenen Punktgruppen. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, mag es genügen, an einem einfachen Beispiele die Anwendbarkeit des Theorems zu illustrieren.

Ebenso wie die Kegelschnitte das Erzeugnis zweier projektiv aufeinander bezogener Strahlbüschel sind, so können wir auch doppelpunktfreie Kurven vierter Ordnung durch zwei projektiv auf einander bezogene Kegelschnittbüschel erzeugen. Denn sind

$$f(x_0, x_1, x_2) + \lambda\,\varphi(x_0, x_1, x_2) = 0$$

und

$$f'(x_0, x_1, x_2) + \lambda\,\varphi'(x_0, x_1, x_2) = 0$$

zwei Kegelschnittbüschel, und entsprechen einander solche Elemente der beiden Büschel, welche denselben Parameter λ besitzen, so

schneiden sich je zwei zugeordnete Kegelschnitte in Punktquadrupeln, welche bei Veränderung des Parameters λ die Kurve vierter Ordnung

$$\begin{vmatrix} f & \varphi \\ f' & \varphi' \end{vmatrix} = 0$$

durchlaufen. Wir wollen nun aber umgekehrt zeigen, dafs und auf welche Weise jede beliebige doppelpunktfreie Kurve vierter Ordnung durch projektive Kegelschnittbüschel erhalten werden kann.

Eine derartige Kurve

$$C_4(x_0, x_1, x_2) = 0$$

besitzt nach der Formel (3) auf S. 427 das Geschlecht drei, und da sie keine Singularitäten hat, so ist jede beliebige schneidende Kurve zu ihr adjungiert. Wählen wir insbesondere einen Kegelschnitt $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, so erhalten wir acht Schnittpunkte und können dieselben in zwei Quadrupel $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ zerlegen, welche Reste voneinander sind. Legen wir durch das Quadrupel $\mathfrak{R}$, das wir ganz willkürlich auf der Kurve, nur nicht gerade als die vier Schnittpunkte einer Geraden annehmen können, noch einen zweiten Kegelschnitt $f' = 0$, so schneidet dieser noch in einem zweiten Quadrupel $\mathfrak{S}'$, und es ist

$$\frac{f'}{f} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{S}'}{\mathfrak{R}\mathfrak{S}} = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}};$$

die beiden Quadrupel $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ sind also korresidual.

Legen wir jetzt durch $\mathfrak{S}$ einen zweiten Kegelschnitt $\varphi = 0$, so schneidet er noch in einem weiteren Punktquadrupel $\mathfrak{R}'$, welches zu $\mathfrak{R}$ korresidual ist. Dann liegen nach unserem Satze auch die Quadrupel $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{S}'$ auf einem Kegelschnitt $\varphi' = 0$, und es ist

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\mathfrak{R}'\mathfrak{S}'}{\mathfrak{R}'\mathfrak{S}} = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}},$$

wobei die Funktion $\frac{\varphi'}{\varphi}$ von vornherein durch einen geeigneten Proportionalitätsfaktor so normiert werden kann, dafs sie auch bei Berücksichtigung der multiplikativen Konstanten, ebenso wie $\frac{f'}{f}$, die Divisorendarstellung $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}$ erhält.

Durch Vergleichung beider Funktionen ergiebt sich also, dafs für jeden Kurvenpunkt

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varphi'}{\varphi},$$

also

$$f'\varphi - f\varphi' = 0$$

ist, und da die letzte Gleichung vom vierten Grade in x_0, x_1, x_2 ist, so ist sie mit der Kurvengleichung identisch. Daher gilt die Identität

$$C_4(x_0, x_1, x_2) \equiv f'\varphi - f\varphi';$$

man erhält somit auch die Kurvengleichung durch Elimination des Parameters λ aus den beiden Gleichungen

$$f + \lambda\varphi = 0, \quad f' + \lambda\varphi' = 0,$$

und die Kurve ist in der That das Erzeugnis der beiden in dieser Weise projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnittbüschel. Die vier Grundpunkte der beiden Büschel sind die beiden korresidualen Quadrupel $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, und es geht aus der Herleitung unmittelbar hervor, dafs irgend zwei korresiduale Punktquadrupel auf der Kurve als Büschelgrundpunkte gewählt werden dürfen. Daher gilt folgender Satz:

> Jede doppelpunktfreie Kurve vierter Ordnung kann von zwei korresidualen Punktquadrupeln aus durch projektive Kegelschnittbüschel erzeugt werden; d. h. legt man durch jedes der beiden Quadrupel und einen Kurvenpunkt je einen Kegelschnitt, so durchlaufen bei Veränderung des Kurvenpunktes die beiden Kegelschnitte zwei Büschel, welche projektiv aufeinander bezogen sind.

Kehren wir jetzt noch einmal zu der früher gegebenen Definition korresidualer Divisoren zurück und fassen dieselbe unter rein algebraischen Gesichtspunkten auf, so werden wir, wie wir zeigen wollen, naturgemäfs dazu geführt, die sämtlichen Divisorenklassen ihrerseits wieder in umfassendere Abteilungen einzuordnen; wir erhalten so eine neue Einteilung der Divisoren in solche Klassen, in welchen immer unendlich viele der früheren zusammengefafst sind. Wir bezeichneten nämlich zwei Divisoren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ als korresidual, wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}}$ zu einer Klasse A^m gehört, wo A jetzt beliebig gegeben sein kann. Sind also G und G' die Klassen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, so ist

$$\frac{G'}{G} = A^m.$$

Zwei derartige Klassen können wir nun als äquivalent in Beziehung auf A definieren und alle einander äquivalenten Klassen in einer erweiterten Klasse vereinigen. Diese neue Definition der Äquivalenz genügt den Forderungen, welche nach S. 252 an jede Äquivalenz gestellt werden müssen. Denn es bestehen auch hier die Sätze:

1) Jede Klasse G ist sich selbst äquivalent, weil $\frac{G}{G} = E = A^0$ ist.

2) Sind zwei Klassen G und G' einer dritten G_0 äquivalent, so sind sie einander äquivalent. Denn wenn

$$\frac{G}{G_0} = A^m, \quad \frac{G'}{G_0} = A^{m'}$$

ist, so ist

$$\frac{G'}{G} = A^{m'-m},$$

also

$$G' \sim G.$$

Bei dieser neuen Klasseneinteilung wird die Hauptklasse von den sämtlichen Potenzen von A gebildet:

$$\ldots, A^{-2}, A^{-1}, E, A, A^2, \ldots = (A^m);$$

wenn ferner G eine der alten Divisorenklassen ist, welche nicht in dieser Reihe enthalten ist, so erhält man die sämtlichen äquivalenten Klassen durch Bildung von

$$\ldots, GA^{-2}, GA^{-1}, G, GA, GA^2, \ldots = (GA^m)$$

und diese Reihe bildet also eine der neuen Divisorenklassen.

Eine derartige Gruppierung der Divisorenklassen ist in jedem Falle zulässig und, wie wir bei Erörterung des Begriffes der Korresidualität gesehen haben, auch für viele Untersuchungen zweckmäfsig. Hierbei ist aber zu beachten, dafs die frühere Klasseneinteilung eine für den ganzen Körper charakteristische und daher allen birationalen Transformationen gegenüber invariant ist; die jetzige hingegen hat eine bestimmte Beziehung zu einer ausgezeichneten Divisorenklasse A, durch welche die neue Hauptklasse bestimmt wird; Divisoren, welche für eine gegebene Kurve korresidual sind, sind es daher für eine durch birationale Transformation erhaltene Bildkurve im allgemeinen nicht mehr. Unwesentlich hingegen für die algebraischen Formulierungen ist es, dafs wir die Untersuchung im Anfange dieses Abschnittes auf ganze Divisoren und auf solche Klassen A beschränkt haben, für welche die Dimension $\{A\} \geq 3$ ist und welche daher in der angegebenen Weise auf ebenen Kurven gedeutet werden können.*)

Der in diesem Paragraphen bewiesene wichtige Restsatz erscheint hiernach als eine unmittelbare Konsequenz einer Erweiterung der Klasseneinteilung der Divisoren. In der Brill-Noetherschen Theorie der algebraischen Funktionen ist er das Fundament der ganzen Untersuchung und wird daher gleich im Eingange durch geometrische Überlegungen bewiesen; dann aber macht er ausführliche und ziemlich verwickelte Erörterungen über die verschiedenen Möglichkeiten erforderlich, welche bei dem Schnitte algebraischer Kurven auftreten können.

*) Im Begriffe des Ideals $I(\mathfrak{Q})$ werden z. B., wie aus der vierzehnten Vorlesung folgt, alle diejenigen ganzen Divisoren zusammengefafst, welche in Beziehung auf die Klasse A des Nenners und Zählers der unabhängigen Variabeln z korresidual sind; denn zu zwei Funktionen η und η' des Ideales gehören Divisoren der Form $\mathfrak{G}\mathfrak{Q}\mathfrak{n}_z^\varrho$ und $\mathfrak{G}'\mathfrak{Q}\mathfrak{n}_z^{\varrho'}$, wo $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ ganz sind, folglich sind die Klassen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ äquivalent in Beziehung auf die Klasse A von $\mathfrak{n}_z$.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Gleichungen einer Kurve in Linienkoordinaten. — Die Plückerschen Formeln und ihre Verallgemeinerung. — Anwendung auf eine Steinersche Kurve. — Eine Divisorenschar der Dimension $s+1$ besitzt Verzweigungsdivisoren der ersten, zweiten, ... s^{ten} Ordnung und Tangentialkoordinaten der ersten, zweiten, ... $(s-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. — Verallgemeinerung der Plückerschen Formeln für Divisorenscharen von beliebiger Dimension.

§ 1.

Anstatt die Kurve $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ als Punktgebilde zu betrachten, können wir sie auch als Enveloppe der Gesamtheit ihrer Tangenten auffassen und ihre Gleichung in Linienkoordinaten untersuchen. Hierbei sind die Linienkoordinaten u_0, u_1, u_2 Funktionen des Körpers $K(x_0, x_1, x_2)$, und, da umgekehrt auch x_0, x_1, x_2 rationale Funktionen von u_0, u_1, u_2 sind, erhalten wir eine der einfachsten und wichtigsten birationalen Transformationen des Gebildes. Bei dieser Untersuchung ergeben sich zwischen den verschiedenen charakteristischen Zahlen der Kurve eine Anzahl von Gleichungen, welche zuerst von Plücker, aber nur unter der Annahme gewöhnlicher Singularitäten aufgestellt worden sind, und welche wir sogleich ohne jede einschränkende Voraussetzung ableiten können.

Die Tangente der Kurve im Punkte (x_0, x_1, x_2) hat die Gleichung

$$1)\qquad \xi_0 u_0 + \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 = \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 \end{vmatrix} = 0,$$

worin ξ_0, ξ_1, ξ_2 die laufenden Koordinaten auf der Geraden (u_0, u_1, u_2) bedeuten. Für die Linienkoordinaten erhält man also die Darstellung

$$2a)\qquad u_0 : u_1 : u_2 = x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 : x_2\,dx_0 - x_0\,dx_2 : x_0\,dx_1 - x_1\,dx_0,$$

oder auch bei Berücksichtigung der Formeln auf S. 428

$$2b)\qquad u_0 : u_1 : u_2 = \frac{\partial F}{\partial x_0} : \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2}.$$

Machen wir aber von den Formeln (2) auf S. 426 Gebrauch, so erhalten wir die Divisorendarstellung

$$2c)\qquad u_0 : u_1 : u_2 = \mathfrak{Z}_{x_1 : x_2} : \mathfrak{Z}_{x_2 : x_0} : \mathfrak{Z}_{x_0 : x_1}.$$

Als Klasse der Kurve bezeichnet man nun bekanntlich die Zahl k der Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte (ξ_0, ξ_1, ξ_2) der Ebene an die Kurve gehen. Sie ist also gleich der Anzahl der freien Schnittpunkte der Polare des Punktes (ξ_0, ξ_1, ξ_2):

$$\xi_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + \xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

oder auch (s. S. 427) gleich der Ordnung des Divisors

$$\xi_0 \mathfrak{Z}_{x_1 : x_2} + \xi_1 \mathfrak{Z}_{x_2 : x_0} + \xi_2 \mathfrak{Z}_{x_0 : x_1},$$

wenn derselbe noch von dem allen drei Summanden gemeinsamen Teiler befreit wird.

Nehmen wir nun an, daſs die drei Verzweigungsdivisoren einen gröſsten gemeinsamen Divisor $\mathfrak{R}_1$ der Ordnung r_1 haben, so wollen wir diesen als den ersten Verzweigungsdivisor der Schar $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ bezeichnen. Wir finden dann, da $w = 2p - 2 + 2n$ die Ordnung jedes der drei Verzweigungsdivisoren ist, die erste Plückersche Formel

3) $$k = w - r_1 = 2p - 2 + 2n - r_1.$$

Wir wollen nun vorerst die algebraische, sodann die geometrische Bedeutung des Divisors $\mathfrak{R}_1$ feststellen. Für den ersten Teil dieser Aufgabe machen wir von einer passenden Transformation der Grunddivisoren der Schar $\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ Gebrauch, durch welche ja der Divisor $\mathfrak{R}_1$ in keiner Weise beeinfluſst wird. Ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Riemannschen Fläche, so können die drei Divisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, da sie teilerfremd sind, nicht alle den Faktor $\mathfrak{P}$ haben. Wir können und wollen daher den ersten Divisor $\mathfrak{A}_0$ als zu $\mathfrak{P}$ relativprim annehmen und sodann (vgl. S. 255) die Grunddivisoren $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ durch zwei Multipla von $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1 - c_1 \mathfrak{A}_0, \quad \bar{\mathfrak{A}}_2 = \mathfrak{A}_2 - c_2 \mathfrak{A}_0$$

ersetzen; hierzu brauchen wir ja z. B. c_1 nur gleich dem Werte der Funktion $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}$ im Punkte $\mathfrak{P}$ anzunehmen. Die Gesamtheit der Divisoren

$$\lambda_1 \bar{\mathfrak{A}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathfrak{A}}_2$$

stellt alsdann eine in $\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ enthaltene Unterschar $\mathfrak{S}_1$ dar, deren Elemente sämtlich in $\mathfrak{P}$ eine positive Ordnungszahl erhalten. Im allgemeinen erhalten nun $\bar{\mathfrak{A}}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und damit die sämtlichen Divisoren der Schar $\mathfrak{S}_1 = (\bar{\mathfrak{A}}_1, \bar{\mathfrak{A}}_2)$ in $\mathfrak{P}$ nur die Ordnungszahl eins, es kann aber bei spezieller Wahl von $\mathfrak{P}$ eintreten, daſs sie sämtlich eine Potenz $\mathfrak{P}^{\alpha_1}$ als Faktor enthalten, deren Exponent

grösser als eins ist. Wir dürfen dann weiter annehmen, dass der zweite Divisor $\mathfrak{A}_1$ im Punkte $\mathfrak{P}$ genau die Ordnungszahl α_1 hat und dass die des dritten $\mathfrak{A}_2$ im Punkte $\mathfrak{P}$ grösser als α_1 ist. Denn, wenn diese letztere Bedingung nicht von vornherein erfüllt ist, so ersetzen wir $\mathfrak{A}_2$ durch

$$\mathfrak{A}_2 = \overline{\mathfrak{A}}_2 - c\mathfrak{A}_1$$

und bestimmen die Konstante c gleich dem Werte der Funktion $\frac{\overline{\mathfrak{A}}_2}{\mathfrak{A}_1}$ im Punkte $\mathfrak{P}$. Die Ordnung von $\overline{\mathfrak{A}}_2$ ist alsdann $\alpha_1 + \alpha_2$, wo α_2 positiv ist. Im allgemeinen ist auch die Zahl α_2 gleich eins, in besonderen Fällen kann sie aber grösser als eins werden.

Wählen wir die Grunddivisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ der Schar $\mathfrak{S}$ in der hier angegebenen Weise, nämlich so, dass für ihre Ordnungszahlen $0, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2$ die Ungleichungen $0 < \alpha_1 < \alpha_1 + \alpha_2$ gelten, und nehmen wir überdies den gemeinsamen Nenner $\mathfrak{A}$ der Funktionen x_0, x_1, x_2 als zu $\mathfrak{P}$ teilerfremd an, so besitzen die drei Funktionen in $\mathfrak{P}$ Reihenentwickelungen von folgender Form:

$$4)\qquad x_0 = 1 + \cdots, \quad x_1 = \pi^{\alpha_1} + \cdots, \quad x_2 = \pi^{\alpha_1+\alpha_2} + \cdots,$$

wobei π eine Funktion des Körpers ist, welche in $\mathfrak{P}$ in erster Ordnung verschwindet. Von dieser Transformation werden wir jetzt und im folgenden immer Gebrauch machen, wenn es sich um Untersuchung singulärer Vorkommnisse in einzelnen Punkten $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche handelt.

Bilden wir nun die Determinanten

$$x_1 \frac{dx_2}{d\pi} - x_2 \frac{dx_1}{d\pi}, \quad x_2 \frac{dx_0}{d\pi} - x_0 \frac{dx_2}{d\pi}, \quad x_0 \frac{dx_1}{d\pi} - x_1 \frac{dx_0}{d\pi},$$

so haben sie in $\mathfrak{P}$ dieselbe Ordnungszahl wie die entsprechenden Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_{x_1:x_2}, \mathfrak{Z}_{x_2:x_0}, \mathfrak{Z}_{x_0:x_1}$; denn es ist z. B.

$$x_0 \frac{dx_1}{d\pi} - x_1 \frac{dx_0}{d\pi} = x_0^2 \frac{d}{d\pi}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \frac{\mathfrak{Z}_{x_0:x_1}\, \mathfrak{n}_\pi^2}{\mathfrak{A}^2\, \mathfrak{Z}_\pi},$$

und es kommt der Primteiler $\mathfrak{P}$ nach der Voraussetzung in keinem der Divisoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}_\pi, \mathfrak{n}_\pi$ vor. Führt man nun die vorher aufgestellten Reihenentwickelungen ein, so erhält man

$$x_1 \frac{dx_2}{d\pi} - x_2 \frac{dx_1}{d\pi} = \alpha_2 \pi^{2\alpha_1+\alpha_2-1} + \cdots$$

$$x_2 \frac{dx_0}{d\pi} - x_0 \frac{dx_2}{d\pi} = -(\alpha_1 + \alpha_2)\, \pi^{\alpha_1+\alpha_2-1} + \cdots$$

$$x_0 \frac{dx_1}{d\pi} - x_1 \frac{dx_0}{d\pi} = \alpha_1 \pi^{\alpha_1-1} + \cdots,$$

und es enthält somit der gröfste gemeinsame Teiler $\mathfrak{R}_1$ der drei Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_{x_1:x_2}, \mathfrak{Z}_{x_2:x_0}, \mathfrak{Z}_{x_0:x_1}$ genau den Faktor $\mathfrak{P}^{\alpha_1 - 1}$. Daher ist

$$5) \qquad \mathfrak{R}_1 = \Pi \mathfrak{P}^{\alpha_1 - 1},$$

worin das Produkt über alle Punkte der Riemannschen Fläche oder auch nur über diejenigen in endlicher Anzahl vorhandenen Punkte zu erstrecken ist, für welche $\alpha_1 > 1$ ist. Hierdurch ist also die algebraische Bedeutung des ersten Verzweigungsdivisors $\mathfrak{R}_1$ der Schar $\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ vollkommen erklärt, und wir können in Rücksicht auf die obige Divisorengleichung auch den Satz aussprechen:

Wenn die Kurve die Parameterdarstellung besitzt:

$$x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}},$$

so ist der gröfste gemeinsame Teiler der Differentialteiler von

$$x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1, \quad x_2\,dx_0 - x_0\,dx_2, \quad x_0\,dx_1 - x_1\,dx_0$$

gleich $\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{A}^2}$, wo $\mathfrak{R}_1$ der erste Verzweigungsdivisor der Schar $\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ ist.

Um nun aber auch die geometrische Bedeutung dieses Divisors zu erkennen, gehen wir auf die früher eingeführte Normalform der Grunddivisoren

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{P}^0 \ldots, \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{P}^{\alpha_1} \ldots, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{P}^{\alpha_1 + \alpha_2} \ldots$$

zurück und berücksichtigen, dafs die Divisoren der ganzen Schar

$$c_0 \mathfrak{A}_0 + c_1 \mathfrak{A}_1 + c_2 \mathfrak{A}_2$$

die Schnitte der sämtlichen Geraden der Ebene, die Divisoren der Unterschar

$$c_1 \mathfrak{A}_1 + c_2 \mathfrak{A}_2$$

aber die Schnitte der Geraden des Strahlenbüschels durch den zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Kurvenpunkt P darstellen. Für die Ermittelung der Ordnungszahl α_1 kommt es nur auf einen bestimmten durch P hindurchgehenden Kurvenzweig an, und die Zahl α_1, welche die Multiplizität des Schnittes irgend einer Geraden des Büschels mit dem betreffenden Kurvenzweige für den Punkt P angiebt, ist nun im allgemeinen gleich eins, in besonderen Fällen aber, wenn der Kurvenzweig nach Art des Rückkehrpunktes oder der Schnabelspitze für sich allein eine Singularität besitzt, gröfser als eins. Für den Rückkehrpunkt ist z. B. $\alpha_1 = 2$ und diese Singularität ist die einfachste, welche den Divisor $\mathfrak{R}_1$ beeinflufst. Wir bezeichnen daher den Divisor $\mathfrak{R}_1$ in Rücksicht auf seine geometrische Bedeutung auch kurz als den **Divisor der Rückkehrpunkte**.

Beschränkt man sich bei der Untersuchung auf solche Kurven, deren Singularitäten nur gewöhnliche Doppel- und Rückkehrpunkte sind, so ist, da eben nur für die Rückkehrpunkte die Zahl $\alpha_1 > 1$, und für diese $= 2$ wird, die Ordnung r_1 des Divisors $\mathfrak{R}_1$ einfach gleich der Zahl r der Rückkehrpunkte. Ferner setzt sich alsdann die in der Formel (3) auf S. 427 auftretende Ordnungszahl $2\bar{d}$ des Divisors $\mathfrak{D}$ aus dem Doppelten der Anzahl d der Doppelpunkte und der Anzahl r der Rückkehrpunkte zusammen, und es ist also

$$\bar{d} = d + r;$$

somit erhält diese und die zuletzt aufgestellte Plückersche Formel (3) die Gestalt

$$\text{3a)} \qquad \begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r \\ k &= 2p + 2(n-1) - r = n(n-1) - 2d - 3r. \end{aligned}$$

Neben diese erste Plückersche Formel stellt sich eine zweite, wenn wir nun auch die geometrische Bedeutung der zuvor algebraisch erklärten Ordnungszahl α_2 feststellen. Gehen wir wieder von der eben eingeführten Normalform der Divisorenschar $\mathfrak{S}$ aus, so stellt der Divisor $\mathfrak{A}_2$ den Schnitt der Tangente im Punkte P an den zu untersuchenden Kurvenzweig dar; denn die Tangente ist ja nach dem Satze auf S. 373 diejenige Gerade, welche mit dem Kurvenzweige in P einen Schnitt von höherer Multiplizität wie jede andere Gerade des Strahlenbüschels durch P besitzt. Im allgemeinen ist nun $\alpha_2 = 1$, die Berührung der Tangente also nur eine einfache; es giebt aber ausgezeichnete Punkte, für welche die Berührung eine höhere wird, und dies tritt bekanntlich vor allem für die Wendepunkte der Kurve ein, für welche $\alpha_2 = 2$ ist. Bilden wir hiernach den Divisor

$$\text{6)} \qquad \mathfrak{R}_2 = \prod \mathfrak{P}^{\alpha_2 - 1},$$

worin das Produkt ebenfalls über die ganze Riemannsche Fläche erstreckt werden kann, so wollen wir ihn, wenn wir eine algebraische Terminologie vorziehen, als den zweiten Verzweigungsdivisor der Schar $\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ bezeichnen; in Rücksicht aber auf seine geometrische Bedeutung wollen wir ihn auch den Divisor der Wendepunkte der Kurve nennen.

Soll nun die durch die Determinante (1) bestimmte Kurventangente im Punkte (x_0, x_1, x_2) eine Berührung höherer Ordnung haben, so mufs die Determinante verschwinden, wenn man die laufenden Koordinaten ξ_0, ξ_1, ξ_2 durch

$$x_i + 2dx_i + d^2x_i \qquad (i = 0, 1, 2)$$

ersetzt; es mufs also

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 \\ d^2x_0 & d^2x_1 & d^2x_2 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Diese Gleichung ergiebt uns also die Inflexionspunkte der Kurve; es enthält aber die linke Seite der Gleichung noch überflüssige Faktoren, wir müssen daher vollständig den der Determinante Δ entsprechenden Divisor bestimmen. Diese Untersuchung ist ähnlich derjenigen, durch welche wir auf S. 294 den zu einem Differentiale dx gehörigen Teiler festgestellt haben; sie ist nur darum etwas komplizierter, weil hier auch zweite Differentiale auftreten, kann aber, wie wir nun zeigen wollen, mit analogen Methoden durchgeführt werden.

Betrachtet man in der Determinante Δ die Gröfsen x_0, x_1, x_2 als Funktionen irgend einer Variabeln u des Körpers, so erhält sie die Gestalt

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \frac{dx_0}{du} & \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \\ \frac{d^2x_0}{du^2} & \frac{d^2x_1}{du^2} & \frac{d^2x_2}{du^2} \end{vmatrix} du^3. \tag{7}$$

Es entsteht nun zuvörderst die Frage, ob diese Determinante ihren Wert behält, wenn wir x_0, x_1, x_2 als Funktionen einer andern Variabeln des Körpers auffassen. Führen wir aber an Stelle von u eine andere Gröfse v als unabhängige Variable ein, so ergiebt sich durch Differentiation

$$\frac{dx_h}{dv} = \frac{dx_h}{du}\frac{du}{dv},$$

$$\frac{d^2x_h}{dv^2} = \frac{d^2x_h}{du^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \frac{dx_h}{du}\frac{d^2u}{dv^2}.$$

Setzt man also in der Determinante Δ an Stelle der Differentiale die Differentialquotienten nach u oder v, so findet man nach leichter Umformung

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \frac{dx_0}{dv} & \frac{dx_1}{dv} & \frac{dx_2}{dv} \\ \frac{d^2x_0}{dv^2} & \frac{d^2x_1}{dv^2} & \frac{d^2x_2}{dv_2} \end{vmatrix} = \left(\frac{du}{dv}\right)^3 \cdot \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \frac{dx_0}{du} & \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \\ \frac{d^2x_0}{du^2} & \frac{d^2x_1}{du^2} & \frac{d^2x_2}{du^2} \end{vmatrix}.$$

Hieraus geht hervor, dafs die Determinante Δ keine Änderung erfährt, wenn man die Variable u durch irgend eine andere v des Körpers ersetzt, und da Δ als dritte Potenz eines ersten Differentials, multipliziert mit einer Funktion des Körpers dargestellt worden ist, so

folgt jetzt, dafs wir dieser Determinante, ebenso wie einem einfachen Differentiale, einen völlig bestimmten und von der Hilfsvariabelen unabhängigen Divisor zuordnen können, dessen Ordnung gleich $3(2p-2)$ ist, weil du oder dv die Ordnung $2p-2$ hat. Da x_0, x_1, x_2 den gemeinsamen Nenner $\mathfrak{A}$ haben, so tritt im Nenner jenes Divisors nur eine gewisse Potenz von $\mathfrak{A}$ auf, deren Exponent leicht zu bestimmen ist. Ersetzen wir nämlich, wie auf S. 422, die Funktionen x_0, x_1, x_2 durch

$$y_0 = \mu x_0, \quad y_1 = \mu x_1, \quad y_2 = \mu x_2,$$

worin $\mu = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ ist, so findet man für die entsprechende, aus den Funktionen y und deren Differentialen gebildete Determinante $\Delta(y)$ die Relation

$$\Delta(y) = \mu^3 \Delta(x),$$

oder es ist

$$\mathfrak{B}^3 \Delta(y) = \mathfrak{A}^3 \Delta(x).$$

Die Determinante Δ erhält also den Nenner $\mathfrak{A}^3$, der bei Übergang zu proportionalen Gröfsen durch die dritte Potenz irgend eines anderen Divisors der Schar ersetzt wird; wir können daher setzen

$$\Delta = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}^3},$$

worin $\mathfrak{G}$ einen ganzen Divisor der Ordnung $3(2p-2)+3n$ bedeutet. Um nun diesen ganzen Divisor zu untersuchen, machen wir wieder für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ von der früher angewendeten Transformation (4) der Schar $\mathfrak{S}$ Gebrauch und finden alsdann bis auf höhere Potenzen von π:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \frac{dx_0}{d\pi} & \frac{dx_1}{d\pi} & \frac{dx_2}{d\pi} \\ \frac{d^2x_0}{d\pi^2} & \frac{d^2x_1}{d\pi^2} & \frac{d^2x_2}{d\pi^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \pi^{\alpha_1} & \pi^{\alpha_1+\alpha_2} \\ 0 & \alpha_1\pi^{\alpha_1-1} & (\alpha_1+\alpha_2)\pi^{\alpha_1+\alpha_2-1} \\ 0 & \alpha_1(\alpha_1-1)\pi^{\alpha_1-2} & (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2-1)\pi^{\alpha_1+\alpha_2-2} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)\pi^{2\alpha_1+\alpha_2-3} + \cdots$$

Der Divisor $\mathfrak{G}$ besitzt also in $\mathfrak{P}$ genau die Ordnungszahl $2\alpha_1+\alpha_2-3$, und diese ist ausschliefslich durch die vorher charakterisierten Zahlen α_1 und α_2 bestimmt. Denselben Exponenten erhält aber auch für jeden beliebigen Primteiler $\mathfrak{P}$ das aus den Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zusammengesetzte Produkt

$$\mathfrak{R}_1^2\mathfrak{R}_2 = \prod \mathfrak{P}^{2(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)},$$

also ist der Zähler $\mathfrak{G}$ des der Determinante Δ zugeordneten Divisors mit dem Produkte $\mathfrak{R}_1^2\mathfrak{R}_2$ identisch, und wenn man von ihm

den überflüssigen Faktor $\mathfrak{R}_1^2$ absondert, so bleibt der Divisor $\mathfrak{R}_2$ der Wendepunkte übrig. Daher erhalten wir für Δ folgende einfache Divisorendarstellung:

$$5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 \\ d^2x_0 & d^2x_1 & d^2x_2 \end{vmatrix} = \frac{\mathfrak{R}_1^2\,\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{A}^3}.$$

Für die Ordnung i des Divisors $\mathfrak{R}_2$ der Inflexionspunkte ergiebt sich nunmehr die zweite Plückersche Formel

$$6)\qquad i = 3(2p-2+n) - 2r_1 = 3(w-n) - 2r_1.$$

Im Falle einfacher Doppel- und Rückkehrpunkte erhält diese Formel die Gestalt

$$6a)\qquad i = 3n(n-2) - 6d - 8r.$$

Den beiden Plückerschen Formeln (3a) und (6a) stehen zwei dualistisch entsprechende zur Seite, wenn wir die Kurve als Tangentengebilde auffassen. Bestimmen wir nämlich zu jedem Punkte einer algebraischen Kurve die Polare in Beziehung auf einen festen gegebenen Kegelschnitt, so hüllt bekanntlich die Gesamtheit der so erhaltenen Geraden ein dualistisch entsprechendes Tangentengebilde ein, und die Beziehung zwischen den beiden Kurven ist eine umkehrbare. Dabei sind den Doppelpunkten der ersten Kurve Doppeltangenten der zweiten, den Rückkehrpunkten der ersten aber Wendetangenten der zweiten zugeordnet; denn wenn der bewegliche Punkt auf der ersten Kurve zweimal an dieselbe Stelle der Ebene gelangt, so mufs auch die bewegliche Tangente der zweiten Kurve zweimal dieselbe Lage erhalten, wenn aber der Punkt die Richtung des Fortrückens auf der Tangente umkehrt und hierdurch zu einem Rückkehrpunkte Veranlassung giebt, so mufs die zugeordnete Gerade die Richtung ihrer Drehung um den Berührungspunkt umkehren und die eingehüllte Kurve also einen Wendepunkt bilden. Daher entspricht der Ordnung n der ersten die Klasse k der zweiten Kurve, der Anzahl d der Doppelpunkte die Anzahl t der Doppeltangenten, der Anzahl r der Rückkehrpunkte die Anzahl i der Inflexionstangenten. Wir erhalten somit die entsprechenden Formeln

$$7)\qquad \begin{cases} k = n(n-1) - 2t - 3i \\ r = 3k(k-2) - 6t - 8i. \end{cases}$$

Das Geschlecht der Kurve ist dasselbe, mögen wir sie nun als Punkt- oder als Tangentengebilde auffassen, da die Tangential-

koordinaten u_0, u_1, u_2 durch eindeutig umkehrbare Transformation aus den Punktkoordinaten x_0, x_1, x_2 hervorgehen. Es ist also

$$
8)\qquad \begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r \\ &= \frac{1}{2}(k-1)(k-2) - t - i. \end{aligned}
$$

§ 2.

Wir wollen die Plückerschen Formeln und das Prinzip der Abbildung der Kurven an einem Beispiele zur Anwendung bringen, durch welches die geometrische Bedeutung dieser Untersuchungen schärfer hervortreten soll.

Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a_0, a_1, a_2 und ein Kegelschnitt, welchen wir als Tangentengebilde auffassen und später in ein Punktepaar degenerieren lassen wollen. Durch jeden Punkt P der Ebene gehen alsdann drei Geraden l_0, l_1, l_2, welche den Seiten des Dreiecks in Beziehung auf den Kegelschnitt konjugiert sind, und wir suchen die Bedingung auf, unter welcher die drei Punkte Q_0, Q_1, Q_2 in gerader Linie gelegen sind, in denen die Geraden l_0, l_1, l_2 resp. die Seiten a_0, a_1, a_2 schneiden. Die Punkte P erfüllen alsdann eine gewisse Kurve, und die zugehörigen Geraden $g = P_0 P_1 P_2$ hüllen eine zweite ein; diese beiden Kurven, welche übrigens Steiner zuerst untersucht hat, sind durch eindeutige Transformation aufeinander bezogen und müssen daher dasselbe Geschlecht besitzen.

Machen wir das Dreieck zum Koordinatendreieck, so mag P die Koordinaten ξ_0, ξ_1, ξ_2 haben, und die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten u_0, u_1, u_2 sei

$$
1)\qquad \Sigma\, \omega_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2);
$$

die Bedingung dafür, dafs zwei Geraden u und v in Beziehung auf den Kegelschnitt konjugiert sind, ist also

$$
\Sigma\, \omega_{ik} u_i v_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2).
$$

Der Pol der Seite a_i des Koordinatendreiecks, für welche $u_i = 1$ ist, während die anderen beiden Koordinaten gleich Null sind, hat also die Gleichung

$$
\omega_i(v) = \omega_{i0} v_0 + \omega_{i1} v_1 + \omega_{i2} v_2 = 0,
$$

und die Verbindungslinie dieses Pols mit dem Punkte P, dessen Gleichung

$$
\xi(v) = \xi_0 v_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 = 0
$$

lautet, ist die zu a_i konjugierte Gerade l_i. Jeder auf dieser Geraden gelegene Punkt hat also eine Gleichung der Form

$$
\omega_i(v) + \lambda \xi(v) = 0,
$$

worin λ den Parameter der Punktreihe bedeutet; will man insbesondere den Schnittpunkt Q_i von l_i und a_i bestimmen, so hat man λ so zu wählen, dafs die Gleichung durch die Koordinaten der Geraden a_i erfüllt wird und dafs also

$$\omega_{ii} + \lambda \xi_i = 0$$

ist. Als Gleichung des Schnittpunktes Q_i erhält man somit durch Elimination von λ

$$\begin{vmatrix} \omega_{i0} v_0 + \omega_{i1} v_1 + \omega_{i2} v_2 & \omega_{ii} \\ \xi_0 v_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 & \xi_i \end{vmatrix} = 0.$$

Stellen wir nun die Gleichungen der drei Punkte Q_0, Q_1, Q_2

$$2) \qquad \begin{aligned} \xi_0\, \omega_0(v) - \omega_{00}\, \xi(v) &= 0, \\ \xi_1\, \omega_1(v) - \omega_{11}\, \xi(v) &= 0, \\ \xi_2\, \omega_2(v) - \omega_{22}\, \xi(v) &= 0 \end{aligned}$$

untereinander, so erhalten wir durch Elimination der Koordinaten v die Bedingung, welcher der Punkt (ξ) genügen mufs, wenn die drei Punkte Q_0, Q_1, Q_2 in gerader Linie gelegen sein sollen, durch Elimination der ξ aber die Gleichung des geometrischen Ortes, welchen diese Geraden g einhüllen. Dabei verfährt man am besten in der Art, dafs man noch die Identität

$$\xi_0 v_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 - \xi(v) = 0$$

zu (2) hinzufügt und aus den vier so entstehenden Gleichungen entweder die linear und homogen auftretenden Gröfsen

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad \xi(v),$$

oder die ebenfalls linear auftretenden Gröfsen

$$\xi_0, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi(v)$$

eliminiert.

So ergiebt sich als geometrischer Ort der Punkte $P = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ die Kurve dritter Ordnung

$$3) \qquad \begin{vmatrix} \omega_{00}\,\xi_0 & \omega_{01}\,\xi_0 & \omega_{02}\,\xi_0 & \omega_{00} \\ \omega_{10}\,\xi_1 & \omega_{11}\,\xi_1 & \omega_{12}\,\xi_1 & \omega_{11} \\ \omega_{20}\,\xi_2 & \omega_{21}\,\xi_2 & \omega_{22}\,\xi_2 & \omega_{22} \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{00}\,\xi_1\,\xi_2 \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{11}\,\xi_2\,\xi_0 \\ \omega_{20} & \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{22}\,\xi_0\,\xi_1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_0\,\xi_1\,\xi_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man die Determinante der quadratischen Form $\Sigma \omega_{ik} u_i u_k$ mit Ω, und die Adjunkte des Elementes ω_{ik} mit Ω_{ik}, so lautet die letzte Gleichung ausgeschrieben:

$$
\text{3a)} \quad \begin{aligned} 0 = \Omega \xi_0 \xi_1 \xi_2 &- \omega_{00} \xi_1 \xi_2 (\Omega_{00} \xi_0 + \Omega_{01} \xi_1 + \Omega_{02} \xi_2) \\ &- \omega_{11} \xi_0 \xi_2 (\Omega_{10} \xi_0 + \Omega_{11} \xi_1 + \Omega_{12} \xi_2) \\ &- \omega_{22} \xi_0 \xi_1 (\Omega_{20} \xi_0 + \Omega_{21} \xi_1 + \Omega_{22} \xi_2). \end{aligned}
$$

Eliminiert man aber aus den Gleichungen (2) die Gröfsen ξ, so erhält man als geometrischen Ort der den Punkten P zugeordneten Geraden g die Kurve dritter Klasse

$$
\text{4)} \qquad 0 = \begin{vmatrix} \omega_0(v) & 0 & 0 & \omega_{00} \\ 0 & \omega_1(v) & 0 & \omega_{11} \\ 0 & 0 & \omega_2(v) & \omega_{22} \\ v_0 & v_1 & v_2 & 1 \end{vmatrix},
$$

oder ausgeschrieben

$$
\text{4a)} \qquad \frac{\omega_{00} v_0}{\omega_0(v)} + \frac{\omega_{11} v_1}{\omega_1(v)} + \frac{\omega_{22} v_2}{\omega_2(v)} = 1.
$$

Bei der geometrischen Interpretation der Kurvengleichungen (3) und (4) wollen wir uns auf den speziellen Fall beschränken*), dafs die gegebene Kurve zweiter Klasse in das Punktepaar G und H mit den Gleichungen

$$
\begin{aligned} g_u &= g_0 u_0 + g_1 u_1 + g_2 u_2 = 0 \\ h_u &= h_0 u_0 + h_1 u_1 + h_2 u_2 = 0 \end{aligned}
$$

degeneriert; dann ist identisch

$$
\Sigma \omega_{ik} u_i u_k = 2 g_u h_u,
$$

und die Bedingung, dafs die beiden Geraden u und v in Beziehung auf den Kegelschnitt konjugiert sind, ist gleichbedeutend damit, dafs sie durch das Punktepaar G, H harmonisch getrennt werden. Ferner ist

$$
\omega_{ik} = g_i h_k + g_k h_i,
$$

die Determinante Ω verschwindet, und die adjungierte Form $\Sigma \Omega_{ik} x_i x_k$ wird proportional dem Quadrate der Linearform

$$
\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ g_0 & g_1 & g_2 \\ h_0 & h_1 & h_2 \end{vmatrix} = p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2,
$$

wo p_0, p_1, p_2 die Koordinaten der Geraden GH bedeuten. Da hiernach $\Omega_{ik} = \mu p_i p_k$ ist, so hebt sich aus der Gleichung (3a) der Faktor

---

*) Eine ausführlichere Behandlung des allgemeineren Problems findet man bei Gundelfinger-Dingeldey, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, S. 410.

$p_0\xi_0 + p_1\xi_1 + p_2\xi_2$ heraus, und nach Fortlassung desselben wird die Gleichung der Kurve

$$3\text{b)}\qquad \begin{aligned} 0 &= g_0 h_0 p_0 \xi_1 \xi_2 + g_1 h_1 p_1 \xi_2 \xi_0 + g_2 h_2 p_2 \xi_0 \xi_1 \\ &= \begin{vmatrix} \xi_1 \xi_2 & g_1 g_2 & h_1 h_2 \\ \xi_2 \xi_0 & g_2 g_0 & h_2 h_0 \\ \xi_0 \xi_1 & g_0 g_1 & h_0 h_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Die Kurve der Punkte P ist also nichts anderes als der Kegelschnitt, welcher durch die Ecken des Koordinatendreiecks und durch die Punkte G, H hindurchgeht; die auf ihn eindeutig bezogene Kurve dritter Klasse hat aber zur Gleichung

$$4\text{b)}\qquad \frac{g_0 h_0 u_0}{g_0 h_u + h_0 g_u} + \frac{g_1 h_1 u_1}{g_1 h_u + h_1 g_u} + \frac{g_2 h_2 u_2}{g_2 h_u + h_2 g_u} = \frac{1}{2}$$

oder

$$4\text{c)}\qquad \begin{aligned} & g_0 h_0 u_0 (g_1 h_u + h_1 g_u)(g_2 h_u + h_2 g_u) + g_1 h_1 u_1 (g_2 h_u + h_2 g_u)(g_0 h_u + h_0 g_u) \\ & \qquad + g_2 h_2 u_2 (g_0 h_u + h_0 g_u)(g_1 h_u + h_1 g_u) \\ & - \frac{1}{2}(g_0 h_u + h_0 g_u)(g_1 h_u + h_1 g_u)(g_2 h_u + h_2 g_u) = 0. \end{aligned}$$

Die hierdurch dargestellte Kurve mufs das Geschlecht Null haben, weil sie umkehrbar eindeutig auf einen Kegelschnitt bezogen ist; aus der Kurvengleichung geht ferner hervor, dafs die Seiten des Dreiecks einfache Tangenten, die Gerade GH aber Doppeltangente mit den Berührungspunkten G und H ist. Verbindet man nämlich die Kurvengleichung mit der Gleichung eines beliebigen Punktes der Geraden GH:

$$g_u + \lambda h_u = 0,$$

so ergiebt sich, weil die Gleichung (4c) in g_u und h_u quadratisch ist, für jeden beliebigen Wert von λ die Doppellösung

$$g_u = h_u = 0$$

oder

$$u_0 : u_1 : u_2 = p_0 : p_1 : p_2;$$

die Gerade GH ist also Doppeltangente. Wählt man aber insbesondere auf GH die Punkte

$$g_u = 0 \quad \text{oder} \quad h_u = 0,$$

so ergiebt sich obige Lösung sogar als dreifache, die Punkte G und H sind also die Berührungspunkte der Doppeltangente.

Wenden wir nun die Formel

$$p = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) - t - i$$

für unsern Fall $k = 3$, $p = 0$ an, so folgt, dafs $t + i = 1$ ist, und da wir von der Existenz einer Doppeltangente bereits wissen, so mufs

$t = 1$, $i = 0$ sein; die Kurve hat also keine Inflexionspunkte. Bestimmen wir nunmehr die Ordnung n und die Zahl r der Rückkehrpunkte mit Hilfe der Plückerschen Formeln:

$$n = k(k-1) - 2t - 3i, \quad r = 3k(k-2) - 6t - 8i,$$

so ergiebt sich $n = 4$ und $r = 3$; die Kurve ist also von der vierten Ordnung und hat drei Rückkehrpunkte. Man kann dann beweisen, dafs die Rückkehrtangenten diejenigen Geraden sind, welche durch die Ecken des Dreiecks gehen und von der Gegenseite durch das Punktepaar G, H harmonisch getrennt werden; denn diese Geraden sind zufolge der Definition des Gebildes die den Ecken des Dreiecks entsprechenden Tangenten, und aus der Entstehungsweise der Kurve geht durch Anschauung oder durch Rechnung hervor, dafs der auf der Tangente wandernde Berührungspunkt an einer solchen Stelle seine Richtung umkehrt.

Besonderes Interesse verdient der spezielle Fall, dafs das Punktepaar G, H die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte der

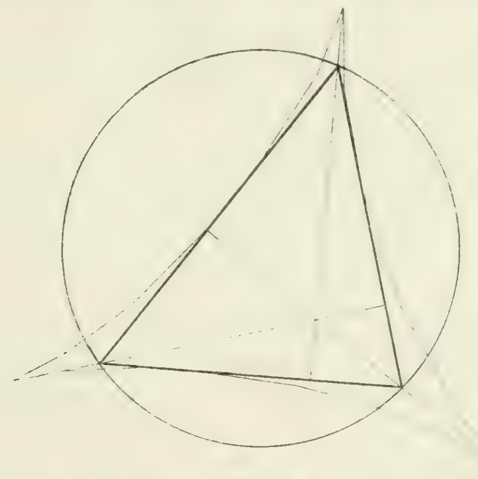


Fig. 34.

Ebene sind. Es ist bekannt, dafs zwei Gerade, welche in Bezug auf dieses Punktepaar konjugiert sind, zu einander senkrecht stehen müssen. Die Geraden, welche zu einer Seite des Dreiecks konjugiert sind und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gehen, sind also die Höhen des Dreiecks. Demgemäfs spezialisieren sich die erhaltenen Resultate folgendermafsen:

Der einem Dreiecke umschriebene Kreis ist der geometrische Ort aller der Punkte, für welche die Fufspunkte der auf die

Seiten gefällten Senkrechten in einer Geraden liegen. Diese Geraden hüllen eine Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung ein, welche die Dreiecksseiten einfach, die unendlich ferne Gerade aber in den beiden Kreispunkten berührt und die Höhen des Dreiecks zu Rückkehrtangenten hat (Fig. 34, s. S. 451).

§ 3.

Die im vorletzten Abschnitte angewendeten Methoden sind nicht auf Scharen der Dimension drei beschränkt, sondern lassen sich mit Leichtigkeit auf beliebige Scharen von Divisoren übertragen. Sie bilden alsdann die Grundlage für die Untersuchung algebraischer Gebilde im Raume von drei und mehr Dimensionen. Diese Erweiterung der vorher eingeführten Fundamentalbegriffe soll nunmehr zunächst rein algebraisch auseinandergesetzt werden, um sodann in den späteren Kapiteln für geometrische Zwecke verwendet zu werden.

Es seien $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_s$ $s+1$ ganze Divisoren einer Klasse A von der Ordnung n, welche voneinander linear unabhängig sind und keinen gemeinsamen Teiler besitzen; dann erhalten wir durch lineare Verbindung der Fundamentaldivisoren $\mathfrak{A}$ eine Divisorenschar

$$1)\qquad \mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_s).$$

Diese Schar kann anstatt aus den $s+1$ Divisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_s$ auch aus $s+1$ anderen Divisoren $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots \mathfrak{B}_s$ aufgebaut werden, welche mit den ersten durch lineare Gleichungen

$$2)\qquad \mathfrak{B}_i = \Sigma c_{ik} \mathfrak{A}_k \qquad (i, k = 0, 1, \dots s)$$

mit nicht verschwindender Determinante $|c_{ik}|$ verbunden sind. Eine solche Transformation der Grunddivisoren bringen wir bei Untersuchung der der Schar $\mathfrak{S}$ eigentümlichen Singularitäten oftmals in Anwendung.

Wir können nun der Schar $\mathfrak{S}$ in folgender Weise einen Verzweigungsdivisor der ersten, zweiten, ... s^{ten} Ordnung zuweisen. Ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, und betrachten wir innerhalb der Schar $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit $\mathfrak{S}_1$ der durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Divisoren, so kann es sein, daſs diese Unterschar den Faktor $\mathfrak{P}$ in einer höheren Potenz $\mathfrak{P}^{\alpha_1}$ enthält. Dann wollen wir in den ersten Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_1$ die Potenz $\mathfrak{P}^{\alpha_1 - 1}$ aufnehmen und aus den sämtlichen so zu bildenden Potenzen von Primteilern den Divisor

$$3\text{a})\qquad \mathfrak{Z}_1 = \Pi\, \mathfrak{P}^{\alpha_1 - 1} \qquad (\mathfrak{P} \text{ alle Punkte von } \mathfrak{R})$$

zusammensetzen. Bilden wir jetzt innerhalb der Unterschar $\mathfrak{S}_1$ die Gesamtheit der Divisoren, welche den Faktor $\mathfrak{P}^{\alpha_1+1}$ enthalten, so kann es eintreten, dafs die sich ergebende Unterschar $\mathfrak{S}_2$ den Punkt $\mathfrak{P}$ in einer höheren als der geforderten Multiplizität, nämlich in der Potenz $\mathfrak{P}^{\alpha_1+\alpha_2}$, enthält; dann nehmen wir in den zweiten Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_2$ die Potenz $\mathfrak{P}^{\alpha_2-1}$ auf und bilden in derselben Weise wie vorher

3b) $$\mathfrak{Z}_2 = \prod \mathfrak{P}^{\alpha_2-1} \qquad (\mathfrak{P} \text{ alle Punkte von } \mathfrak{R}).$$

In dieser Weise erhalten wir s bestimmte Divisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_s$, welche von der Auswahl der Fundamentaldivisoren unabhängig sind und daher als erster, zweiter, ... s^{ter} Verzweigungsdivisor der Schar $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden sollen.

Der so gebildete Begriff ist eine naturgemäfse Verallgemeinerung des Verzweigungsdivisors im ursprünglichen Sinne des Wortes. Ist nämlich $s = 1$, so ist offenbar der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_1$ der Schar $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ identisch mit dem zu der Variabeln

$$x = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_0}$$

gehörigen Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$; denn enthält $\mathfrak{Z}_1$ den Faktor $\mathfrak{P}^{\alpha-1}$ und nimmt die Variable x in $\mathfrak{P}$ den Wert a an, so verschwindet $x - a$, resp. wenn a unendlich ist, $\frac{1}{x}$ in $\mathfrak{P}$ in α^{ter} Ordnung, und hieraus folgt, dafs $\mathfrak{P}$ ein α-blättriger Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$, also $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_x$ identisch sind.

Wenn für einen Punkt $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche die Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_s$ der Reihe nach die Ordnungen $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots \alpha_s - 1$ besitzen, so können wir zufolge der vorher gegebenen Erklärung ganz analog wie auf S. 441 die Grunddivisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_s$ der Schar $\mathfrak{S}$ so annehmen, dafs sie in $\mathfrak{P}$ der Reihe nach die Ordnungszahlen

$$0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2, \ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s$$

erhalten. Wählen wir alsdann einen Divisor $\mathfrak{A}$ der Klasse A, welcher zu $\mathfrak{P}$ relativ prim ist, und bilden mit ihm die Funktionen

$$x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \cdots x_s = \frac{\mathfrak{A}_s}{\mathfrak{A}},$$

so ergeben sich für diese Funktionen in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ Reihenentwickelungen der Form

4) $$x_0 = 1 + \cdots, x_1 = \pi^{\alpha_1} + \cdots, x_2 = \pi^{\alpha_1+\alpha_2} + \cdots, \ldots x_s = \pi^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s} + \cdots,$$

wo π eine Funktion des Körpers ist, welche in $\mathfrak{P}$ die Ordnungszahl eins hat.

Die s Verzweigungsdivisoren der Schar $\mathfrak{S}$ können nun, wie wir zeigen wollen, mit Hilfe gewisser in der Kurventheorie häufig auftretender Determinanten vollständig dargestellt werden. Bilden wir nämlich, zunächst ohne irgend welche Normierungen der Grunddivisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_s$ vorzunehmen, mit einem beliebigen Divisor $\mathfrak{A}$ der Klasse A die Funktionen

$$x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \dots x_s = \frac{\mathfrak{A}_s}{\mathfrak{A}},$$

und aus diesen und ihren Differentialen die Determinante

$$5) \qquad \Delta_s = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_s \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 & \dots & dx_s \\ d^2x_0 & d^2x_1 & d^2x_2 & \dots & d^2x_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d^sx_0 & d^sx_1 & d^sx_2 & \dots & d^sx_s \end{vmatrix} = \Delta_s(x_0, x_1, x_2, \dots x_s),$$

so steht diese und gewisse ihrer Unterdeterminanten in innigem Zusammenhange mit den Verzweigungsdivisoren der Schar.

Um dies zu erweisen, betrachten wir zuerst den der Determinante Δ_s zugeordneten Divisor und bestimmen zuvörderst seine Ordnung und seine Pole. Ist nun u eine beliebige Variable des Körpers, so können wir die Determinante Δ_s auch so schreiben:

$$\Delta_s = \left| \frac{d^hx_0}{du^h}, \ \frac{d^hx_1}{du^h}, \ \frac{d^hx_2}{du^h}, \dots \frac{d^hx_s}{du^h} \right| du^{\frac{1}{2}s(s+1)} \quad (h = 0, 1, \dots s),$$

und wenn man an Stelle der Variabeln u eine andere v einführt, so erkennt man durch leichte Umformung, daſs die Determinante dieser Transformation gegenüber sich invariant verhält. In der That, durch successive Differentiation erhält man die Formel

$$\frac{d^hx_i}{dv^h} = \frac{d^hx_i}{du^h}\left(\frac{du}{dv}\right)^h + \frac{d^{h-1}x_i}{du^{h-1}}g_1 + \frac{d^{h-2}x_i}{du^{h-2}}g_2 + \dots + \frac{dx_i}{du}g_{h-1} + x_i g_h,$$

worin die Koeffizienten $g_1, g_2, \dots g_h$ bestimmte ganze Funktionen sind, welche nur von den Differentialquotienten $\frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}, \dots \frac{d^hu}{dv^h}$, aber nicht von den Differentialquotienten der Funktion x_i abhängen, und auf deren Form es hier weiter nicht ankommt. Daher erhält man durch successive Transformation der Zeilen der obigen Determinante

$$\left| x_i, \frac{dx_i}{dv}, \frac{d^2x_i}{dv^2}, \dots \frac{d^sx_i}{dv^s} \right| = \left| x_i, \frac{dx_i}{du}\frac{du}{dv}, \frac{d^2x_i}{du^2}\left(\frac{du}{dv}\right)^2, \dots \frac{d^sx_i}{du^s}\left(\frac{du}{dv}\right)^s \right|$$

oder

$$\left| x_i, \frac{dx_i}{dv}, \frac{d^2x_i}{dv^2}, \dots \frac{d^sx_i}{dv^s} \right| dv^{\frac{1}{2}s(s+1)} = \left| x_i, \frac{dx_i}{du}, \frac{d^2x_i}{du^2}, \dots \frac{d^sx_i}{du^s} \right| du^{\frac{1}{2}s(s+1)},$$

durch welche die aufgestellte Behauptung bewiesen wird. Der der Determinante Δ_s zugeordnete Divisor hat hiernach, weil das Differential du von der Ordnung $2p-2$ ist, die Ordnungszahl

$$s(s+1)(p-1).$$

Dieser Divisor ist in gewisser Weise von dem willkürlich eingeführten Nenner $\mathfrak{A}$ abhängig; ersetzt man aber diesen Nenner durch einen anderen Divisor $\mathfrak{B}$ der Klasse, so multiplizieren sich die Funktionen x nur mit der Funktion $\mu = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, die Determinante Δ_s also mit μ^{s+1}. Denn man hat

$$d^h(\mu x_i) = \mu d^h x_i + \binom{h}{1} d\mu d^{h-1} x_i + \binom{h}{2} d^2\mu d^{h-2} x_i + \cdots + d^h \mu,$$

also durch Umformung der Zeilen

$$|\mu x_i, d(\mu x_i), d^2(\mu x_i), \ldots d^s(\mu x_i)| = |\mu x_i, \mu d x_i, \mu d^2 x_i, \ldots \mu d^s x_i|,$$

oder

$$\Delta_s\left(\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{B}}, \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}}, \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}}, \ldots \frac{\mathfrak{A}_s}{\mathfrak{B}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right)^{s+1} \Delta_s\left(\frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \ldots \frac{\mathfrak{A}_s}{\mathfrak{A}}\right).$$

Multipliziert man also die Determinante $\Delta_s\left(\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{A}}\right)$ mit $\mathfrak{A}^{s+1}$, so wird das Produkt von der Auswahl des Nenners $\mathfrak{A}$ ganz unabhängig und besitzt überdies keinerlei Unendlichkeitsstellen mehr, da Δ_s andere Pole als die in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Punkte nicht besitzen kann. Wir dürfen daher setzen:

$$\Delta_s = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}^{s+1}}, \tag{6}$$

wo $\mathfrak{G}$ einen ganzen Divisor bedeutet, dessen Ordnung gleich

$$s(s+1)(p-1) + (s+1)n$$

ist. Dieser Divisor ist überdies nur von der Schar $\mathfrak{S}$ selbst, nicht aber von der Auswahl der Grunddivisoren abhängig; denn wenn wir durch die Transformationsformeln (2) an Stelle der Grunddivisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_s$ $s+1$ andere $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots \mathfrak{B}_s$ einführen, so multipliziert sich die Determinante Δ_s bloſs mit einer Konstanten

$$C = |c_{ik}|,$$

der Divisor $\mathfrak{G}$ bleibt also ungeändert.

In den Zähler $\mathfrak{G}$ der Determinante Δ_s treten nun die Verzweigungsdivisoren in bestimmter Weise ein. Es sei nämlich $\mathfrak{P}$ wieder ein beliebiger Punkt der Riemannschen Fläche, und man bringe, so wie

vorher in (4) angegeben, durch lineare Transformation die Grundfunktionen der Schar auf die Form

$$x_0 = 1 + \cdots,\quad x_1 = \pi^{\alpha_1} + \cdots,\quad x_2 = \pi^{\alpha_1+\alpha_2} + \cdots,\quad x_s = \pi^{\alpha_1+\cdots+\alpha_s} + \cdots.$$

Bildet man aber die Determinante

$$\Delta_s(x_0, x_1, x_2, \ldots x_s) = \left| \frac{d^h x_0}{d\pi^h}, \frac{d^h x_1}{d\pi^h}, \frac{d^h x_2}{d\pi^h}, \ldots \frac{d^h x_s}{d\pi^h} \right| \qquad (h = 0, 1, \ldots s)$$

für $s+1$ Funktionen, welche beliebige Potenzen von π sind,

$$x_0 = \pi^{\mu_0},\quad x_1 = \pi^{\mu_1},\quad x_2 = \pi^{\mu_2}, \ldots x_s = \pi^{\mu_s},$$

so erhält dieselbe den Wert

$$\pi^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_s-\frac{1}{2}s(s+1)} \cdot D(\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_s),$$

wobei $D(\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_s)$ das Differenzenprodukt der Exponenten μ bedeutet und somit für ungleiche Exponenten μ von Null verschieden ist. Es ist nämlich

$$\Delta_s(\pi^{\mu_0}, \pi^{\mu_1}, \pi^{\mu_2}, \ldots \pi^{\mu_s})$$
$$= \left| \pi^{\mu_h}, \mu_h \pi^{\mu_h-1}, \mu_h(\mu_h-1)\pi^{\mu_h-2}, \ldots \mu_h(\mu_h-1)\ldots(\mu_h-s+1)\pi^{\mu_h-s} \right|,$$

also ergiebt sich in diesem Falle in der That nach Herausnahme der Potenzen von π und Kolonnentransformation

$$\Delta_s = \pi^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_s-1-2-\cdots-s} \left| 1, \mu_h, \mu_h^2, \ldots \mu_h^s \right|$$
$$= \pi^{\Sigma\mu - \frac{1}{2}s(s+1)} \prod_{\substack{\alpha > \beta \\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots s}} (\mu_\alpha - \mu_\beta).$$

In unserem Falle haben wir nun, wenn wir uns auf das erste Glied der Reihenentwickelungen beschränken:

$$\mu_0 = 0,\quad \mu_1 = \alpha_1,\quad \mu_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \ldots \mu_s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s$$

zu setzen und erhalten so, da diese Zahlen alle voneinander verschieden sind, das Resultat, dafs die Determinante Δ den Faktor $\mathfrak{P}$ genau in der Ordnung

$$s\alpha_1 + (s-1)\alpha_2 + (s-2)\alpha_3 + \cdots + \alpha_s - \frac{1}{2}s(s+1)$$

enthält. In gleicher Ordnung enthält aber diesen Faktor das Produkt

$$\mathfrak{Z}_1^s \mathfrak{Z}_2^{s-1} \mathfrak{Z}_3^{s-2} \ldots \mathfrak{Z}_s.$$

Dieses Produkt ist also der Zähler $\mathfrak{G}$ in (6), und wir dürfen daher setzen

$$\Delta_s = \frac{\mathfrak{Z}_1^s \mathfrak{Z}_2^{s-1} \mathfrak{Z}_3^{s-2} \cdots \mathfrak{Z}_s}{\mathfrak{A}^{s+1}}, \tag{7}$$

wodurch der wesentliche Teil der Determinante Δ_s als Produkt der Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_s$ dargestellt ist. Sind die Ordnungen dieser Divisoren resp. gleich $w_1, w_2, \ldots w_s$, so ergiebt sich, weil die Ordnung von Δ_s gleich $s(s+1)(p-1)$ ist, die Relation

$$8)\quad s w_1 + (s-1) w_2 + \cdots + 2 w_{s-1} + w_s - (s+1) n = s(s+1)(p-1).$$

Diese Formel ist eine wichtige Verallgemeinerung der für den Fall $s = 1$ geltenden, schon früher abgeleiteten Grundformel

$$w - 2n = 2(p-1).$$

Setzt man in der Gleichung (7) den gröfsten gemeinsamen Teiler $\frac{1}{\mathfrak{A}}$ der Funktionen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_s$ gleich $\mathfrak{Z}_0$, so erhält dieselbe die noch etwas gleichmäfsigere und für spätere Zwecke geeignetere Gestalt

$$7\text{a})\qquad \Delta_s = \mathfrak{Z}_0^{s+1} \mathfrak{Z}_1^s \mathfrak{Z}_2^{s-1} \cdots \mathfrak{Z}_{s-1}^2 \mathfrak{Z}_s;$$

da hiernach der gröfste gemeinsame Teiler eines Systems von Funktionen des Körpers in eine den Divisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_s$ völlig koordinierte Stellung rückt, so kann er als der Verzweigungsdivisor der nullten Ordnung angesehen werden. Man kann daher die früher eingeführte Voraussetzung aufheben, dafs die Grunddivisoren der Schar $\mathfrak{S}$ teilerfremd sein sollen; dann ergiebt auch die Anwendung der oben gegebenen Vorschrift als ersten der zu bildenden Verzweigungsdivisoren den gröfsten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{Z}_0$.

§ 4.

Wir wollen jetzt die soeben durchgeführte Betrachtung verallgemeinern und hierdurch die Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \ldots \mathfrak{Z}_s$ selbst durch analytische Ausdrücke darstellen. Betrachten wir die aus den ersten $k+1$ Zeilen der Determinante Δ_s bestehende Matrix

$$1)\qquad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_s \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 & \ldots & dx_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d^k x_0 & d^k x_1 & d^k x_2 & \ldots & d^k x_s \end{pmatrix},$$

so können wir aus ihr $\binom{s+1}{k+1}$ Determinanten $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden; der gröfste gemeinsame Teiler Δ_k dieser Determinanten ist dann, wie jetzt sehr leicht zu sehen, gleich

$$\mathfrak{Z}_0^{k+1} \mathfrak{Z}_1^k \mathfrak{Z}_2^{k-1} \cdots \mathfrak{Z}_{k-1}^2 \mathfrak{Z}_k.$$

Denn aus dem erweiterten Multiplikationstheorem der Determinanten folgt ganz analog, wie vorher für $k = s$, dafs der Teiler Δ_k bei linearer Transformation der Grunddivisoren ungeändert bleibt; führt man aber für einen Punkt $\mathfrak{P}$ das in (4) des vorigen Abschnittes benutzte Fun-

damentalsystem ein, so erweisen sich die Zähler aller Determinanten als durch obiges Produkt teilbar, und die erste Determinante der Matrix erhält nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen in $\mathfrak{P}$ genau dieselbe Ordnungszahl wie jenes Produkt; damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen. Bilden wir daher der Reihe nach die Determinantenteiler

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{s-1}, \Delta_s$$

und deren Quotienten

$$\mathfrak{E}_0 = \Delta_0, \; \mathfrak{E}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \; \mathfrak{E}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots \mathfrak{E}_{s-1} = \frac{\Delta_{s-1}}{\Delta_{s-2}}, \; \mathfrak{E}_s = \frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}},$$

so ist

$$\mathfrak{E}_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} = \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2 \cdots \mathfrak{Z}_{k-1} \mathfrak{Z}_k,$$

also

2) $$\mathfrak{Z}_k = \frac{\mathfrak{E}_k}{\mathfrak{E}_{k-1}}.$$

Die Divisoren $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \ldots \mathfrak{E}_{s-1}, \mathfrak{E}_s$ besitzen eine gewisse Verwandtschaft mit den Elementarteilern, sind aber von diesen wohl zu unterscheiden, weil es bei der Bildung von Δ_k nicht auf alle Unterdeterminanten $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung des zu Δ_s gehörigen quadratischen Systems, sondern nur auf die mit den ersten k Differentialen gebildeten Determinanten ankommt. Wir wollen $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \ldots \mathfrak{E}_{s-1}, \mathfrak{E}_s$ als die Differentialteiler der Funktionenschar $(x_0, x_1, \ldots x_s)$ bezeichnen, dann gilt nach der letzten Formel der Satz:

> Man erhält den Verzweigungsdivisor k^{ter} Ordnung einer Funktionenschar, wenn man den Differentialteiler k^{ter} Ordnung durch den vorhergehenden dividiert.

Befreien wir jetzt endlich die sämtlichen Determinanten der Matrix (1) von ihrem gröfsten gemeinsamen Teiler Δ_k, so erhalten wir $\binom{s+1}{k+1}$ ganze Divisoren, welche wir die Tangentialkoordinaten k^{ter} Ordnung der Divisorenschar $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_s)$ nennen wollen, weil sie die naturgemäfse Verallgemeinerung der Tangential- oder Linienkoordinaten einer ebenen Kurve sind, und welche, wie man leicht sieht, nur durch die Divisorenschar, nicht aber durch den zur Bildung der Funktionen eingeführten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{Z}_0$ bestimmt sind. Die Ordnung dieser Tangentialkoordinaten, die mit $\mathfrak{T}_k$ bezeichnet sein mögen, sei n_k; dann ist $n_0 = n$ und $n_s = 0$ zu setzen. Da z. B. für die erste Unterdeterminante $\Delta_k^{(1)}$ des obigen Systems (1) die Gleichung gilt:

3) $$\Delta_k^{(1)} = \Delta_k \mathfrak{T}_k^{(1)} = \mathfrak{Z}_0^{k+1} \mathfrak{Z}_1^k \mathfrak{Z}_2^{k-1} \ldots \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{T}_k^{(1)},$$

und $\Delta_k^{(1)}$ die Ordnung $k(k+1)(p-1)$ hat, so hängen die Ordnungszahlen $n, n_1, n_2, \ldots n_{s-1}$ und die Verzweigungszahlen $w_1, w_2, \ldots w_{s-1}, w_s$ durch Gleichungen zusammen, welche die Verallgemeinerung der früher aufgestellten Plückerschen Formeln bilden:

$$4)\quad \begin{cases} n_1 - 2n + w_1 = 2(p-1) \\ n_2 - 3n + 2w_1 + w_2 = 2 \cdot 3(p-1) \\ n_3 - 4n + 3w_1 + 2w_2 + w_3 = 3 \cdot 4(p-1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_{s-1} - sn + (s-1)w_1 + (s-2)w_2 + \cdots + w_{s-1} = (s-1)s(p-1) \\ -(s+1)n + sw_1 + (s-1)w_2 + \cdots + 2w_{s-1} + w_s = s(s+1)(p-1). \end{cases}$$

Diese Formeln lassen sich auch durch Subtraktion untereinanderstehender Gleichungen in folgende Gestalt setzen:

$$4\text{a})\quad 2k(p-1) = -n + w_1 + w_2 + \cdots + w_k + n_k - n_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots s),$$

und wenn man nochmals untereinanderstehende Gleichungen subtrahiert, so erhält man die Relationen

$$4\text{b})\quad \begin{aligned} 2(p-1) &= n_1 - 2n + w_1 \\ &= n_2 - 2n_1 + n + w_2 \\ &= n_3 - 2n_2 + n_1 + w_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= n_{s-1} - 2n_{s-2} + n_{s-3} + w_{s-1} \\ &= \phantom{n_{s-1}} - 2n_{s-1} + n_{s-2} + w_s. \end{aligned}$$

Die letzten Formeln erleiden keine Veränderung, wenn man n_i mit n_{s-i-1} und gleichzeitig w_i mit w_{s-i+1} vertauscht. Man kann sich denn auch leicht davon überzeugen, dafs, wenn man von den Punktkoordinaten $x_0, x_1, \ldots x_s$ durch die ersten Unterdeterminanten der Determinante Δ_s zu den Tangentialkoordinaten $(s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Divisorenschar übergeht, in den polar gegenüberstehenden Formeln die Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_s$, $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{Z}_{s-1}, \ldots \mathfrak{Z}_i$ und $\mathfrak{Z}_{s+1-i}$ einfach ihre Rollen vertauscht haben, worauf wir aber nicht weiter eingehen. Die in § 1 gegebenen Ausführungen sind die geometrische Interpretation der hier auseinandergesetzten algebraischen Thatsachen für den Fall $s = 2$; wir wollen jetzt dieselben Formeln für die Raumkurven zur Anwendung bringen, wo wir dann nur $s = 3$ zu setzen haben.

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Raumkurven und Divisorenscharen. — Die Divisoren der stationären Punkte, Geraden und Ebenen. Anzahlrelationen. — Hinreichende Bedingung dafür, dafs eine Funktion des Körpers als ganze Funktion der Koordinaten der Raumkurve dargestellt werden kann. — Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche eine durch die Raumkurve hindurchgelegte Fläche erfüllen mufs. — Der Divisor der Doppelpunkte einer Raumkurve.

§ 1.

Bei der Untersuchung der algebraischen Raumkurven gehen wir, analog wie bei den ebenen Kurven, von der Annahme aus, dafs innerhalb eines Körpers $K(z, u)$ vier Funktionen x_0, x_1, x_2, x_3 gegeben seien, welche, wenn $\mathfrak{M} = \frac{1}{\mathfrak{A}}$ ihr gröfster gemeinschaftlicher Teiler ist, die Divisorendarstellung erhalten mögen:

$$1) \qquad x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \quad x_3 = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}};$$

hierin bedeuten $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ ganze und teilerfremde Divisoren einer und derselben Klasse A von der Ordnung n.

Durch diese Gleichungen werden die Tetraederkoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 eines veränderlichen Kurvenpunktes P, die nur ihren Verhältnissen nach in Betracht kommen, als Funktionen eines Punktes $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche dargestellt, welcher hierbei die Rolle des auf der Kurve variierenden Parameters übernimmt. Umgekehrt entspricht auch im allgemeinen einem Punkte P der Kurve ein und nur ein Punkt $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche, wenn wir noch die Voraussetzung hinzufügen, dafs der Körper $K\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right)$ mit dem Körper $K(z, u)$ identisch ist und somit auch u und z als rationale Funktionen der Quotienten $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$ dargestellt werden können. Alsdann kann nach den Ausführungen des § 4 der vierundzwanzigsten Vorlesung (S. 418) die Eindeutigkeit der Beziehung zwischen $\mathfrak{P}$ und P nur in einzelnen singulären Punkten der Raumkurve verloren gehen. Wenn aber dem Kurvenpunkte P mehrere Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ entsprechen, so gehen durch ihn mehrere Zweige hindurch, welchen resp. $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$

zugeordnet sind. Durch einen Punkt der Riemannschen Fläche wird also auf der Kurve stets ein Punkt nebst einem zugehörigen Zweige charakterisiert.

Wenn wir in den Gleichungen (1) den Nenner $\mathfrak{A}$ unserer Funktionen durch irgend einen äquivalenten $\mathfrak{B}$ ersetzen, so erhalten die Funktionen x_0, x_1, x_2, x_3 nur den Faktor $\mu = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, während ihre Verhältnisse hierbei keine Veränderung erfahren. Da aber nur diese für uns von Wichtigkeit sind, so spielt der Nenner $\mathfrak{A}$ eine nebensächliche Rolle, und es kommt in Wahrheit bei allen folgenden Betrachtungen immer nur auf die Zählerdivisoren der Funktionen x, also auf die Proportion an:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \mathfrak{A}_0 : \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \mathfrak{A}_3.$$

Soll ferner die Kurve eine räumliche sein, so darf zwischen den Funktionen x keine lineare homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten bestehen; die Divisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ müssen also linear unabhängig und die Dimension der Klasse A somit mindestens gleich vier sein. Jeder beliebigen Gleichung einer Ebene

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

entspricht alsdann ein ganzer Divisor n^{ter} Ordnung

$$c_0 \mathfrak{A}_0 + c_1 \mathfrak{A}_1 + c_2 \mathfrak{A}_2 + c_3 \mathfrak{A}_3,$$

durch welchen der Schnitt der Ebene und der Kurve dargestellt wird. Die Kurve hat also die Ordnung n und nach den Ausführungen auf S. 418 das Geschlecht p; sie soll daher durch C_n^p bezeichnet werden.

Die Divisoren $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ können, ebenso wie auf S. 422, durch lineare Gleichungen der Form

$$\mathfrak{B}_i = \sum_k a_{ik} \mathfrak{A}_k \qquad |a_{ik}| \neq 0.$$

transformiert werden; eine solche Substitution entspricht einer Verlegung des Koordinatentetraeders oder einer kollinearen räumlichen Abbildung der Kurve.

Wir wollen nun zunächst die Formeln aufstellen, welche das Analogon der Plückerschen Formeln der ebenen Geometrie sind und die Beziehungen zwischen den verschiedenen charakteristischen Zahlen der Kurve regeln, und im Zusammenhange hiermit die geometrische Bedeutung der drei Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ der Divisorenschar $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ erörtern. Hierzu ist es erforderlich, die Kurve nicht blofs als Punktgebilde aufzufassen, sondern auch die Gesamtheit ihrer Tangenten und Schmiegungsebenen zu betrachten.

Ziehen wir in einem Punkte P die Tangente, so hat man den Punkt $P = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit dem Nachbarpunkte

$$P' = (x_0 + dx_0,\ x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ x_3 + dx_3)$$

zu verbinden; die Plückerschen Linienkoordinaten dieser Tangente sind also proportional den Determinanten der Matrix:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix}.$$

Bei Anwendung der Formel (3) auf S. 458 findet man somit für die sechs Koordinaten p_{ik} der Tangente im Punkte P die Gleichungen

$$p_{ik} = x_i\,dx_k - x_k\,dx_i = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{A}^2}\,\mathfrak{T}_1^{(ik)},$$

worin $\mathfrak{Z}_1$ den ersten Verzweigungsdivisor der Schar $\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ bedeutet. Um die geometrische Bedeutung dieses Divisors festzustellen, bringen wir für den zugehörigen Punkt $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche das Fundamentalsystem der Schar $\mathfrak{S}$ auf die auf S. 453 dargelegte Normalform, bei welcher

$$\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3$$

in $\mathfrak{P}$ der Reihe nach die Ordnungszahlen

$$0,\quad \alpha_1,\quad \alpha_1 + \alpha_2,\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

erhalten; dann stellt die Gleichung

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$$

eine beliebige Ebene durch den Kurvenpunkt P dar, und eine solche Ebene hat an dieser Stelle mit dem durch $\mathfrak{P}$ charakterisierten Kurvenzweige im allgemeinen nur einen einfachen Schnittpunkt, wenn aber $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Z}_1$ auftritt, einen Schnitt der Ordnung α_1 gemein. Daher wird der Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_1$ durch diejenigen Kurvenpunkte P geliefert, für welche alle Ebenen durch P mit der Kurve in P einen Schnitt von höherer als erster Ordnung besitzen, und wir können ihn daher auch, analog wie bei den ebenen Kurven, als den „Divisor der stationären oder der Rückkehrpunkte“ bezeichnen.

Betrachtet man eine Raumkurve als Tangentengebilde, so bezeichnet man bekanntlich als ihren Rang n_1 die Anzahl der Punkte, in denen eine beliebige gegebene Gerade g des Raumes von den Tangenten der Kurve geschnitten wird; diese Zahl ist aber, wie jetzt leicht zu sehen ist, gleich der Ordnung der ganzen Divisoren $\mathfrak{T}_1^{(ik)}$. Denn wenn die Gerade g als Verbindungslinie der Punkte (a_0, a_1, a_2, a_3)

und (b_0, b_1, b_2, b_3) gegeben ist und somit als Koordinaten die Unterdeterminanten der Matrix besitzt:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

so erhält man die Kurvenpunkte, deren Tangenten die Gerade g schneiden, durch Auflösung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

die entsprechenden Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche werden also in der That nach Absonderung des Faktors $\mathfrak{Z}_1 : \mathfrak{A}^2$ durch die Primfaktoren des Divisors der Ordnung n_1 geliefert:

$$\sum_{ik} \mathfrak{T}_1^{(ik)} (a_l b_m - a_m b_l),$$

worin (lm) die Ergänzungskombination zu (ik) bedeutet. Zwischen dem Range n_1 der Kurve und der Ordnung w_1 des Divisors $\mathfrak{Z}_1$ der stationären Punkte besteht also nach der ersten Formel (4) auf S. 459 die Gleichung

$$2) \qquad n_1 = 2(p-1) + 2n - w_1.$$

Wenden wir uns jetzt dazu, die Gleichung der Schmiegungsebene der Kurve im Punkte P aufzustellen, so lautet dieselbe, wenn $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ die laufenden Koordinaten sind:

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ d^2x_0 & d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Als Klasse n_2 der Kurve bezeichnet man alsdann die Anzahl der Schmiegungsebenen, welche durch einen beliebigen Raumpunkt (p_0, p_1, p_2, p_3) hindurchgehen; um diese zu erhalten, haben wir für die laufenden Koordinaten $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ die gegebenen (p_0, p_1, p_2, p_3) einzusetzen und die Ordnung des Divisors zu bestimmen, welcher sich aus der obigen Determinante nach Weglassung des gröfsten gemeinsamen Teilers der Koeffizienten von p_0, p_1, p_2, p_3 ergiebt.

Bezeichnen wir aber die Adjunkten der Koordinaten $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ in obiger Determinante mit u_0, u_1, u_2, u_3, so erhalten wir nach der Formel (3) der vorigen Vorlesung

$$u_0 = \frac{\mathfrak{Z}_1^2 \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{T}_2^{(0)}}{\mathfrak{A}^3}, \quad u_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1^2 \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{T}_2^{(1)}}{\mathfrak{A}^3}, \quad u_2 = \frac{\mathfrak{Z}_1^2 \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{T}_2^{(2)}}{\mathfrak{A}^3}, \quad u_3 = \frac{\mathfrak{Z}_1^2 \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{T}_2^{(3)}}{\mathfrak{A}^3},$$

also als Gleichung der Kurve in Ebenenkoordinaten

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_2 = \mathfrak{T}_2^{(0)} : \mathfrak{T}_2^{(1)} : \mathfrak{T}_2^{(2)} : \mathfrak{T}_2^{(3)},$$

wo nun die Klasse n_2 gleich der Ordnung der vier Divisoren $\mathfrak{T}_2^{(i)}$ ist.

In diesen Gleichungen wird der zweite Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_2$ durch die Gesamtheit derjenigen Punkte der Kurve geliefert, für welche die sämtlichen Berührungsebenen oskulieren; denn machen wir wieder von der auf S. 462 angewendeten Normalform Gebrauch, so stellt die Gleichung

$$c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

das Büschel der Ebenen durch die Tangente im Punkte P dar, und diese Ebenen haben in ihrer Gesamtheit im allgemeinen mit dem Kurvenzweige in P einen Schnitt von der Ordnung $\alpha_1 + 1$, für Punkte aber, die dem zweiten Verzweigungsdivisor zugehören, einen Schnitt von höherer Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2$. Aus diesem Grunde können wir $\mathfrak{Z}_2$ auch als den D i v i s o r d e r s t a t i o n ä r e n T a n g e n t e n bezeichnen. Für die Klasse der Kurve erhält man hiernach aus der zweiten Gleichung (4) die Relation

$$3) \qquad n_2 = 6(p-1) + 3n - 2w_1 - w_2.$$

Gehen wir jetzt schliefslich zur Bestimmung derjenigen Punkte über, in welchen die Schmiegungsebene vier konsekutive Punkte mit der Kurve gemein hat, so haben wir in der obigen Determinante

$$\xi_i = x_i + 3dx_i + 3d^2x_i + d^3x_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

zu setzen und erhalten so die Gleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ d^2x_0 & d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 \\ d^3x_0 & d^3x_1 & d^3x_2 & d^3x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Der dieser Determinante zugeordnete Divisor ist nach den früheren Auseinandersetzungen gleich $\frac{\mathfrak{Z}_1^3 \mathfrak{Z}_2^2 \mathfrak{Z}_3}{\mathfrak{A}^4}$, wobei der dritte Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_3$ eben die Punkte ergiebt, in denen die Schmiegungsebene hyperoskuliert; denn für die schon zweimal angewendete Normalform

des Fundamentalsystems der Schar $\mathfrak{S}$ ist $x_3 = 0$ die Gleichung der Schmiegungsebene, und diese hat mit der Kurve in P im allgemeinen einen Schnitt der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$, für die Primfaktoren des Verzweigungsteilers $\mathfrak{Z}_3$ aber einen Schnitt der Ordnung $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ gemein. Wir können daher $\mathfrak{Z}_3$ auch als den Divisor der stationären Schmiegungsebenen oder der Wendeberührungsebenen bezeichnen. Für die Anzahl w_3 dieser Ebenen haben wir nach dem Früheren die Gleichung

4) $$w_3 = 12(p-1) + 4n - 3w_1 - 2w_2.$$

Betrachtet man eine Kurve als Punktgebilde, so besitzt sie im allgemeinen weder stationäre Punkte noch stationäre Tangenten, wohl aber stationäre Schmiegungsebenen; denn die ersten beiden Singularitäten werden durch gröfste gemeinsame Teiler gegeben, und es kann hier als eine Ausnahme angesehen werden, wenn mehrere Divisoren einen gemeinsamen Teiler haben, während der Divisor der Wendeberührungsebenen durch eine einzige Determinante bestimmt wird. Betrachtet man aber die Kurve als Ebenengebilde, so besitzt sie stets stationäre Punkte und nur ausnahmsweise stationäre Tangenten und Schmiegungsebenen, wie aus dem Prinzip der Dualität folgt. Diese Verhältnisse, die bekannten Anschauungen der Geometrie der ebenen Kurven analog sind, müssen bei Anwendung der Formeln (2), (3), (4) berücksichtigt werden.

Die Formeln (2) und (3) unterscheiden sich nicht wesentlich von den früher abgeleiteten verallgemeinerten Plückerschen Formeln der Ebene und sind durch Übertragung derselben auf räumliche Gebilde bereits von Cayley, freilich noch ohne Benutzung des Geschlechtsbegriffes und darum in anderer und speziellerer Form, aufgestellt worden. Sie finden ihre Ergänzung in der Formel (4), welche bei Raumkurven neu hinzutritt und hier noch aus den beiden ersten durch das Prinzip der Dualität erhalten werden kann, während für Kurven in mehrdimensionalen Räumen die beiden Plückerschen Formeln nicht mehr ausreichen.

Das Problem der algebraischen Bestimmung der Wendeberührungsebenen einer Raumkurve ist von Clebsch*) in dem speziellen Falle gelöst worden, dafs die Raumkurve als vollständiger Schnitt zweier Flächen $F_\mu = 0$ und $F_\nu = 0$ der μ^{ten} und ν^{ten} Ordnung gegeben werden kann; diese Voraussetzung ist aber, wie wir sehen werden, im allgemeinen nicht erfüllbar. Man hat dann zunächst für die Ordnung der Kurve $n = \mu\nu$ und, da die Kurve bei allgemeiner Lage der Flächen keine

*) Über die Wendungsberührebenen der Raumkurven. Crelles Journ., Bd. 63, S. 1—8 (1863).

stationären Punkte oder Tangenten hat, so ist $w_1 = w_2 = 0$. Da ferner die Tangente der Kurve der Schnitt der beiden Tangentialebenen

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i} \xi_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial F_\nu}{\partial x_i} \xi_i = 0$$

ist, so ergiebt sich der Rang der Kurve aus den Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_0} & \frac{\partial F_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial F_\mu}{\partial x_2} & \frac{\partial F_\mu}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_\nu}{\partial x_0} & \frac{\partial F_\nu}{\partial x_1} & \frac{\partial F_\nu}{\partial x_2} & \frac{\partial F_\nu}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

gleich

$$n_1 = (\mu + \nu - 2)\, n = \mu \nu\, (\mu + \nu - 2);$$

es ist also nach (2)

$$2\,(p-1) = n_1 - 2n = \mu\nu\,(\mu + \nu - 4).$$

Die Klasse der Kurve ist

$$n_2 = 6\,(p-1) + 3n = 3\,\mu\nu\,(\mu + \nu - 3),$$

und als Zahl der Wendeberührungsebenen ergiebt sich die von Clebsch angegebene Formel

$$w_3 = 12\,(p-1) + 4n = 2\,\mu\nu\,(3\mu + 3\nu - 10).$$

Für eine Raumkurve vierter Ordnung, welche der Schnitt zweier Oberflächen zweiter Ordnung ist, hat man z. B. $\mu = \nu = 2$, also $n = 4$, $p = 1$; ferner ist $w_1 = w_2 = 0$, wenn die Flächen keine Berührung haben. Daher ist eine derartige Kurve vom Range 8, von der Klasse 12, und sie hat 16 Wendeberührungsebenen. Ferner ist, wenn die Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 als ganze Funktionen n^{ter} Ordnung eines Parameters t dargestellt werden können, das Geschlecht $p = 0$, weil der Körper $K(x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit dem Körper der rationalen Funktionen von t identisch ist; eine solche Kurve heifst eine rationale Raumkurve n^{ter} Ordnung. Besitzen die ganzen Funktionen x_0, x_1, x_2, x_3 keine Besonderheit, so ist wieder w_1 und $w_2 = 0$, und folglich ist der Rang einer solchen Kurve $n_1 = 2\,(n-1)$, die Klasse $n_2 = 3\,(n-2)$ und w_3 ist gleich $4\,(n-3)$. Eine rationale Raumkurve vierter Ordnung besitzt also nur 4 Wendeberührungsebenen und sie ist vom Range und der Klasse 6.

§ 2.

Aufser den Singularitäten, welche im vorigen Abschnitte ausschliefslich in Betracht gezogen werden mufsten und welche durch das Verhalten eines einzelnen Kurvenzweiges bestimmt waren, kann eine

räumliche Kurve, wie schon oben bemerkt, auch „mehrzweigige“ Singularitäten besitzen. Allgemein ist für die durch die Gleichungen

$$x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \quad x_3 = \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}}$$

definierte Raumkurve C_n^p der Punkt P mit den Koordinaten a_0, a_1, a_2, a_3 ein singulärer, wenn die Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

einen Divisor höherer als erster Ordnung gemein haben, und es entspricht alsdann den sämtlichen Primteilern $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ dieses Divisors ein und derselbe Punkt P der Raumkurve. Wir wollen zuvörderst zur Vereinfachung der folgenden Untersuchungen, wie dies meist geschieht, die Raumkurve als frei von Singularitäten voraussetzen; dann entspricht jedem beliebigen Punkte P der Raumkurve ein und nur ein Punkt $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche, und wir brauchen zwischen den Punkten der Kurve und denen der Riemannschen Fläche nicht mehr weiter zu unterscheiden und könnten jetzt auch die ersteren durch deutsche Buchstaben bezeichnen.

Diese Annahme stellt hier eine viel geringere Einschränkung der Allgemeinheit dar, als die analoge Voraussetzung bei ebenen Kurven bedeuten würde. Denn nach dem auf S. 418 bewiesenen Satze kann jede beliebige ebene Kurve eindeutig auf eine doppelpunktfreie Raumkurve abgebildet werden. Es giebt daher, wenn eine beliebige Riemannsche Fläche vom Geschlechte p durch eine Gleichung $F(u, z) = 0$ gegeben ist, stets doppelpunktfreie Raumkurven, welche auf diese Flächen eindeutig bezogen sind. Hingegen erhält eine auf diese Fläche bezogene ebene Kurve n^{ter} Ordnung zufolge der Formel

$$d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$$

im allgemeinen Doppelpunkte, vor allem immer dann, wenn p nicht gerade eine Dreieckszahl $1, 3, 6, 10, \ldots$ ist.

Wir betrachten nun auch hier wieder denjenigen Funktionenring, welcher durch die Gesamtheit der ganzen homogenen Funktionen von x_0, x_1, x_2, x_3 gebildet wird. Jede Funktion ν^{ter} Ordnung dieses Ringes besitzt den Nenner $\mathfrak{A}^\nu$; es ist aber wichtig, dafs dieser Satz in folgender Weise eine Umkehrung zuläfst:

(I) Eine Funktion des Körpers, deren Nenner die ν^{te} Potenz des Divisors $\mathfrak{A}$ ist, kann stets als ganze homogene Funktion

der Ordnung ν von x_0, x_1, x_2, x_3 dargestellt werden, vorausgesetzt, dafs der Exponent

$$\nu > 2(n-3) - 2\frac{p-1}{n}$$

ist.

Derselbe Satz kann offenbar auch so ausgesprochen werden:

(Ia) Sind $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ vier ganze linear unabhängige Divisoren einer Klasse A von der Ordnung n, so kann jeder ganze Divisor der Klasse A^ν als ganze homogene Funktion ν^{ter} Ordnung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ dargestellt werden, vorausgesetzt, dafs der Exponent

$$\nu > 2(n-3) - 2\frac{p-1}{n}$$

ist.

Hierbei tritt also als wesentliche neue Voraussetzung die hinzu, dafs der Exponent ν oberhalb einer bestimmten unteren Grenze liegt, und man kann sich leicht*) davon überzeugen, dafs ohne eine solche einschränkende Voraussetzung der Satz gar nicht richtig wäre.

Der Beweis dieses Theoremes besteht in einer Zurückführung auf den in § 3 der fünfundzwanzigsten Vorlesung bewiesenen analogen Satz für ebene Kurven. Da wir hierbei aber diejenigen ebenen Kurven zu untersuchen haben, welche Projektionen der gegebenen Raumkurve sind, so wird es gut sein, einige Bemerkungen über derartige Projektionen voraufzuschicken.

Zwischen den drei Gröfsen x_1, x_2, x_3 besteht, wie wir wissen, eine homogene Gleichung n^{ten} Grades

$$F_0(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

durch welche eine Kurve in der Ebene $x_0 = 0$ oder auch der zugehörige von der gegenüberliegenden Ecke $A_0 = (1, 0, 0, 0)$ des Koordinatentetraeders ausgehende Projektionskegel dargestellt wird. Offenbar ist aber dieser Projektionskegel identisch mit demjenigen, durch welchen die Raumkurve von A_0 aus projiziert wird; denn sind x_0, x_1, x_2, x_3 die Koordinaten eines beliebigen Kurvenpunktes P, so erhält man für den zugehörigen Projektionsstrahl von A_0 die Parametergleichungen

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x_0 + \lambda \cdot 1 : x_1 + \lambda \cdot 0 : x_2 + \lambda \cdot 0 : x_3 + \lambda \cdot 0,$$

so dafs die letzten drei Koordinaten eines auf dem Strahle veränderlichen Punktes fest bleiben, während die erste beliebige Werte erhält. Umgekehrt aber kann auch jede Projektion der Raumkurve von einem beliebigen Punkte A_0 auf eine beliebige Ebene A_0 des Raumes nach einer vorausgeschickten linearen Transformation der Koordinaten in der eben angegebenen einfachen Weise analytisch dargestellt werden.

*) Z. B. an einer rationalen Raumkurve vierter Ordnung.

Wählen wir nämlich in der gegebenen Ebene A_0 ein Koordinatendreieck $A_1 A_2 A_3$, so können wir durch Transformation von dem ursprünglichen Koordinatentetraeder zu dem neuen $A_0 A_1 A_2 A_3$ übergehen, und hierdurch sind wir auf den vorher besprochenen Spezialfall zurückgekommen.

Ziehen wir jetzt zwei Projektionen der Raumkurve in Betracht, indem wir die beiden Gleichungen

$$1) \qquad F_0(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad F_1(x_0, x_2, x_3) = 0$$

bilden, so liegt das erste Projektionscentrum A_0 in der Ebene A_1 der zweiten Kurve, und das zweite A_1 in der Ebene A_0 der ersten, und umgekehrt können zwei Projektionen der Raumkurve von der besonderen Beschaffenheit, dafs das Centrum der einen in der Ebene der anderen gelegen ist, stets in dieser einfachen Weise analytisch dargestellt werden. Die beiden so erhaltenen Kurven resp. Kegel n^{ter} Ordnung sind offenbar umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen, da zu jedem Punkte der Raumkurve immer ein bestimmtes Element der beiden Projektionen gehört. Diese eindeutige Beziehung der Strahlen der beiden Projektionskegel hat eine wichtige geometrische Bedeutung. Die gegebene Raumkurve ist nämlich offenbar ein Schnitt der beiden Kegel; der volle Schnitt dieser Kegel n^{ten} Grades ist aber von der Ordnung n^2 und besteht also aufser der Raumkurve n^{ter} Ordnung noch aus einem für unsere Untersuchung überflüssigen Bestandteile der Ordnung $n(n-1)$. Berücksichtigt man aber jene zwischen den Strahlen beider Kegel bestehende eindeutige Beziehung, so wird jeder Strahl s des ersten Kegels von dem zugeordneten des zweiten in einem einzigen bestimmten Punkte geschnitten, und es werden hierdurch von den n Schnittpunkten des Strahls s mit dem zweiten Kegel $n-1$ Schnittpunkte als unwesentlich abgesondert; mit Berücksichtigung jener Korrespondenz erhält man also aus den beiden Kegelgleichungen $F_0 = 0$, $F_1 = 0$ eben nur die Raumkurve und keine weiteren überflüssigen Kurventeile.

Wenngleich wir die Raumkurve C_n^p als frei von Singularitäten vorausgesetzt haben, so enthält doch jede ihrer Projektionen singuläre Punkte, deren Anzahl, wenn wir bei dem einfachsten Fall gewöhnlicher Doppelpunkte stehen bleiben, durch die Gleichung gegeben ist:

$$d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p = \frac{1}{2}n(n-3) - (p-1);$$

man bezeichnet diese Zahl d auch als die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Raumkurve. Wir erhalten so, den verschiedenen Projektionen der Raumkurve entsprechend, verschiedene Divisoren der

scheinbaren Doppelpunkte $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots$, die alle von der Ordnung $2d$ und alle einander äquivalent sind. In der That hat man z. B. für die beiden vorher besprochenen Projektionen zufolge der Gleichungen (2) auf S. 426:

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_1} = \frac{\mathfrak{D}_0\, \mathfrak{Z}_{x_2:x_3}}{\mathfrak{A}^{n-1}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_0} = \frac{\mathfrak{D}_1\, \mathfrak{Z}_{x_2:x_3}}{\mathfrak{A}^{n-1}}, \tag{2}$$

und da die Funktionen auf der linken Seite dieser Gleichungen Elemente der Hauptklasse sind, so gehören $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ zu einer und derselben Divisorenklasse, welche mit D bezeichnet sein möge.

Wir wollen nun zeigen, dafs die beiden Projektionen bei einer doppelpunktfreien Raumkurve stets so angenommen werden können, dafs $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ keinen gemeinsamen Teiler erhalten. In der That, durch die erste Projektion vom Punkte A_0 aus wird eine endliche Anzahl von Strahlen $A_0 P_1^{(0)}, A_0 P_2^{(0)}, \ldots$ bestimmt, auf welchen die scheinbaren Doppelpunkte liegen; der Divisor $\mathfrak{D}_0$ besteht alsdann aus den Primfaktoren $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}, \ldots$, welche den Kurvenpunkten $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}, \ldots$ umkehrbar eindeutig entsprechen. Ebenso werden durch die zweite Projektion vom Punkte A_1 aus eine Anzahl von scheinbaren Doppelpunkten $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \ldots$ bestimmt, durch welche der Divisor $\mathfrak{D}_1$ charakterisiert wird. Sollen die beiden Divisoren $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ keinen gemeinsamen Teiler haben, so dürfen sich die von den Punkten A_0 und A_1 ausgehenden Bisekanten nicht auf der Raumkurve treffen. Dies erreichen wir, wenn wir nach willkürlicher Annahme des Punktes A_0 die Punkte $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \ldots$ bestimmen, von jedem dieser in endlicher Anzahl auftretenden Punkte die Raumkurve projizieren und den Punkt A_1 aufserhalb der so erhaltenen Projektionskegel wählen. Das ist aber stets möglich, weil eine endliche Anzahl von Kegeln den Raum nicht ausfüllen kann. Wir werden diesen Hilfssatz später (S. 481) bei der Übertragung der Betrachtung auf ganz beliebige Raumkurven in anderer, mehr analytisch verfahrender Weise beweisen; für jetzt mag die eben gegebene geometrische Ableitung genügen.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nunmehr an den Beweis des vorher aufgestellten Satzes (I). Zu diesem Zwecke nehmen wir jetzt $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ als teilerfremd an, betrachten die sämtlichen in der Klasse A^ν enthaltenen ganzen Divisoren und zeigen, dafs als Fundamentalsystem dieser Schar lauter Divisoren gewählt werden können, welche entweder durch $\mathfrak{D}_0$ oder durch $\mathfrak{D}_1$ teilbar sind. Damit ist in der That unser Satz bewiesen; denn jeder ganze Divisor der Klasse A^ν ist alsdann als Summe zweier anderen darstellbar, von denen der eine ein Vielfaches des Divisors $\mathfrak{D}_0$ und der andere ein Vielfaches von $\mathfrak{D}_1$ ist; folglich kann nach dem in § 3 der fünfundzwanzigsten Vorlesung bewiesenen Satze

der erste Summand als ganze homogene Funktion der Ordnung ν von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$, der zweite als ebensolche Funktion von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ dargestellt werden.

Um das Fundamentalsystem der Klasse A^ν in der angekündigten Weise aufstellen zu können, bestimmen wir zunächst die Dimension dieser Klasse und erhalten hierfür nach dem Riemann-Rochschen Satze:

$$\{A^\nu\} = \nu n - p + 1;$$

denn die Dimension der Ergänzungsklasse $\frac{W}{A^\nu}$ ist Null, weil ihre Ordnung

$$2(p-1) - \nu n$$

negativ ist, es ist nämlich

$$2(p-1) = n(n-3) - 2d \leqq n(n-3),$$

während zufolge unserer Voraussetzung über den Exponenten ν:

$$\nu n > 2n(n-3) - 2(p-1) > n(n-3)$$

ist. Bestimmen wir jetzt zweitens diejenigen Divisoren dieser Klasse, welche Multipla von $\mathfrak{D}_0$ sind, so ist die Dimension dieser Schar gleich

$$\left\{\frac{A^\nu}{D}\right\} = \nu n - 2d - p + 1.$$

Auch hier hat nämlich die Ergänzungsklasse $\frac{DW}{A^\nu}$ eine negative Ordnungszahl, und ihre Dimension $\left\{\frac{DW}{A^\nu}\right\}$ ist somit gleich Null; denn da der Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_{x_2:x_3}}{\mathfrak{A}^2}$ der Klasse W angehört, so ergiebt sich aus der in (2) gegebenen Divisorendarstellung von $\frac{\partial F_0}{\partial x_1}$, dafs die Klasse DW identisch mit der Klasse A^{n-3}, also

$$\frac{DW}{A^\nu} = A^{n-3-\nu}$$

ist, und es ist nach der letzten Ungleichung $\nu > n - 3$. Setzt man also

$$\nu n - 2d - p + 1 = s,$$

so giebt es in der Klasse A^ν im ganzen s linear unabhängige Divisoren:

3) $$\mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_s,$$

welche Vielfache von $\mathfrak{D}_0$ sind, und ebenso grofs ist offenbar die Zahl der linear unabhängigen Divisoren der Klasse, welche durch $\mathfrak{D}_1$ teilbar sind; diese seien:

4) $$\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_2, \ldots \mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_s.$$

Bestimmen wir endlich drittens alle diejenigen Divisoren, welche sich sowohl in der Schar (3) als auch in (4) finden, so müssen dieselben, weil $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ teilerfremd sind, Vielfache von $\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1$, also von der Form $\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}$ sein, wo $\mathfrak{J}$ ein ganzer Divisor der Klasse $\frac{A^\nu}{D^2}$ ist. Die Dimension dieser Teilschar ist gleich

$$\left\{\frac{A^\nu}{D^2}\right\} = \nu n - 4d - p + 1 + \left\{\frac{D^2 W}{A^\nu}\right\}.$$

Nun hat aber die Ergänzungsklasse

$$\frac{D^2 W}{A^\nu} = \frac{A^{2(n-3)-\nu}}{W}$$

wieder zufolge unserer Voraussetzung eine negative Ordnung, denn diese bestand ja gerade darin, dafs

$$2n(n-3) - \nu n < 2(p-1)$$

sein sollte; folglich ist

$$\left\{\frac{A^\nu}{D^2}\right\} = \nu n - 4d - p + 1 = s - 2d.$$

Die $s - 2d$ sich so ergebenden Divisoren

$$5) \qquad \mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_2, \ldots \mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_{s-2d}$$

können wir sowohl in die Schar (3), als auch in die Schar (4) einführen, wodurch sich ergeben möge:

$$6) \quad \mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_2, \ldots \mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_{s-2d} \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_1, \ \mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_{2d} \\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_1, \ \mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_2, \ldots \mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_{2d}; \end{cases}$$

hierbei bilden die Divisoren $\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_h$ der Schar (5) mit den $2d$ Divisoren der oberen Zeile zusammen ein Fundamentalsystem der Schar (3), mit den $2d$ Divisoren der unteren Zeile ein Fundamentalsystem der Schar (4). Wir erhalten so in (6) $s + 2d$ ganze Divisoren, welche alle der Klasse A^ν angehören und deren Anzahl gleich der vorher bestimmten Dimension dieser Klasse $\nu n - p + 1$ ist. Diese Divisoren müssen voneinander linear unabhängig sein; denn bestünde eine Gleichung der Form

$$g_1\mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_1 + \cdots + g_{2d}\mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_{2d} + h_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_1 + \cdots + h_{2d}\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_{2d}$$
$$+ i_1\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_1 + \cdots + i_{s-2d}\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_{s-2d} = 0,$$

worin die Gröfsen g, h, i konstante Koeffizienten bedeuten, so müfste zunächst der Bestandteil

$$h_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_1 + h_2\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_2 + \cdots + h_{2d}\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_{2d} = \mathfrak{T}$$

ein Vielfaches von $\mathfrak{D}_0$ sein. Da aber $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ teilerfremd sind, so müfste auch $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{D}_1}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{D}_0$, also $\mathfrak{T}$ selbst ein Vielfaches von $\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1$ sein. Dann aber würde eine Gleichung bestehen:

$$\mathfrak{T} = h_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_1 + \cdots + h_{2d}\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}_{2d} = k_1\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_1 + \cdots + k_{s-2d}\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_{s-2d},$$

und da die in dieser Gleichung auftretenden Divisoren das volle Fundamentalsystem der Schar (4) bilden, so mufs notwendig

$$h_1 = h_2 = \cdots = h_{2d} = 0$$

sein. In derselben Weise ergiebt sich, dafs die Koeffizienten g Null sein müssen, und da die Divisoren (5) linear unabhängig sind, so müssen auch die Koeffizienten i verschwinden.

Es bilden also in der That die Divisoren (6) ein Fundamentalsystem für die ganzen Divisoren der Klasse A^ν; d. h. es kann jeder ganze Divisor $\mathfrak{Q}$ dieser Klasse auf eine und nur eine Weise in die Form gesetzt werden:

$$\mathfrak{Q} = \sum_{\alpha=1}^{2d} a_\alpha \mathfrak{D}_0 \mathfrak{G}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2d} b_\beta \mathfrak{D}_1 \mathfrak{H}_\beta + \sum_{\gamma=1}^{s-2d} c_\gamma \mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\mathfrak{J}_\gamma,$$

worin a_α, b_β, c_γ Konstanten sind. Hier aber kann jedes Glied der ersten Summe als ganze homogene Funktion ν^{ten} Grades von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$, jedes der zweiten als ebensolche Funktion von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$, jedes der dritten nach Belieben in der einen oder der anderen Form ausgedrückt werden, und damit ist der Beweis des am Anfange aufgestellten Satzes erledigt.

Die in obigem Satze gegebene untere Grenze für den Exponenten ν ist in vielen Fällen zu hoch gegriffen; um die kleinste untere Grenze zu bestimmen, wäre eine genaue Untersuchung der Klassen niedrigster Ordnung $A, A^2, A^3, \ldots$ erforderlich.

Das im Beweise angewendete Verfahren, die ganzen Divisoren der Klasse A^ν in einen durch $\mathfrak{D}_0$ und einen durch $\mathfrak{D}_1$ teilbaren Summanden zu zerlegen, beruht auf einem allgemeineren Theoreme, welches oftmals mit Vorteil angewendet werden kann und folgendermafsen lautet:

> Sind $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ zwei beliebige ganze teilerfremde Divisoren von den Ordnungen d_0 und d_1, so ist jeder beliebige ganze Divisor $\mathfrak{Q}$ als Summe eines Vielfachen von $\mathfrak{D}_0$ und eines Vielfachen von $\mathfrak{D}_1$ darstellbar:
>
> $$\mathfrak{Q} = \mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_0 + \mathfrak{D}_1\mathfrak{G}_1,$$
>
> wenn nur seine Ordnung
>
> $$q > d_0 + d_1 + 2(p-1)$$
>
> ist.

Der Beweis erfolgt durch genau dieselben Schlüsse, wie unter den spezielleren Voraussetzungen, die wir vorher machen konnten, und kann daher übergangen werden. Für $p = 0$ stimmt der Satz mit einem bekannten Theoreme über binäre Formen überein, da die Divisoren alsdann geradezu durch binäre Formen von $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ersetzt werden können, wenn der rationale Parameter $t = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}$ ist.

§ 3.

Der Satz (I) des vorigen Abschnittes kann nunmehr zu einer Reihe wichtiger Folgerungen verwendet werden. Bilden wir eine beliebige Fläche ν^{ter} Ordnung

$$F_\nu(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

so kann dieselbe entweder die Kurve C_n^p enthalten oder sie schneiden, je nachdem nämlich

$$F_\nu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$$

identisch verschwindet oder aber ein eigentlicher Divisor der Klasse A^ν ist; im letzteren Falle ist die Anzahl der Schnittpunkte gleich der Ordnung des Divisors, also gleich νn, wobei ein k-facher Schnittpunkt wie k einfache Schnittpunkte gezählt werden mufs. Die Gesamtheit der Flächen dieser zweiten Art schneidet also die Raumkurve C_n^p in Gruppen von je νn Punkten, welchen bestimmte ganze Divisoren der Klasse A^ν entsprechen. Es entsteht daher die Aufgabe, einerseits diese Divisorenscharen, andererseits die Schar der die Kurve enthaltenden Flächen ν^{ter} Ordnung zu bestimmen. Beide Fragen finden aber durch die bewiesenen Sätze, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, ihre Beantwortung. Nimmt man nämlich ν oberhalb der im vorigen Paragraphen angegebenen unteren Grenze an, und stellt man ein Fundamentalsystem:

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_r$$

für die ganzen Divisoren der Klasse A^ν auf, so ist

$$r = \{A^\nu\} = \nu n - p + 1,$$

und man kann daher jede ganze homogene Funktion ν^{ten} Grades $\Phi_\nu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ auf eine und nur eine Weise in die Form setzen:

$$\Phi_\nu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3) = c_1\mathfrak{Q}_1 + c_2\mathfrak{Q}_2 + \cdots + c_r\mathfrak{Q}_r.$$

Andererseits lassen sich die Divisoren $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_r$ nach dem Satze (Ia) des vorigen Abschnittes als ganze homogene Funktionen ν^{ter} Ordnung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ darstellen, so dafs:

$$\mathfrak{Q}_\varrho = Q_\varrho(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

ist. Es giebt also genau r linear unabhängige homogene Funktionen ν^{ten} Grades von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$, welche eigentliche Divisoren der Klasse A^ν sind, und jede homogene Funktion ν^{ten} Grades $\Phi_\nu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ mufs nach Subtraktion einer eindeutig bestimmten Summe

$$\sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \mathfrak{Q}_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho Q_\varrho(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$$

eine identisch verschwindende Differenz $F_\nu(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ ergeben, durch welche eine die Raumkurve enthaltende Fläche ν^{ter} Ordnung dargestellt wird. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Fläche $\Phi_\nu(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ die Raumkurve enthält, besteht also darin, dafs die Koeffizienten von Φ_ν bei dieser Darstellung die r linearen und unabhängigen Gleichungen

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \ldots c_r = 0$$

erfüllen. Daher gilt der Satz:

Liegt ν oberhalb der im vorigen Paragraphen angegebenen unteren Grenze, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs eine Fläche ν^{ter} Ordnung die Raumkurve C_n^p enthält, durch ein System von

$$\nu n - p + 1$$

linearen unabhängigen Gleichungen für die Koeffizienten der Flächengleichung gegeben. Ebenso grofs ist die Dimension der durch die sämtlichen Flächen ν^{ter} Ordnung auf der Kurve ausgeschnittenen Punktgruppen.

Da die Anzahl der Glieder einer homogenen Funktion ν^{ter} Ordnung von x_0, x_1, x_2, x_3 gleich

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

ist, so kann der vorige Satz offenbar auch so ausgesprochen werden:

Die Gesamtheit der Flächen ν^{ter} Ordnung, welche durch eine gegebene Raumkurve C_n^p der Ordnung n und des Geschlechtes p hindurchgelegt werden können, bildet bei hinreichend grofsem ν eine Schar der Dimension

$$\mathsf{N} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \nu n + p - 1,$$

d. h. die Flächen der Schar können aus N von ihnen linear komponiert werden.

Bildet man daher N Flächen ν^{ter} Ordnung

$$1) \quad \Phi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \Phi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \ldots \Phi_{\mathsf{N}}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

welche ein Fundamentalsystem der die Raumkurve enthaltenden Flächenschar bilden, so werden diese Gleichungen identisch befriedigt, wenn man für x_0, x_1, x_2, x_3 die entsprechenden Funktionen des Körpers $K(z, u)$ einsetzt. Die Kurve kann also als Schnitt jener N Flächen definiert werden, und es ist auch klar, dafs dieses Flächensystem aufser der Kurve einen weiteren Schnitt nicht gemein haben kann, da ja alle Flächen ν^{ter} Ordnung, welche durch die Kurve hindurchgelegt werden können, in jener Schar enthalten sind.

Das Flächensystem (1), durch welches die Kurve vollständig dargestellt wird, kann noch reduziert werden, wenn man zuerst noch die Flächen von niedrigerer als der ν^{ten} Ordnung, welche durch die Kurve gelegt werden können, dem Systeme zufügt und sodann alle diejenigen Formen wegläfst, welche durch Multiplikation mit irgend welchen Formen und Addition aus denen von niedrigerer Ordnung erhalten werden können. Wenn man so die Raumkurve durch eine möglichst geringe Zahl von Flächen darstellt, so überzeugt man sich leicht davon, dafs eine gegebene Raumkurve im allgemeinen nicht als Schnitt von nur zwei Flächen erhalten werden kann; denn zwei Flächen möglichst niedriger Ordnung, welche die Raumkurve enthalten, schneiden sich meistens aufser in der gegebenen noch in weiteren Kurven, welche für unsere Untersuchung überflüssige Bestandteile vorstellen. Nimmt man z. B. die einfachste Raumkurve, welche von dritter Ordnung ist und durch die Gleichungen

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : t : t^2 : t^3$$

dargestellt werden kann, und bildet die Schar der durch sie hindurchgehenden Flächen zweiten Grades, so sieht man leicht, dafs das Fundamentalsystem von den folgenden drei Hyperboloiden gebildet wird:

$$x_0 x_2 - x_1^2 = 0, \quad x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0, \quad x_1 x_3 - x_2^2 = 0.$$

Irgend zwei dieser drei Hyperboloide haben aber nicht blofs die Raumkurve dritter Ordnung, sondern überdies eine Gerade gemein, z. B. die ersten beiden die Gerade $x_0 = 0$, $x_1 = 0$. Hingegen kann man zeigen, dafs das System aller drei Gleichungen für die Darstellung aller die Kurve enthaltenden Flächen ausreicht. Nimmt man ebenso das Beispiel einer Kurve vierter Ordnung vom Geschlechte Null, bei welcher also die Koordinaten x_h proportional ganzen Funktionen vierten Grades des Parameters t sind, so zeigt man leicht, dafs durch die Kurve nur eine einzige Oberfläche zweiter Ordnung hindurchgelegt werden kann, wenn die Koeffizienten allgemein sind und die Kurve daher frei von Singularitäten ist. Diese Kurve vierter Ordnung kann also nicht als Durchschnitt zweier Oberflächen zweiten Grades

dargestellt werden; nimmt man aber eine durch sie hindurchgehende Oberfläche dritter Ordnung hinzu, so haben die beiden Flächen noch aufser der Kurve vierter Ordnung einen weiteren Kurventeil, nämlich zwei windschiefe Gerade gemein, und können also ebenfalls nicht zur vollständigen Darstellung der Raumkurve dienen.

Aus diesem Grunde ist es bei jeder allgemeinen Untersuchung über Raumkurven notwendig, ihre Darstellung durch einen algebraischen Parameter, welcher Punkt einer Riemannschen Fläche ist, zu Grunde zu legen, oder, was auf ganz dasselbe hinauskommt, sie Punkt für Punkt auf eine ebene algebraische Kurve abzubilden und hierdurch darzustellen; die prinzipielle Bedeutung dieser Methode ist zuerst von Herrn Noether*) hervorgehoben und durch Anwendung auf spezielle Probleme erwiesen worden. Geht man von zwei Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung

$$F_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad F_\nu(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

aus, so haben dieselben eine Kurve der Ordnung $\mu\nu$ gemein, welche im allgemeinen aus mehreren verschiedenen Raumkurven der Ordnung $m, m', m'', \ldots$ zusammengesetzt ist, derart, dafs

$$\mu\nu = m + m' + m'' + \cdots$$

ist. Bildet man nämlich die Resultante der beiden Gleichungen, welche sich z. B. durch Elimination von x_0 ergiebt, so ist dieselbe eine ganze homogene Funktion $R_{\mu\nu}$ der Ordnung $\mu\nu$ von x_1, x_2, x_3, welche reduktibel sein und alsdann in irreduktible Bestandteile zerlegt werden kann; dann ist

$$R_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3) = P_m(x_1, x_2, x_3) \cdot P_{m'}(x_1, x_2, x_3) \ldots,$$

und es gehört zu jedem der Primfaktoren $P_m, P_{m'}, \ldots$ eine irreduktible Raumkurve der Ordnung $m, m', \ldots$ Die Untersuchung der Raumkurven als partieller Schnitt zweier Flächen kommt hiernach algebraisch im wesentlichen auf die Untersuchung reduktibler Gleichungen, also zerfallender Riemannscher Flächen zurück. Reduktible Gleichungssysteme können aber immer nur in der Weise untersucht werden, dafs sie in ihre irreduktibeln Bestandteile zerlegt werden, und damit kommt man wieder auf die frühere Betrachtungsweise zurück.

Die in diesem und dem vorigen Abschnitte gegebene Bestimmung der Anzahl von Bedingungen, welche eine durch eine gegebene Raumkurve hindurchgelegte Oberfläche erfüllen mufs, unterscheidet sich dadurch erheblich von den früheren Methoden, dafs sie sich auf den Satz (I) des vorigen Paragraphen stützt und hierdurch von einer Darstellung der

---

*) Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven, Abhandlgn. d. Berl. Akad. d. W., 1882.

Raumkurve als Schnitt zweier Flächen gänzlich unabhängig wird. Die bisherigen von Noether*) und Picard*) gegebenen Beweise gehen von der Annahme aus, daſs die Raumkurve der partielle Schnitt zweier Flächen ist, deren Restschnitt irreduktibel ist. Ein Beweis, daſs jede Raumkurve so als Schnitt zweier Flächen erhalten werden kann, daſs der Restschnitt nicht weiter zerfällt, ist bisher noch nicht gegeben worden.

§ 4.

Wir haben in den beiden letzten Abschnitten, um den Grundgedanken der Untersuchung klar hervortreten zu lassen, die Raumkurve als singularitätenfrei vorausgesetzt; wir wollen diese Einschränkung jetzt aufheben und für jede beliebige Raumkurve, ebenso wie für ebene Kurven, den Divisor der singulären Punkte definieren.

Projizieren wir die Raumkurve C_n^p von einem beliebigen Punkte des Raumes, so erhält die Projektion einen Divisor der Doppelpunkte, der zu einem Teile, wie wir gesehen haben, von den scheinbaren Doppelpunkten der Raumkurve herrührt und also von der Auswahl des Projektionscentrums abhängig ist, während ein anderer Teil von den wahren Singularitäten der Kurve bedingt und somit völlig unveränderlich ist. Wir erhalten daher den zweiten, wesentlicheren Teil für sich allein, wenn wir das Projektionscentrum als veränderlich ansehen, für alle möglichen Projektionskurven die Divisoren $\mathfrak{E}$ der Doppelpunkte bestimmen und deren gröſsten gemeinschaftlichen Teiler aufsuchen. Dabei gehören zufolge einer früheren Bemerkung (S. 470) die sämtlichen so erhaltenen Divisoren $\mathfrak{E}$ einer und derselben Klasse E an.

Wir wollen zunächst das Projektionscentrum nur auf einer Geraden g wandern lassen und alsdann den veränderlichen Divisor $\mathfrak{E}$ der Doppelpunkte analytisch darstellen. Zu diesem Zwecke unterwerfen wir vorerst die Schar $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ einer geeigneten linearen Transformation. Ist die Gerade g gegeben, so legen wir durch sie zwei Ebenen und machen diese zu Seitenflächen des Koordinatentetraeders, so daſs ihre Gleichungen $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ werden. Die anderen beiden Ebenen $x_0 = 0$ und $x_1 = 0$ des Tetraeders können wir alsdann willkürlich annehmen. Wählen wir nun auf der Geraden g ein Projektionscentrum P, für welches

$$x_0 : x_1 = a_0 : a_1$$

ist, so gehen durch P die drei Ebenen

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad a_1 x_0 - a_0 x_1 = 0,$$

---

*) Noether l. c. § 7, Picard et Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, t. I, Paris 1897, S. 223—233.

und die Gleichung des Projektionskegels von P aus ergiebt sich also durch Bestimmung der zwischen x_2, x_3 und $a_1 x_0 - a_0 x_1$ bestehenden homogenen Gleichung. Die sämtlichen Projektionskegel von den Punkten der Geraden g aus erhält man somit, wenn man mit zwei Unbestimmten v_0 und v_1 die lineare Verbindung

$$v_1 x_0 - v_0 x_1$$

bildet und die zwischen dieser Gröfse und x_2, x_3 bestehende homogene Gleichung aufsucht. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$x = \frac{x_2}{x_3} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_3};$$

diese Funktion des Körpers ist, wenn die Gerade g die Kurve nicht schneidet, also $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ keinen Teiler gemein haben, von der n^{ten} Ordnung.

Setzen wir ferner

$$y = \frac{x_0}{x_3}, \quad z = \frac{x_1}{x_3},$$

und bilden die lineare Verbindung

$$w = v_1 y - v_0 z,$$

so genügt w für beliebige Werte der Parameter v_0, v_1 einer Gleichung n^{ten} Grades

$$1)\quad \theta(w, x) = (w - v_1 y_1 + v_0 z_1)(w - v_1 y_2 + v_0 z_2) \ldots (w - v_1 y_n + v_0 z_n) = 0,$$

wobei mit y_h und z_h die n Konjugierten der Funktionen y und z bezeichnet sind; diese Gleichung stellt die Schar jener Projektionskegel dar. Bilden wir sodann die Ableitungsfunktion $\frac{\partial \theta}{\partial w}$ und ersetzen w durch $v_1 y - v_0 z$, so ist

$$\frac{\partial \theta}{\partial w} = \big(v_1(y - y_2) - v_0(z - z_2)\big) \ldots \big(v_1(y - y_n) - v_0(z - z_n)\big)$$
$$+ \big(v_1(y - y_1) - v_0(z - z_1)\big) \ldots \big(v_1(y - y_n) - v_0(z - z_n)\big) + \cdots;$$

da nun die Summe rechts symmetrisch von den n konjugierten Gröfsen abhängt, so ist sie eine Funktion des Körpers, welche, da die homogenen Parameter v_0, v_1 in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung auftreten, auch in die Form:

$$\frac{\partial \theta}{\partial w} = \xi_0 v_0^{n-1} + \xi_1 v_0^{n-2} v_1 + \cdots + \xi_{n-1} v_1^{n-1}$$

gesetzt werden kann, wobei die Koeffizienten ξ von v_0, v_1 unabhängige Funktionen des Körpers bedeuten. Zufolge der Gleichungen (2) auf S. 426 ist aber

$$\frac{\partial \theta}{\partial w} = \frac{\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}_3^{n-1}},$$

wenn $\mathfrak{E}$ den Divisor der Doppelpunkte der Kurve (1) bezeichnet; da also $\frac{\partial \theta}{\partial w}$ bei beliebigen v_0, v_1 ein Vielfaches des Divisors $\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}_3^{n-1}}$ ist, so ist dies nur in der Weise möglich, daſs jeder Koeffizient ξ durch ihn teilbar ist. Setzt man also

$$\xi_0 = \frac{\mathfrak{E}_0 \mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}_3^{n-1}}, \quad \xi_1 = \frac{\mathfrak{E}_1 \mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}_3^{n-1}}, \ldots \xi_{n-1} = \frac{\mathfrak{E}_{n-1} \mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}_3^{n-1}},$$

so sind $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \ldots \mathfrak{E}_{n-1}$ bestimmte ganze Divisoren von derselben Klasse E wie $\mathfrak{E}$ selbst und von der Ordnung

$$2d = (n-1)(n-2) - 2p.$$

Der Divisor $\mathfrak{E}$ der Doppelpunkte der veränderlichen Projektionskurve läſst sich hiernach in der Form darstellen:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 v_0^{n-1} + \mathfrak{E}_1 v_0^{n-2} v_1 + \cdots + \mathfrak{E}_{n-1} v_1^{n-1}; \tag{2}$$

er erscheint somit als binäre Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Koordinaten v_0, v_1 des beweglichen Projektionscentrums. Dieses Resultat bleibt aber offenbar bestehen, wenn g nicht Kante des Koordinatentetraeders, sondern eine beliebige Gerade des Raumes ist und $\frac{v_0}{v_1}$ den Parameter eines auf ihr veränderlichen Punktes bedeutet.

Nehmen wir jetzt den Punkt $P = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ als frei beweglich im Raume an, so ist es leicht festzustellen, in welcher Weise der veränderliche Divisor $\mathfrak{E}$ der Doppelpunkte von den Koordinaten des Punktes P abhängt. Wenn nämlich eine Funktion der Variabeln v_0, v_1, v_2, v_3 in dem Falle, daſs die Bewegung des Punktes P auf eine beliebige Gerade beschränkt wird, in eine binäre Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der auf der Geraden veränderlichen Parameter übergeht, so ist sie notwendig eine homogene Funktion $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von v_0, v_1, v_2, v_3*); dieser Satz bleibt aber offenbar auch dann bestehen, wenn die Koeffizienten der auftretenden Formen nicht Zahlen, sondern Divisoren einer Klasse E sind, da ja die Quotienten je zweier solcher Divisoren Funktionen des Körpers K sind und daher denselben Rechnungsgesetzen wie Zahlen unterliegen. Der Divisor $\mathfrak{E}$ der Doppelpunkte der veränderlichen Projektionskurve muſs daher eine quaternäre Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von v_0, v_1, v_2, v_3 sein, deren Koeffizienten ganze Divisoren der Klasse E sind; bezeichnen wir also mit V_h die verschiedenen Potenzprodukte der Dimension $(n-1)$ von v_0, v_1, v_2, v_3, so ist

$$\mathfrak{E} = \sum_h \mathfrak{E}_h V_h. \tag{3}$$

---

*) Der Beweis dieser Thatsache ergiebt sich sehr leicht durch Anwendung des Taylorschen Satzes für mehrere Variabele.

Der feste Bestandteil dieses Divisors ist nun offenbar der gröfste gemeinschaftliche Teiler $\mathfrak{D}$ der Koeffizienten $\mathfrak{E}_{h}$. Dieser Faktor mufs notwendig in $\mathfrak{E}$ auftreten, wie auch der Punkt $P = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ gewählt werden möge; aufser diesem giebt es aber keinen weiteren Primdivisor, der in allen Teilern $\mathfrak{E}$ erscheinen müfste, und man kann insbesondere stets zwei Punkte des Raumes

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3) \quad \text{und} \quad B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$$

so bestimmen, dafs die zugehörigen Divisoren $\mathfrak{E}^{(a)}$ und $\mathfrak{E}^{(b)}$ eben nur den gröfsten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{D}$ besitzen. Dies ist stets möglich, denn hat man den Punkt A beliebig angenommen, so kann man nach dem Satze 1. auf S. 255 den Punkt B so wählen, dafs kein Primdivisor $\mathfrak{P}$, der in $\frac{\mathfrak{E}^{(a)}}{\mathfrak{D}}$ aufgeht, auch in $\frac{\mathfrak{E}^{(b)}}{\mathfrak{D}}$ enthalten ist.

Daher können wir den folgenden Satz aufstellen, der offenbar die Verallgemeinerung der auf S. 470 angestellten Überlegung ist:

> Der Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte einer Raumkurve kann stets als gröfster gemeinschaftlicher Teiler der zu zweien ihrer Projektionen gehörigen Divisoren der Doppelpunkte dargestellt werden.

Hieraus folgt auch, dafs die Ordnung von $\mathfrak{D}$ stets gerade ist; denn entsprechen einem Kurvenpunkte P_0 die Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$, so kann man die Koordinaten v_0, v_1, v_2, v_3, in (3) so wählen, dafs $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_\varkappa$ die gleichen Ordnungszahlen haben, und sodann die in Formel (4) auf S. 393 gegebene Zerlegung des von P_0 herrührenden Beitrages in Elementarbestandteile gerader Ordnung unmittelbar von der ebenen Projektion auf die Raumkurve übertragen.

Auf Grund dieser Definition und Darstellung des Divisors der Doppelpunkte lassen sich die Betrachtungen der §§ 2 und 3 ohne Schwierigkeit auf den Fall der mit Singularitäten versehenen Raumkurven übertragen. Bezeichnen wir nämlich jetzt die Divisoren der Doppelpunkte für die beiden Projektionen mit $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}_1$ und für die Raumkurve mit $\mathfrak{D}$, so brauchen wir blofs zu zeigen, dafs ein durch $\mathfrak{D}$ teilbarer Divisor $\mathfrak{G}$ der Klasse A^ν als Summe eines Vielfachen von $\mathfrak{D}_0$ und eines Vielfachen von $\mathfrak{D}_1$ dargestellt werden kann. Nach dem Satze auf S. 473 ist aber in der That für hinreichend grofses ν:

$$\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{G}_0 + \frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{G}_1,$$

da wir soeben bewiesen haben, dafs $\frac{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}}$ und $\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{D}}$ als teilerfremd angenommen werden dürfen; also ist:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_0\mathfrak{G}_0 + \mathfrak{D}_1\mathfrak{G}_1.$$

Ist 2δ die Ordnung des Divisors $\mathfrak{D}$, so bestimmt sich die untere Grenze für den Exponenten ν nach dem obigen Satze durch die Ungleichung

$$\nu n - 2\delta > 4d - 4\delta + 2(p-1)$$

oder

$$\nu > 2(n-3) - \frac{2(p-1+\delta)}{n}.$$

Wir gelangen somit zu folgendem allgemeinen Theoreme:

> Sind $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ vier ganze linear unabhängige Divisoren einer Klasse A von der Ordnung n, und $\mathfrak{D}$ der zugehörige Divisor der Doppelpunkte, so kann jeder durch $\mathfrak{D}$ teilbare Divisor der Klasse A^ν als ganze homogene Funktion ν^{ter} Ordnung von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ dargestellt werden, vorausgesetzt, dafs der Exponent ν oberhalb einer bestimmten unteren Grenze
>
> $$\nu_0 = 2(n-3) - \frac{2(p-1+\delta)}{n}$$
>
> liegt, wo 2δ die Ordnung des Divisors $\mathfrak{D}$ ist.

Die untere Grenze ν_0 fällt bei dieser Betrachtung um $\frac{2\delta}{n}$ kleiner als bei der analogen Untersuchung für doppelpunktfreie Raumkurve aus.

Besitzt also die Raumkurve δ gewöhnliche Doppel- oder Rückkehrpunkte, so folgt jetzt durch Übertragung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen, dafs die Koeffizienten einer Fläche ν^{ter} Ordnung, welche die Raumkurve enthalten soll, bei hinreichend grofsem ν genau $\nu n - \delta - p + 1$ linearen unabhängigen Gleichungen zu genügen haben. Die Anzahl der zu erfüllenden linearen Gleichungen ist also in diesem Falle um δ kleiner als bei einer singularitätenfreien Kurve. Auf die Untersuchung höherer Singularitäten, welche einen anderen Einflufs auf diese Anzahlbestimmung ausüben können und eine genauere Diskussion des Divisors der Doppelpunkte erfordern würden, gehen wir hier nicht weiter ein.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

Die Hauptkurve oder die Kurve der Differentiale erster Gattung. — Sie hat keine Doppelpunkte, wenn sie nicht hyperelliptisch ist. — Die Verzweigungsdivisoren der Differentialklasse und die Weierstrafs-Punkte. — Die Ordnungszahlen der Funktionen mit einer Unendlichkeitsstelle; additive Moduln. — Die Anzahl der Weierstrafs-Punkte. — Gruppe der Transformationen des Gebildes in sich. — Algebraische Gebilde vom Geschlechte $p > 1$ besitzen nur eine endliche Anzahl von Transformationen in sich.

§ 1.

Die Methoden der letzten beiden Kapitel können ohne prinzipielle Schwierigkeiten auf die Untersuchung beliebiger Kurven im Raume von mehr als drei Dimensionen angewendet werden. Sind nämlich $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_s$ $s+1$ linear unabhängige Divisoren einer Klasse A, so wird durch die Proportion

$$x_0 : x_1 : x_2 \cdots : x_s = \mathfrak{A}_0 : \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 \cdots : \mathfrak{A}_s$$

oder durch die mit einem beliebigen Divisor $\mathfrak{A}$ der Klasse gebildeten Gleichungen

$$x_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}}, \quad x_1 = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}}, \cdots x_s = \frac{\mathfrak{A}_s}{\mathfrak{A}}$$

eine Kurve im Raume von s Dimensionen bestimmt. Diese Kurve kann in keinem Raume niedrigerer Dimension gelegen sein, weil zwischen $x_0, x_1, \ldots x_s$ keine lineare homogene Gleichung besteht; ihre Ordnung ist, wie leicht ersichtlich, gleich der Ordnung der Klasse, vorausgesetzt, dafs der Körper, welcher durch die Gesamtheit der rationalen Funktionen von $\frac{x_1}{x_0}, \cdots \frac{x_s}{x_0}$ gegeben ist, den ursprünglich gegebenen Körper $K(z, u)$ erschöpft, so dafs

$$K\left(\frac{x_1}{x_0}, \cdots \frac{x_s}{x_0}\right) = K(z, u)$$

ist. Wir wollen aber diese Untersuchung nicht in voller Allgemeinheit durchführen, sondern wir beschränken uns im wesentlichen darauf, einen besonderen Fall zu diskutieren, welcher für die allgemeine Theorie der algebraischen Funktionen von grundlegender Bedeutung ist.

Es sei nämlich die Kurve durch ein Fundamentalsystem der in der Klasse W der Differentiale enthaltenen ganzen Divisoren bestimmt. Diese Klasse hat, wie wir wissen, die Ordnung $2(p-1)$ und die Dimension p; bezeichnen wir also die Elemente eines Fundamentalsystems für die ganzen Divisoren von W mit $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p$, und setzen wir in etwas geänderter Bezeichnung

$$1) \qquad x_1 : x_2 : \cdots : x_p = \mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \cdots : \mathfrak{W}_p,$$

so wird hierdurch eine Kurve im Raume von $p-1$ Dimensionen bestimmt. Wir können diese Gleichung nach S. 307 auch in der Form schreiben:

$$1\text{a}) \qquad x_1 : x_2 : \cdots x_p = dw_1 : dw_2 : \cdots dw_p,$$

wenn wir mit $w_1, w_2, \ldots w_p$ das System der Integrale erster Gattung bezeichnen.

Wir nennen diese Kurve die Kurve der Differentiale erster Gattung oder auch die zu dem algebraischen Gebilde gehörige Hauptkurve und bezeichnen sie durch H. Ihre Bedeutung beruht darauf, dafs sie ganz unabhängig von der besonderen Form der Ausgangsgleichung definiert ist und also invarianten Charakter bei irgend welchen birationalen Transformationen des Gebildes besitzt. Gehen wir nämlich zu irgend einer anderen Form der Ausgangsgleichung über, so bleibt die Schar der Differentiale erster Gattung unverändert; die Koordinaten $x_1', x_2', \ldots x_p'$ eines Punktes der zu dem transformierten Gebilde gehörigen Hauptkurve hängen also mit den ursprünglichen $x_1, x_2, \ldots x_p$ durch lineare Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante zusammen, und die beiden Kurven gehen also durch eine blofse Kollineation ineinander über; oder wenn man die linearen Gleichungen als Koordinatentransformation deutet, so stellen $x_1, x_2, \ldots x_p$ und $x_1', x_2', \ldots x_p'$ geradezu dieselbe Kurve, bezogen auf verschiedene Koordinatensysteme, dar. Fafst man also alle die Gleichungen, welche auseinander durch birationale Transformation hervorgehen, in eine Klasse zusammen, so ist die Hauptkurve für alle diese algebraischen Gebilde dieselbe, und jede durch Kollineation unzerstörbare Eigenschaft der Hauptkurve mufs eine Eigenschaft des zugehörigen algebraischen Gebildes ergeben, welche bei beliebiger birationaler Transformation erhalten bleibt und daher als eine seiner allerwesentlichsten Eigentümlichkeiten anzusehen ist.

Die erste sich hier darbietende Frage ist die, ob denn die Beziehung zwischen der ursprünglichen und der Hauptkurve stets eine umkehrbar eindeutige ist, oder ob etwa der Fall eintreten kann, dafs zwar jedem Punkte der ursprünglichen Kurve einer der Haupt-

kurve, aber umgekehrt jedem beliebigen Punkte der Hauptkurve mehrere der ursprünglichen entsprechen. Bildet man mit einem beliebigen Divisor $\mathfrak{W}$ der Klasse W die Funktionen

$$x_1 = \frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}}, \quad x_2 = \frac{\mathfrak{W}_2}{\mathfrak{W}}, \ldots x_p = \frac{\mathfrak{W}_p}{\mathfrak{W}},$$

so tritt dieser letztere Fall dann und nur dann ein, wenn der Körper $K(x_1, x_2, \ldots x_p)$ aller rationalen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_p$ nicht mit dem Körper $K(z, u)$ identisch, sondern ein Unterkörper von ihm ist; im ersten Falle ist also das Geschlecht der Hauptkurve ebenfalls gleich p, im zweiten kann es aber kleiner als p sein. Wir wollen zunächst zeigen, dafs dieser Ausnahmefall für eine bestimmte Art algebraischer Körper wirklich eintritt, und sodann nachweisen, dafs, abgesehen von dieser Ausnahme, in allen anderen Fällen die Beziehung zwischen beiden Kurven wirklich umkehrbar eindeutig ist.

Es sei nämlich der algebraische Körper ein hyperelliptischer, d. h. ein solcher, in welchem eine der zugehörigen Riemannschen Flächen zweiblättrig ist (vgl. S. 335), dann können wir nach § 3 der dreizehnten Vorlesung seine Gleichung in der Form

$$u^2 = c(z - e_1)(z - e_2) \ldots (z - e_{2p+2}) \tag{2}$$

annehmen; hierbei ist also der Fall $p = 1$, der meist als elliptischer eine besondere Bezeichnung erhält, unter den allgemeineren Begriff des hyperelliptischen Körpers subsumiert. Alsdann liegen die Verzweigungspunkte der Fläche sämtlich im Endlichen; aber diese Voraussetzung ist statthaft, denn fällt einer von ihnen ins Unendliche, so dafs die Gleichung die Form

$$\overline{u}^2 = c(\overline{z} - e_1)(\overline{z} - e_2) \ldots (\overline{z} - e_{2p+1})$$

erhält, so brauchen wir blofs

$$\overline{z} = \alpha + \frac{1}{z}, \quad \overline{u} = \frac{u}{z^{p+1}}$$

zu setzen und die Konstante α von $e_1, e_2, \ldots e_{2p+1}$ verschieden zu wählen. Wir erhalten dann

$$u^2 = c'\left(z - \frac{1}{e_1 - \alpha}\right)\left(z - \frac{1}{e_2 - \alpha}\right) \cdots \left(z - \frac{1}{e_{2p+1} - \alpha}\right) \cdot z,$$

wodurch wir auf die frühere Gleichungsform zurückkommen.

Bezeichnen wir nun die Punkte der Riemannschen Fläche, welche zu $e_1, e_2, \ldots e_{2p+2}$ gehören, resp. mit $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_{2p+2}$, so ist nach S. 219 der Verzweigungsteiler

$$\mathfrak{Z}_z = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{2p+1} \mathfrak{P}_{2p+2}.$$

Zufolge der Gleichung (1) ist dieser Divisor zugleich der Zähler der Funktion u, und da u in jedem der beiden Pole von z in der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird, so hat man die Divisorengleichungen

$$z = \frac{\mathfrak{z}_z}{\mathfrak{n}_z}, \quad u = \frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^{p+1}}.$$

Da nun der zu dz gehörige Differentialteiler $\frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^2}$ ist, so entsprechen den p Differentialen

$$3) \quad dw_1 = \frac{dz}{u}, \quad dw_2 = z\frac{dz}{u}, \quad dw_3 = z^2\frac{dz}{u}, \cdots dw_p = z^{p-1}\frac{dz}{u}$$

der Reihe nach die ganzen Divisoren

$$\mathfrak{n}_z^{p-1}, \quad \mathfrak{z}_z\mathfrak{n}_z^{p-2}, \quad \mathfrak{z}_z^2\mathfrak{n}_z^{p-3}, \ldots \mathfrak{z}_z^{p-1};$$

die p Differentiale (3) sind also von der ersten Gattung, und da sie offenbar linear unabhängig sind, so bilden sie auch ein vollständiges Fundamentalsystem. Der allgemeine Differentialteiler erster Gattung hat somit die Gestalt

$$\mathfrak{W} = c_1\mathfrak{n}_z^{p-1} + c_2\mathfrak{z}_z\mathfrak{n}_z^{p-2} + c_3\mathfrak{z}_z^2\mathfrak{n}_z^{p-3} + \cdots + c_p\mathfrak{z}_z^{p-1}$$

und ist also eine beliebige binäre Form $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $\mathfrak{z}_z$ und $\mathfrak{n}_z$; ferner ist, wenn A die Klasse von $\mathfrak{z}_z$ und $\mathfrak{n}_z$ bedeutet:

$$W = A^{p-1}.$$

In diesem Falle wird also die Hauptkurve H durch die Gleichungen definiert:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_p = 1 : z : z^2 : \cdots : z^{p-1},$$

und es gehört hiernach zu jedem Werte von z ein Punkt der Hauptkurve und umgekehrt; andererseits gehören aber zu jedem Werte von z zwei Punkte der Riemannschen Fläche, welche in den beiden Blättern übereinander liegen. Die Beziehung zwischen Hauptkurve und algebraischem Gebilde ist also in der That nicht umkehrbar eindeutig, indem jedem Punkte der Kurve ein System von zwei übereinandergelegenen Punkten der Riemannschen Fläche entspricht. Demzufolge erniedrigt sich auch die Ordnung der Hauptkurve von $2(p-1)$ auf die Hälfte, und ihr Geschlecht ist nicht mehr p, sondern Null, da die Koordinaten als rationale Funktionen von z, also als Elemente des in $K(z, u)$ enthaltenen Unterkörpers $K(z)$ dargestellt werden können. Zu jedem Differentialteiler $\mathfrak{W}$ gehört ein Punktsystem, welches aus irgend welchen $p-1$ Punkten der Riemannschen Fläche und den $p-1$ konjugierten besteht, in denen die Variable z den gleichen Wert annimmt.

Wir wollen jetzt nachweisen, daſs dieser Ausnahmefall auch der einzige überhaupt mögliche ist. Wir wollen aber sogleich ein weitergehendes Resultat ableiten, nämlich zeigen, daſs die Hauptkurve H eines algebraischen Gebildes, welches nicht hyperelliptisch ist, keinen einzigen Doppelpunkt besitzt. Jede Kurvensingularität ist ja dadurch charakterisiert, daſs einem Punkte der Kurve mehrere der Riemannschen Fläche entsprechen. Ist nun die Beziehung zwischen der Kurve und der Riemannschen Fläche durchweg eine mehrdeutige, so ist jeder Kurvenpunkt in diesem Sinne ein singulärer, und wenn wir also beweisen können, daſs kein Punkt der Kurve die Eigenschaften eines mehrfachen Punktes besitzen kann, so ist damit auch die speziellere Behauptung erwiesen, daſs die Beziehung zwischen Kurve und Riemannscher Fläche eine umkehrbar eindeutige ist.

Es sei P ein Punkt der Hauptkurve, dann dürfen wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit der Untersuchung voraussetzen, daſs P eine Ecke des Koordinatensystems ist und somit die Koordinaten habe:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \ldots x_{p-1} = 0, \quad x_p = 0;$$

denn diese Annahme ist stets durch lineare Transformation zu realisieren. Bei solcher Auswahl der Fundamentaldivisoren der Klasse erhalten in der Gleichung

$$1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_p = \mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \mathfrak{W}_3 : \cdots : \mathfrak{W}_p$$

die Divisoren $\mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \ldots \mathfrak{W}_p$ einen gemeinsamen Primteiler $\mathfrak{P}_1$, während $\mathfrak{W}_1$ diesen Faktor nicht besitzt. Ist aber der Punkt P ein Doppelpunkt, so haben $\mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \ldots \mathfrak{W}_p$ sogar einen Divisor zweiter Ordnung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$$

gemein. Bezeichnen wir also die Klasse des Divisors $\mathfrak{G}$ mit G, so giebt es alsdann in der Klasse W der Differentiale genau $p-1$ unabhängige Divisoren, welche durch $\mathfrak{G}$ teilbar sind, d. h. es ist

$$\left\{\frac{W}{G}\right\} = p - 1.$$

Suchen wir aber die Dimension der Klasse G auf, so ist nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$\{G\} - \frac{2}{2} = \left\{\frac{W}{G}\right\} - \frac{2(p-2)}{2},$$

also

$$\{G\} = 2.$$

Daher giebt es in der Klasse G noch einen zweiten ganzen Divisor $\mathfrak{G}'$, welcher kein Vielfaches von $\mathfrak{G}$ ist, und da es für $p > 0$

keine Funktion erster Ordnung im Körper giebt, so sind Zähler und Nenner von

$$z = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}}$$

notwendig relativ prim; die Funktion ist also von der zweiten Ordnung. Wenn aber in einem Körper eine Funktion zweiter Ordnung existiert, so ist er hyperelliptisch. Denn ist u eine zweite Funktion, welche für die Darstellung sämtlicher Gröfsen des Körpers ausreicht, so genügt u einer Gleichung zweiten Grades

$$a_2 u^2 + 2 a_1 u + a_0 = 0,$$

worin a_0, a_1, a_2 ganze Funktionen von z sind. Diese Gleichung erhält, wenn wir anstatt u lieber die Funktion

$$a_2 u + a_1 = u'$$

einführen, die Form

$$u'^2 = G(z),$$

worin die ganze Funktion $G(z)$ gleich $a_1^2 - a_0 a_2$ ist. Man kann dann, wie auf S. 197, leicht zeigen, dafs die Funktion $G(z)$ in der speziellen Gestalt, die wir vorher benutzt hatten, zu Grunde gelegt werden kann.

Wir haben hiernach den Satz bewiesen:

> Wenn der algebraische Körper nicht hyperelliptisch ist d. h. wenn in ihm keine Funktionen zweiter Ordnung existieren, so besitzt die Hauptkurve keinen Doppelpunkt; jedes zu dem Körper gehörige algebraische Gebilde ist alsdann auf die Hauptkurve, ebenso wie auf die Riemannsche Fläche, durchweg eindeutig bezogen.

Wir werden in den folgenden Betrachtungen den Ausnahmefall eines hyperelliptischen Körpers meist ausschliefsen. Nun existieren aber in dem Körper stets Funktionen zweiter Ordnung, wenn $p = 1$ oder $= 2$ ist. Denn wenn $p = 1$ ist, so können die Pole einer Funktion zweiter Ordnung willkürlich vorgeschrieben werden (S. 316); Körper vom Geschlechte eins sind also stets elliptische. Wenn ferner $p = 2$ ist und dw_1, dw_2 die beiden linear unabhängigen Differentiale erster Gattung bedeuten, so haben diese die Ordnung zwei, und es ist also

$$z = \frac{dw_1}{dw_2}$$

eine Funktion zweiter Ordnung; Körper vom Geschlechte zwei sind also stets hyperelliptisch. Wenn $p = 3$ ist, so existieren im allgemeinen

innerhalb des Körpers keine Funktionen zweiter Ordnung mehr. Wir setzen also bei Ausschlufs hyperelliptischer Körper auch $p \geqq 3$ voraus.

§ 2.

Wir wollen jetzt zu Zwecken späterer Anwendung die Verzweigungsdivisoren der in der Klasse W enthaltenen Schar der ganzen Divisoren $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p)$ bestimmen und ihre Bedeutung feststellen, wobei wir den Fall des hyperelliptischen Gebildes noch nicht auszuschliefsen brauchen. Da die Dimension dieser Schar gleich p ist, so giebt es Verzweigungsdivisoren des ersten, zweiten, ... $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche mit $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_{p-1}$ bezeichnet sein sollen, und deren Ordnungen resp. $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{p-1}$ sein mögen. Nach der früher bewiesenen Formel (8) auf S. 457 ist dann

$$
1)\quad \begin{aligned}
(p-1)\sigma_1 + (p-2)\sigma_2 + \cdots + 2\sigma_{p-2} + \sigma_{p-1} \\
= (p-1)p(p-1) + p \cdot 2(p-1) \\
= (p-1)p(p+1).
\end{aligned}
$$

Ist nun $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Riemannschen Fläche und besitzt er in den Verzweigungsdivisoren

$$\mathfrak{Z}_1, \quad \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_{p-1}$$

resp. die Ordnungszahlen

$$\alpha_1 - 1, \quad \alpha_2 - 1, \ldots \alpha_{p-1} - 1,$$

so ist also

$$\sigma_1 = \Sigma(\alpha_1 - 1), \quad \sigma_2 = \Sigma(\alpha_2 - 1), \ldots \sigma_{p-1} = \Sigma(\alpha_{p-1} - 1),$$

wenn die Summen über sämtliche Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche erstreckt werden. Zufolge der Bedeutung des ersten Verzweigungsdivisors enthalten nun alle Divisoren der Schar, welche einen bestimmten Faktor $\mathfrak{P}$ haben, diesen Primdivisor in der Potenz $\mathfrak{P}^{\alpha_1}$; ist also P die Klasse von $\mathfrak{P}$, so sind die Dimensionszahlen

$$2^{(a)})\quad \left\{\frac{W}{P}\right\} = \left\{\frac{W}{P^2}\right\} = \cdots = \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1}}\right\} = p - 1.$$

Ferner enthalten alle Divisoren, welche den Faktor $\mathfrak{P}^{\alpha_1+1}$ haben, diesen Primdivisor in der Potenz $\mathfrak{P}^{\alpha_1+\alpha_2}$; also ist

$$2^{(b)})\quad \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+1}}\right\} = \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+2}}\right\} = \cdots = \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\alpha_2}}\right\} = p - 2.$$

So fortgehend erhält man zufolge der Bedeutung des dritten, ... $(p-1)^{\text{ten}}$ Verzweigungsdivisors

$$2^{(3)})\quad \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\alpha_2+1}}\right\} = \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\alpha_2+2}}\right\} = \cdots = \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}}\right\} = p-3,$$

. . . .

$$2^{(h)})\quad \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{h-1}+1}}\right\} = \cdots = \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{h-1}+\alpha_h}}\right\} = p-h,$$

. . . .

$$2^{(p-1)})\left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{p-2}+1}}\right\} = \cdots = \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{p-2}+\alpha_{p-1}}}\right\} = 1,$$

$$2^{(p)})\quad \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{p-1}+1}}\right\} = \left\{\frac{W}{P^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{p-1}+2}}\right\} = \cdots = 0.$$

Hiernach besitzt die Klasse $\frac{W}{P^r}$ dann und nur dann keine ganzen Divisoren, wenn der Exponent

$$r > \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1}$$

ist. Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn die Ordnung der Klasse $\frac{W}{P^r}$ negativ, also $r > 2(p-1)$ ist. Somit müssen die positiven Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$ stets der Ungleichung

$$3)\qquad p-1 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1} \leqq 2(p-1)$$

genügen.

Im allgemeinen sind nun die Zahlen α_h sämtlich gleich Eins, wenn nämlich der Punkt $\mathfrak{P}$ in keinem der Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_{p-1}$ auftritt; es giebt aber eine endliche Anzahl von Punkten, für welche die Summe $\sum\limits_1^{p-1} \alpha_h$ gröfser als $p-1$ ausfällt und welche also in einem oder mehreren der Verzweigungsdivisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots \mathfrak{Z}_{p-1}$ auftreten. Wir wollen diese Punkte „Weierstrafs-Punkte" nennen, weil sie in der Weierstrafsschen Theorie der algebraischen Funktionen eine besonders wichtige Rolle spielen; dann gehört also zu jedem derartigen Punkte $\mathfrak{P}$ eine bestimmte Kombination von $p-1$ positiven ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$, die nicht alle gleich eins sind und durch welche die Besonderheit des Punktes $\mathfrak{P}$ charakterisiert wird; da aber die Ungleichung (3) nur eine endliche Anzahl von Lösungen in positiven ganzen Zahlen hat, so giebt es für jedes p auch nur eine endliche Anzahl solcher Kombinationen von $p-1$ Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$.

Die in der Tabelle (2) auftretenden Klassen $\frac{W}{P^r}$ sind die Ergänzungsklassen der Potenzen von P; nach dem Riemann-Rochschen Satze kann man daher auch die Dimension dieser letzteren bestimmen und findet so

4) $$\{P^r\} = r - p + 1 + \left\{\frac{W}{P^r}\right\}.$$

Betrachten wir nun zwei aufeinanderfolgende Klassen P^r und P^{r+1}, wobei r auch den Wert Null annehmen darf, so ist

$$\{P^{r+1}\} = r - p + 2 + \left\{\frac{W}{P^{r+1}}\right\}.$$

Nun sind zwei Fälle möglich; der eine, der nach der Tabelle (2) für unendlich viele Zahlen r eintritt, ist der, daſs die Dimensionszahlen $\left\{\frac{W}{P^{r+1}}\right\}$ und $\left\{\frac{W}{P^r}\right\}$ einander gleich sind, dann ist

4a) $$\{P^{r+1}\} = \{P^r\} + 1.$$

Wenn hingegen $\left\{\frac{W}{P^{r+1}}\right\} = \left\{\frac{W}{P^r}\right\} - 1$ ist, was offenbar nach der Tabelle (2) dann und nur dann eintritt, wenn r eine der p Zahlen

5) $$0,\quad \alpha_1,\quad \alpha_1 + \alpha_2,\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1}$$

ist, so ist

4b) $$\{P^{r+1}\} = \{P^r\}.$$

Die Bedeutung dieser beiden Eventualitäten ist jetzt leicht zu erkennen: Bezeichnen wir für einen Augenblick die Dimensionszahl $\{P^r\}$ mit ϱ, so giebt es im ganzen ϱ linear unabhängige ganze Divisoren

$$\mathfrak{G}_1,\quad \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_\varrho,$$

welche dem Divisor $\mathfrak{P}^r$ äquivalent sind. Multiplizieren wir diese Reihe mit dem Faktor $\mathfrak{P}$, so sind

6) $$\mathfrak{P}\mathfrak{G}_1,\quad \mathfrak{P}\mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{P}\mathfrak{G}_\varrho$$

ϱ linear unabhängige Divisoren der folgenden Klasse P^{r+1}. Tritt nun der Fall (4b) ein, so bilden diese auch ein Fundamentalsystem der Klasse P^{r+1}; die Klasse ist also eine uneigentliche, und jede Funktion des Körpers mit dem Nenner $\mathfrak{P}^{r+1}$ ist von der Form

$$\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}^{r+1}} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}^r};$$

d. h. es giebt keine Funktion des Körpers, welche nur in $\mathfrak{P}$ unendlich wird und die Ordnung $r+1$ besitzt. Im Falle (4a) hingegen ist die Reihe (6) kein vollständiges Fundamentalsystem der Klasse P^{r+1},

sondern um ein solches zu erhalten, hat man noch einen weiteren Divisor $\mathfrak{G}_{\varrho+1}$ hinzuzufügen, und dieser kann kein Vielfaches von $\mathfrak{P}$ sein, weil sonst $\frac{\mathfrak{G}_{\varrho+1}}{\mathfrak{P}}$ ein ganzer Divisor der Klasse P^r wäre, also die $\varrho+1$ Divisoren kein unabhängiges System bilden würden. Bildet man daher die p Zahlen, welche aus der Reihe (5) durch Vermehrung um eine Einheit hervorgehen:

$$7)\qquad 1,\ \alpha_1+1,\ \alpha_1+\alpha_2+1, \ldots \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{p-1}+1,$$

so sind das diejenigen Ordnungszahlen, welche eine Funktion des Körpers mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}$ niemals erhalten kann; dieselben mögen in dieser Reihenfolge mit

$$8)\qquad \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3, \ldots \varrho_p$$

bezeichnet sein, so dafs $\varrho_1=1$ und

$$\alpha_1=\varrho_2-\varrho_1,\quad \alpha_2=\varrho_3-\varrho_2,\quad \alpha_3=\varrho_4-\varrho_3, \ldots \alpha_{p-1}=\varrho_p-\varrho_{p-1}$$

ist und die Zahlen α also die Differenzenreihe der Ordnungszahlen ϱ bilden.

Die Gesamtheit der Funktionen des Körpers mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}$ bildet ein Ideal; ist nämlich z eine dieser Funktionen, so ist jede andere eine ganze Funktion von z und gehört also dem Ideal $I(1)$ an (S. 220). Aber die Funktionen dieses Ideals besitzen nicht alle möglichen Ordnungszahlen, sondern das System der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... zerfällt in Bezug auf obiges Ideal in zwei Klassen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$, von denen die erste $\mathfrak{R}$ aus einer endlichen Anzahl von Individuen, nämlich den p positiven Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ besteht, während die zweite unendlich viele, nämlich alle übrigen positiven ganzen Zahlen und die Null enthält, und man kann die erste als die Klasse der fehlenden, die zweite als die Klasse der vorhandenen Ordnungszahlen bezeichnen. Da die erste Klasse stets aus p Elementen besteht, so kann man hieraus auch eine neue Definition der Geschlechtszahl p entnehmen und folgenden Satz aussprechen, der als „Weierstrafsscher Lückensatz" bezeichnet wird:

> Betrachtet man das System derjenigen Funktionen des Körpers, welche nur in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche unendlich werden, so treten nicht alle positiven oder verschwindenden Zahlen als Ordnungszahlen auf, sondern es fehlen stets so viele, als die Geschlechtszahl p des Körpers angiebt; die Anzahl der fehlenden Ordnungszahlen ist also von der Auswahl des Punktes $\mathfrak{P}$ unabhängig.

§ 3.

Wir wollen jetzt die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p$ selbst, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Elemente ihrer Differenzenreihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{p-1}$ einer näheren Untersuchung unterziehen. Die positiven Zahlen α dürfen nämlich nicht beliebig gewählt werden, sondern sie müssen überdies gewissen Bedingungen genügen, und es giebt bei gegebenem p nur eine endliche Anzahl von möglichen Kombinationen für sie. Es geht dies schon aus der früher aufgestellten Ungleichung

$$p - 1 \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1} \leqq 2(p-1)$$

hervor, welcher nur eine endliche Anzahl von Kombinationen positiver Zahlen genügen können. Zu dieser Bedingung tritt aber noch eine andere und wichtigere, und wir gelangen zu ihr, wenn wir statt des Systems $\mathfrak{R}$ die Klasse $\mathfrak{M}$ der vorhandenen Ordnungszahlen ins Auge fassen. Sind nämlich g_α und g_β zwei Funktionen des Ideals $I(1)$ mit den Ordnungszahlen α und β, so ist das Produkt $g_\alpha g_\beta$ ebenfalls eine Funktion des Ideals mit der Ordnungszahl $\alpha + \beta$. Wenn also α und β in der Klasse $\mathfrak{M}$ vorkommen, so tritt auch die Summe $\alpha + \beta$ in der Klasse $\mathfrak{M}$ auf, während die Differenz $\alpha - \beta$ nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten zu sein braucht, da der Quotient $\frac{g_\alpha}{g_\beta}$ im allgemeinen aufser $\mathfrak{P}$ noch andere Pole besitzt und alsdann nicht dem Ideale angehört. Ein System von ganzen Zahlen, welches mit irgend zwei Zahlen auch deren Summe enthält, wollen wir einen „additiven Modul“ nennen, wobei der Zusatz „additiv“ darauf hinweisen soll, dafs nur die Addition, nicht aber auch die Subtraktion erzeugende Operation des Moduls ist. Dann gilt also der Satz:

> Das System $\mathfrak{M}$ der vorhandenen Ordnungszahlen bildet einen additiven Modul.

Im allgemeinen ist ein Punkt $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche in keinem der Divisoren $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots \mathfrak{Z}_{p-1}$ enthalten; dann haben die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{p-1}$ alle den Wert eins, und es ist also das System der fehlenden Ordnungszahlen

$$\varrho_1 = 1, \quad \varrho_2 = 2, \quad \varrho_3 = 3, \dots \varrho_p = p;$$

das System der vorhandenen Ordnungszahlen ist also

$$0, \quad p+1, \quad p+2, \dots,$$

und es giebt somit für einen gewöhnlichen Punkt der Fläche keine Funktionen erster, zweiter, ... p^{ter} Ordnung, während alle höheren Ordnungszahlen auftreten.

Es giebt aber eine endliche Anzahl von Punkten, eben die vorher erwähnten Weierstrafs-Punkte, welche von diesem Schema abweichen und für welche also die in der Gleichung (1) auftretende Summe

$$1)\quad \alpha = (p-1)(\alpha_1 - 1) + (p-2)(\alpha_2 - 1) + \cdots + 2(\alpha_{p-2} - 1) + (\alpha_{p-1} - 1)$$

positiv ausfällt. Wir wollen diese Zahl das Gewicht des Punktes nennen; dann gilt zufolge der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen der Satz:

Die Summe der Gewichte sämtlicher Punkte der Riemannschen Fläche ist gleich $(p-1)p(p+1)$; nur die Weierstrafs-Punkte haben positives Gewicht.

Daher giebt es in jedem Körper Weierstrafs-Punkte, falls $p > 1$ ist, und diese werden nach der Gleichung (7) auf S. 456 durch die Primteiler des zur Klasse $W^{\frac{1}{2}p(p+1)}$ gehörigen Divisors

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1^{p-1} \mathfrak{Z}_2^{p-2} \cdots \mathfrak{Z}_{p-2}^2 \mathfrak{Z}_{p-1}^1$$

geliefert. Im allgemeinen tritt aber ein derartiger Primfaktor eben nur in der ersten Potenz in $\mathfrak{Z}$ auf, und es kann als eine Besonderheit betrachtet werden, wenn der Divisor $\mathfrak{Z}$ einen mehrfachen Primteiler enthält. Für einen solchen einfachen Teiler ist aber notwendigerweise

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \ldots \alpha_{p-2} = 1, \quad \alpha_{p-1} = 2,$$

also ist

$$\varrho_1 = 1, \quad \varrho_2 = 2, \ldots \varrho_{p-2} = p-2, \quad \varrho_{p-1} = p-1, \quad \varrho_p = p+1,$$

und die Klasse $\mathfrak{M}$ besteht aus den Zahlen

$$o, \quad p, \quad p+2, \quad p+3, \quad p+4, \ldots$$

Wir wollen solche Körper, welche nur die gewöhnlichen durch den Wert des Geschlechtes p bedingten Besonderheiten darbieten, ordinäre Körper nennen. Es erweist sich dann im Verlaufe der späteren Betrachtungen oftmals als notwendig, die ordinären Körper von denjenigen zu trennen, welche eine besondere Eigenart besitzen und sich hierdurch von den anderen ihres Geschlechtes unterscheiden. In einem ordinären Körper besitzt daher jeder Weierstrafs-Punkt $\mathfrak{P}$ das Gewicht eins, die Anzahl dieser Punkte ist somit $(p-1)p(p+1)$, und für jeden von ihnen giebt es in dem Körper eine Funktion mit dem p-fachen Pole $\mathfrak{P}$, während es keine Funktionen niedrigerer Ordnung mit einer einzigen Unendlichkeitsstelle giebt.

Wenn aber ein Körper vom Geschlechte p nicht ordinär ist, so ist es von Interesse, die hier möglichen Kombinationen der Zahlen ϱ des näheren zu untersuchen. Wir gelangen hierzu am einfachsten, wenn wir das System $\mathfrak{M}$ der vorhandenen Ordnungszahlen nach der kleinsten in ihr auftretenden positiven Zahl in Kongruenzklassen zer-

legen. Es sei n die kleinste positive Zahl von $\mathfrak{M}$, so enthält $\mathfrak{M}$ zuvörderst die Zahlen

$$0,\quad n,\quad 2n,\quad 3n,\quad 4n,\ldots; \tag{2a}$$

ist ferner h eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$, und fehlen in der Reihe der Zahlen $\nu n + h$ die ersten μ_h Elemente, so ist nach dem Satze des letzten Abschnittes

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1} = p. \tag{3}$$

Das System $\mathfrak{M}$ besteht alsdann aufser aus den Zahlen (2a) noch aus den folgenden $n-1$ Reihen

$$\left\{\begin{array}{llll} \mu_1 n + 1, & (\mu_1+1)\,n+1, & (\mu_1+2)\,n+1, & \ldots \\ \mu_2 n + 2, & (\mu_2+1)\,n+2, & (\mu_2+2)\,n+2, & \ldots \\ \mu_3 n + 3, & (\mu_3+1)\,n+3, & (\mu_3+2)\,n+3, & \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ \mu_{n-1} n + n-1, & (\mu_{n-1}+1)\,n+n-1, & (\mu_{n-1}+2)\,n+n-1, & \ldots \end{array}\right. \tag{2b}$$

Addieren wir nun die Elemente zweier Reihen, welche durch die Indices h und i bezeichnet sind, so müssen wir ein Element der Reihe $h+i$ erhalten, wobei die Indices nur (mod. n) in Betracht kommen. Führen wir dies insbesondere für die Anfangselemente aus, so ergeben sich zwei verschiedene Ungleichungen, je nachdem $h+i<n$ oder $>n$ ist.

1) Ist $h+i<n$, so ist

$$(\mu_h n + h) + (\mu_i n + i) = (\mu_h + \mu_i)\,n + (h+i),$$

also mufs

$$\mu_h + \mu_i \geqq \mu_{h+i} \qquad (h+i<n) \tag{4a}$$

sein.

2) Wenn $h+i>n$ ist, so ist

$$(\mu_h n + h) + (\mu_i n + i) = (\mu_h + \mu_i + 1)\,n + (h+i-n),$$

also mufs alsdann

$$\mu_h + \mu_i + 1 \geqq \mu_{h+i-n} \qquad (h+i>n) \tag{4b}$$

sein, während für $h+i=n$ keine Bedingung auftritt.

Die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}$, durch welche der Modul $\mathfrak{M}$ bei gegebenem p und n charakterisiert ist, müssen also aufser der Gleichung (3) noch den Ungleichungen (4a) und (4b) genügen; diese Bedingungen sind aber, wie man sofort sieht, auch ein ausreichendes System, denn wenn sie erfüllt sind, so bilden die Reihen (2a) und (2b) einen additiven Modul. Hierdurch wird die Anzahl der überhaupt

möglichen Zahlenkombinationen bei gegebenem n und p sehr eingeschränkt. Ist z. B. $n = 3$ und p beliebig, so hat man die Bedingungen

$$\mu_1 + \mu_2 = p, \quad 2\mu_1 \geq \mu_2, \quad 2\mu_2 + 1 \geq \mu_1,$$

also

$$2p + 1 \geq 3\mu_1 \geq p.$$

Setzen wir also

$$p = 3\pi + \varepsilon,$$

wo ε eine der Zahlen 0. 1, 2 bedeutet, so hat man die $\pi + 1$ Möglichkeiten

für $\varepsilon = 0$: $\mu_1 = \pi, \quad \pi + 1, \ldots 2\pi$ | $\mu_2 = 2\pi, \quad 2\pi - 1, \ldots \pi$
für $\varepsilon = 1$: $\mu_1 = \pi + 1, \pi + 2, \ldots 2\pi + 1$ | $\mu_2 = 2\pi, \quad 2\pi - 1, \ldots \pi$
für $\varepsilon = 2$: $\mu_1 = \pi + 1, \pi + 2, \ldots 2\pi + 1$ | $\mu_2 = 2\pi + 1, 2\pi, \quad \ldots \pi + 1.$

Das Gewicht eines Weierstraſs-Punktes

$$\alpha = (p-1)(\alpha_1 - 1) + (p-2)(\alpha_2 - 1) + \cdots + 2(\alpha_{p-2} - 1) + (\alpha_{p-1} - 1)$$

ist, wie nun gezeigt werden soll, für einen hyperelliptischen Körper gleich $\frac{p(p-1)}{2}$. Legt man nämlich, wie auf S. 485, die zweiblättrige Riemannsche Fläche mit den $2(p+1)$ Verzweigungspunkten

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_{2p+2}$$

zu Grunde, so ist jeder von diesen ein Weierstraſs-Punkt. Denn die Funktion $\frac{1}{z - e_i}$ wird nur in $\mathfrak{P}_i$, und zwar von zweiter Ordnung, unendlich; daher ist die Zahl n in (2a) gleich zwei, also nach (3) $\mu_1 = p$, und das System $\mathfrak{M}$ erhält die Gestalt

$$\begin{array}{cccc} 0, & 2, & 4, & 6, \ldots \\ 2p+1, & 2p+3, & 2p+5, & 2p+7, \ldots \end{array}$$

Es fehlen also die Ordnungszahlen

$$1, \quad 3, \quad 5, \ldots 2p - 1,$$

und es ist für jeden dieser Punkte $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{p-1} = 2$, also ist sein Gewicht

$$\alpha = 1 + 2 + \cdots + (p-1) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Da ferner die Zahl der Verzweigungspunkte gleich $2(p+1)$ ist, so ist die Summe ihrer Gewichte bereits $(p-1)p(p+1)$, und es giebt somit auſser den Verzweigungspunkten $\mathfrak{P}_i$ keine anderen Weierstraſs-Punkte.

In allen anderen Fällen aber ist, wie Herr Hurwitz*) gezeigt und für den Beweis des Satzes des nächsten Paragraphen in Anwendung ge-

*) Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Math. Annalen, Bd. 41, S. 403—442 (1892).

bracht hat, das Gewicht α eines Weierstraſs-Punktes kleiner als $\frac{1}{2}p(p-1)$. Führt man nämlich an Stelle der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$ die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ in die Gleichung (1) ein, so hat man, weil $\varrho_1 = 1$ ist:

$$\begin{aligned}\alpha &= (p-1)(\varrho_2-\varrho_1) + (p-2)(\varrho_3-\varrho_2) + \cdots \\ &\quad + 2(\varrho_{p-1}-\varrho_{p-2}) + (\varrho_p-\varrho_{p-1}) - \frac{p(p-1)}{2} \\ &= \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{p-1} + \varrho_p - \frac{p(p+1)}{2};\end{aligned}$$

geht man nun auf die Tabelle (2b) zurück, so findet man als Summe der in dem Modul $\mathfrak{M}$ fehlenden Ordnungszahlen

$$\varrho_1 + \cdots + \varrho_p = \sum_{r=1}^{n-1} \{r + (r+n) + (r+2n) + \cdots + (r + (\mu_r - 1)n)\},$$

also, wenn man zur Abkürzung

$$r + (\mu_r - 1)n = h_r$$

und somit

$$\mu_r = \frac{h_r + n - r}{n}$$

setzt:

$$\alpha = \sum_{r=1}^{n-1} \{r + (r+n) + \cdots + h_r\} - \frac{1}{2}p(p+1)$$

oder

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}(r+h_r)\mu_r - \frac{1}{2}p(p+1) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{n-1}(h_r+r)(h_r+n-r) - \frac{1}{2}p(p+1).\end{aligned}$$

Da aber zufolge der Gleichung (3)

$$\sum_{r=1}^{n-1} h_r = \frac{1}{2}n(2p+1-n)$$

ist, so ist auch

$$\alpha = \frac{1}{2}p(p-1) - \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{n-1} h_r(2p-1-h_r) - \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{n-1} r(r-1)$$

oder

$$\alpha = \frac{1}{2}p(p-1) - \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{n-1} h_r(2p-1-h_r) - \frac{1}{6}(n-1)(n-2).$$

Ist nun $n = 2$, so werden die beiden Subtrahenden gleich Null, da alsdann $h_r = 2p - 1$ ist, und es ist also $\alpha = \frac{1}{2}p(p-1)$. Wenn aber

$n > 2$ ist, so ist der erste Subtrahend jedenfalls nicht negativ, weil zufolge der nach (3), (7) und (8) des vorigen Abschnittes bestehenden Ungleichung

$$\varrho_p - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1} \leq 2p - 2$$

die gröfste der fehlenden Ordnungszahlen, also auch jede der Zahlen $h_r \leq 2p - 1$ ist; der zweite Subtrahend aber ist positiv, und folglich ist, wie behauptet wurde,

$$\alpha < \frac{1}{2} p(p-1).$$

Da aber die Gewichte sämtlicher Weierstraſs-Punkte zusammen $p(p-1)(p+1)$ betragen, so folgt jetzt in der That:

Wenn $p > 1$ ist, so ist die Anzahl der Weierstraſs-Punkte für ein hyperelliptisches Gebilde gleich $2(p+1)$, für jedes andere algebraische Gebilde aber stets gröſser als $2(p+1)$. Elliptische und rationale Gebilde haben keine Weierstraſs-Punkte.

§ 4.

Wir wollen jetzt auf die letzte Ungleichung den Beweis eines Satzes über algebraische Gebilde stützen, welcher in einer Kette später anzustellender Untersuchungen ein notwendiges Glied bildet.

Unterwirft man ein algebraisches Gebilde

$$F(z, u) = 0$$

durch die umkehrbaren Gleichungen

$$z' = \varphi(z, u), \quad u' = \psi(z, u)$$

einer Abbildung, so kann es eintreten, daſs das transformierte Gebilde

$$F(z', u') = 0$$

mit dem ursprünglichen übereinstimmt; alsdann bezeichnet man jene Abbildung als eine Transformation des Gebildes in sich. Über diese besonderen Arten von birationalen Transformationen läſst sich sogleich einiges feststellen.

Zunächst ist es klar, daſs die Punkte der Riemannschen Fläche durch eine solche Transformation des Gebildes einander umkehrbar eindeutig zugeordnet werden. Konstruiert man nämlich die Riemannschen Flächen $\mathfrak{R}_z$ und $\mathfrak{R}_{z'}$, so fallen diese kongruent aus, weil sie zu derselben Gleichung $F = 0$ gehören, und wir können also die beiden Flächen, wenn wir wollen, auch miteinander zur Deckung bringen. Andererseits wird aber durch jede birationale Transformation eine eindeutige Beziehung der Punkte von $\mathfrak{R}_z$ und $\mathfrak{R}_{z'}$ vermittelt (S. 243); in unserem besonderen Falle wird also $\mathfrak{R}_z$ auf sich selbst eindeutig abgebildet.

Umgekehrt aber gehört auch zu jeder analytischen Beziehung, durch welche die Punkte einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ einander umkehrbar eindeutig zugeordnet werden, eine Transformation eines algebraischen Gebildes in sich. Werden nämlich die Punkte irgend zweier Riemannschen Flächen $\mathfrak{R}_z$ und $\mathfrak{R}_{z'}$, die zu den Gleichungen $F(z, u) = 0$ und $F(z', u') = 0$ gehören mögen, umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen, so wird hierdurch stets eine birationale Transformation zwischen den Körpern $K(z, u)$ und $K(z', u')$ vermittelt; denn jede Gröſse z. B. des zweiten Körpers ist nicht bloſs auf $\mathfrak{R}_{z'}$, sondern auch auf $\mathfrak{R}_z$ eine eindeutige Funktion des Ortes mit nur polaren Unstetigkeiten und gehört somit auch dem ersten Körper an (S. 113). In unserem besonderen Falle aber, in welchem die Riemannschen Flächen $\mathfrak{R}_z$ und $\mathfrak{R}_{z'}$ kongruent sind, können auch die zugehörigen Gleichungen $F(z, u) = 0$ und $\overline{F}(z', u') = 0$ als identisch angenommen werden, das Gebilde wird also eindeutig in sich transformiert.

Hieraus ergiebt sich jetzt sofort, daſs die Gesamtheit $\mathfrak{G}$ der Transformationen eines algebraischen Gebildes in sich in dem auf S. 106 auseinandergesetzten Sinne eine Gruppe bildet; denn zwei derartige Transformationen S und T, hintereinander ausgeführt, ordnen wiederum die Punkte der Riemannschen Fläche einander umkehrbar eindeutig zu. Wir wollen daher auch hier die aus S und T zusammengesetzte Abbildung durch das symbolische Produkt ST bezeichnen. Die Einheit E der Gruppe ist dann diejenige Abbildung, durch welche alle Punkte der Fläche sich selbst zugeordnet werden, und wenn S irgend eine Transformation des Gebildes in sich ist, so ist S^{-1} diejenige Transformation, durch welche die Wirkung von S wieder rückgängig gemacht wird.

In der Gruppentheorie unterscheidet man nun zwei wesentlich verschiedene Arten, nämlich endliche und unendliche Gruppen, je nachdem die Anzahl der in ihnen enthaltenen Elemente endlich oder unendlich ist. Es entsteht daher hier die wichtige Aufgabe, zu entscheiden, ob das Gebilde eine endliche Anzahl von Transformationen in sich besitzt oder nicht. Diese Frage ist aber leicht zu entscheiden, wenn das Gebilde Weierstraſs-Punkte besitzt, wenn also $p > 1$ ist. In diesem Falle ist nämlich, wie jetzt gezeigt werden soll, jene Gruppe $\mathfrak{G}$ stets endlich.

Eine Transformation des Gebildes in sich verwandelt jeden Weierstraſs-Punkt notwendig wieder in einen solchen. Denn ein derartiger Punkt $\mathfrak{P}$ ist vollständig dadurch charakterisiert, daſs es Funktionen ξ des Körpers mit dem Nenner $\mathfrak{n}_\xi = \mathfrak{P}^\varrho$ giebt, deren Ordnung $\varrho \leq p$ ist. Geht nun durch die Abbildung $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ und

$\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{x}'$ über, so ist $\mathfrak{n}_{\mathfrak{x}'} = \mathfrak{P}'^{\varrho}$, und folglich ist $\mathfrak{P}'$ ebenfalls ein Weierstrafs-Punkt.

Eine Transformation des Gebildes in sich läfst daher entweder die Weierstrafs-Punkte fest oder vertauscht sie miteinander. Es seien nun $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ die sämtlichen Weierstrafs-Punkte; betrachten wir dann nur diejenigen Transformationen, welche diese Punkte in Ruhe lassen, so ist es klar, dafs diese ebenfalls eine Gruppe und zwar eine in der vorigen enthaltene Untergruppe $\mathfrak{U}$ bilden. Ist aber V eine Transformation, welche eine Vertauschung der Weierstrafs-Punkte zur Folge hat, und U ein Element der Untergruppe $\mathfrak{U}$, so bringt das Produkt $V' = UV$ dieselbe Permutation der Weierstrafs-Punkte hervor, wie V allein. Sind umgekehrt V und V' zwei Abbildungen, welche dieselbe Permutation der Weierstrafs-Punkte bewirken, so bleiben diese bei der Operation $V'V^{-1}$ fest, und folglich ist $V'V^{-1}$ ein Element U von $\mathfrak{U}$, also $V' = UV$. Giebt es also zu einer bestimmten Permutation der Weierstrafs-Punkte überhaupt eine Transformation V des Gebildes in sich, so erhält man alle von der gleichen Beschaffenheit, indem man V mit allen Elementen der Untergruppe $\mathfrak{U}$ zusammensetzt, und zwar ergiebt sich so jede Transformation nur einmal. Da es aber nur eine endliche Anzahl von Permutationen der Weierstrafs-Punkte giebt, so folgt jetzt, dafs die Gruppe $\mathfrak{G}$ gleichzeitig mit der Untergruppe $\mathfrak{U}$ endlich oder unendlich ist. Wir können aber leicht zeigen, dafs $\mathfrak{U}$ überhaupt nur aus einem einzigen Elemente, nämlich der identischen Abbildung E, oder allenfalls aus zweien besteht, und damit ist der angekündigte Satz bewiesen.

Ist nämlich das Gebilde nicht hyperelliptisch und S eine Transformation desselben in sich, welche die Weierstrafs-Punkte fest läfst, so sei $\mathfrak{P}$ ein von den Weierstrafs-Punkten verschiedener Punkt, $\mathfrak{P}'$ sein Bildpunkt. Konstruieren wir nun eine Funktion z von möglichst niedriger Ordnungszahl mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}$, so ist diese Ordnung nach S. 493 gleich $p+1$, also

$$z = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{P}^{p+1}},$$

und diese Funktion geht bei der Abbildung über in

$$z' = \frac{\mathfrak{z}'}{\mathfrak{P}'^{p+1}}.$$

Nun verschwindet die Differenz

$$z - z' = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{P}^{p+1}} - \frac{\mathfrak{z}'}{\mathfrak{P}'^{p+1}}$$

in allen Weierstrafs-Punkten, weil z und z' in ihnen den gleichen Wert annimmt, und da die Zahl dieser Punkte nach S. 498 gröfser als $2(p+1)$ ist, so würde jene Funktion, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ verschieden

wären, mehr Null- als Unendlichkeitsstellen besitzen. Folglich ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$, und da $\mathfrak{P}$ beliebig ist, so ist die Abbildung die identische.

Wenn das Gebilde hyperelliptisch und somit durch eine Gleichung der Form

$$u^2 = c(z - e_1)(z - e_2) \ldots (z - e_{2p+2})$$

bestimmt ist, so giebt es eine von der identischen E verschiedene Abbildung, bei der die Weierstraſs-Punkte fest bleiben, nämlich diejenige, durch welche die übereinanderliegenden Punkte der zweiblättrigen Fläche $\mathfrak{R}_z$ zugeordnet werden und für die somit

$$z' = z, \quad u' = -u$$

ist. Diese ist aber auch auſser E die einzige; denn sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ irgend zwei übereinanderliegende Punkte von $\mathfrak{R}_z$ und

$$\xi = \frac{1}{z - \alpha} = \frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2}$$

eine Funktion zweiter Ordnung mit den Polen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, so geht dieselbe bei der Abbildung über in

$$\xi' = \frac{1}{z' - \alpha} = \frac{\mathfrak{n}_{z'}}{\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2'}.$$

Die Differenz

$$\xi - \xi' = \frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2} - \frac{\mathfrak{n}_{z'}}{\mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2'}$$

verschwindet in den $2p + 2$ Weierstraſs-Punkten, welche hier die Verzweigungspunkte sind, und da für $p > 1$ stets $2(p + 1) > 4$ ist, so müssen ξ und ξ', also auch z und z', gleich sein, und es ist also auch

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2'.$$

Dann ist entweder $\mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2' = \mathfrak{P}_2$, also die Abbildung die identische, oder $\mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_2' = \mathfrak{P}_1$, also die Abbildung durch die Zuordnung je zweier übereinanderliegender Punkte beider Blätter gegeben, was eben der Inhalt unserer Behauptung war.

Somit haben wir jetzt den folgenden Satz bewiesen, auf den wir später in anderem Zusammenhange zurückkommen:

Ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $p > 1$ besitzt stets nur eine endliche Anzahl von Transformationen in sich.

Der Satz findet seine Ergänzung in dem später zu führenden Nachweise, daſs für $p = 0$ und $p = 1$ die Gruppe der Transformationen des Gebildes in sich kontinuierlich, also auch unendlich ist.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Projektionen einer Kurve in niedere Räume. — Einfach und mehrfach überdeckte Projektionskurven. — Die Potenzen der Differentialklasse und die Darstellung ihrer ganzen Divisoren. — Satz von Noether. — Nicht-hyperelliptische Körper vom Geschlechte drei und vier. — Die beiden verschiedenen Arten von Körpern des Geschlechtes vier. — Normalgleichungen und Moduln.

§ 1.

Da die Hauptkurve H jedes Körpers, der nicht hyperelliptisch ist, frei von Doppelpunkten ist, so ergiebt die Übertragung der in § 2 der siebenundzwanzigsten Vorlesung angewendeten Methoden auf Kurven im Raume von $p-1$ Dimensionen, dafs für ein hinreichend grofses r jeder ganze Divisor der Klasse W^r als ganze homogene Funktion r^{ten} Grades der Fundamentaldivisoren $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p$ der Klasse W dargestellt werden kann. Es ist nun aber sehr bemerkenswert, dafs in diesem Falle die untere Grenze für den Exponenten r die kleinstmögliche wird; es gilt also der folgende Satz:

> Ist der Körper K nicht hyperelliptisch, so kann jeder ganze Divisor der Klasse W^r als ganze homogene Funktion r^{ten} Grades der p Fundamentaldivisoren der Klasse W ausgedrückt werden; d. h. die ganzen Divisoren einer beliebigen Potenz der Klasse W können durch Multiplikation und Addition der ganzen Divisoren der Klasse W selbst erzeugt werden.

Den Beweis dieses von Herrn Noether*) herrührenden wichtigen Theorems erbringen wir im nächsten Paragraphen. In diesem wollen wir ihn dadurch vorbereiten und ergänzen, dafs wir einige allgemeine Bemerkungen über die Projektionen der Kurven im Raume von drei oder mehr Dimensionen voraufschicken und einen hierauf bezüglichen Satz feststellen.

Wenn eine Kurve im Raume von s Dimensionen ($s \geqq 3$), die auch beliebige Singularitäten besitzen kann, durch die Gleichungen gegeben ist:

1) $$x_1 : x_2 : \cdots : x_s : x_{s+1} = \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \cdots : \mathfrak{A}_s : \mathfrak{A}_{s+1},$$

*) Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen. Math. Ann., Bd. 17, S. 263—284 (1880).

so sind $\mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_s, \mathfrak{A}_{s+1}$ ganze teilerfremde Divisoren einer Klasse A des Körpers

$$K = K\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots \frac{x_s}{x_1}, \frac{x_{s+1}}{x_1}\right).$$

Projizieren wir die Kurve von einem Punkte P mit den Koordinaten $(a_1, \ldots a_s, a_{s+1})$ in einen Raum von nur $s-1$ Dimensionen, so wollen wir die Gleichungen der Projektion aufstellen und untersuchen. Wenn nun a_{s+1} von Null verschieden ist und darum $= 1$ gesetzt werden kann, so sind

$$x_1 - a_1 x_{s+1} = 0, \quad x_2 - a_2 x_{s+1} = 0, \ldots x_s - a_s x_{s+1} = 0$$

s linear unabhängige Gleichungen ebener Mannigfaltigkeiten, welche durch P hindurchgehen, und wir haben somit, um die Projektionskurve zu erhalten, die zwischen den s Funktionen

$$\xi_i = x_i - a_i x_{s+1}$$

bestehenden homogenen Gleichungen zu diskutieren, also das algebraische Gebilde

$$2) \quad \xi_1 : \xi_2 : \cdots : \xi_s = \mathfrak{A}_1 - a_1 \mathfrak{A}_{s+1} : \mathfrak{A}_2 - a_2 \mathfrak{A}_{s+1} : \cdots : \mathfrak{A}_s - a_s \mathfrak{A}_{s+1}$$

zu untersuchen; wenn das Projektionscentrum speziell der Koordinateneckpunkt $P_0 = (0, 0, \ldots 0, 1)$ ist, so lauten die Gleichungen der Kurve

$$3) \qquad x_1 : x_2 : \cdots : x_s = \mathfrak{A}_1 : \mathfrak{A}_2 : \cdots : \mathfrak{A}_s.$$

Die Untersuchung irgend einer Projektion der Kurve (1) ist daher völlig äquivalent derjenigen einer in der Schar $(\mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_s, \mathfrak{A}_{s+1})$ enthaltenen Unterschar, für welche die Dimension um Eins kleiner geworden ist.

Jedem Punkte der Kurve (1) entspricht ein und nur ein Punkt der Projektionskurve (2); es kann aber bei besonderer Auswahl des Centrums P eintreten, dafs die umgekehrte Beziehung durchweg mehrdeutig ist und daher jeder Punkt der Projektionskurve die charakteristische Eigenschaft der singulären Stellen besitzt, einem ganzen Divisor zweiter oder höherer Ordnung des Körpers K zu entsprechen. In der That werden wir z. B. im Falle $p = 4$ finden, dafs die Hauptkurve, welche eine Raumkurve sechster Ordnung ist, unter gewissen Bedingungen von einem bestimmten Punkte aus als dreifach überdeckter Kegelschnitt projiziert werden kann, und somit jedem Punkte der Projektion drei der Hauptkurve entsprechen. Solche mehrfache Überdeckungen durch Projektion können natürlich auch in höheren Räumen eintreten; wir wollen aber den für unsere Zwecke notwendigen Nachweis führen, dafs es stets nur eine endliche Anzahl von Projektionscentren dieser besonderen Eigenschaft giebt.

Nehmen wir jetzt die Gleichungen der Projektionskurve in der spezielleren Form (3) an und betrachten den zugehörigen Körper

$$k = k\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots \frac{x_s}{x_1}\right),$$

so ist k entweder mit K identisch oder ein Unterkörper von K. Im ersteren Falle ist $\frac{x_{s+1}}{x_1}$ eine rationale Funktion der Quotienten

$$\frac{x_2}{x_1}, \dots \frac{x_s}{x_1},$$

und die Beziehung zwischen der ursprünglichen und der Projektionskurve daher umkehrbar eindeutig; im anderen ist $\frac{x_{s+1}}{x_1}$ nur eine algebraische Funktion jener Quotienten und genügt also einer irreduktibeln Gleichung ν^{ten} Grades:

$$\alpha_\nu \left(\frac{x_{s+1}}{x_1}\right)^\nu + \alpha_{\nu-1}\left(\frac{x_{s+1}}{x_1}\right)^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 \frac{x_{s+1}}{x_1} + \alpha_0 = 0,$$

deren Koeffizienten dem Körper k angehören; dann ist jene Beziehung ν-deutig, und die Projektion der Kurve (1) liefert eine ν-fache Überdeckung der Kurve (3). Wir wollen den letzteren, allgemeineren Fall voraussetzen und die Kurven untersuchen, deren Projektionscentren die Punkte der Umgebung von P_0 sind. Hierbei nehmen wir zunächst $a_1 = a_2 = 0$ an und beschränken also das Projektionscentrum auf eine durch P_0 gelegte ebene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_{s-2}$ von $s-2$ Dimensionen, also z. B. im Falle $s = 3$ auf eine Gerade (vgl. S. 478).

Wählen wir als die unabhängige Variable des Körpers K die Funktion

$$x = \frac{x_2}{x_1},$$

deren Ordnung r sein möge, und bilden mit $s-1$ Parametern $v_3, v_4, \dots v_s, v_{s+1}$ die Linearform

$$y = \frac{v_3 x_3 + v_4 x_4 + \dots + v_s x_s + v_{s+1} x_{s+1}}{x_1}, \tag{4}$$

so folgt aus den Betrachtungen des § 1 der sechzehnten Vorlesung, daſs y bei unbestimmten v einer irreduktibeln Gleichung r^{ten} Grades genügt:

$$F(y, x; v_i) = (y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_r) = 0,$$

deren Koeffizienten rational von x und ganz und homogen von den Parametern v abhängen. Setzen wir aber $v_{s+1} = 0$, so wird F reduktibel und die ν^{te} Potenz einer unzerlegbaren Funktion

$$F(y, x; v_3, \dots v_s, 0) = \big(G(y, x; v_3, \dots v_s)\big)^\nu;$$

denn die r konjugierten Werte der Funktion y zerfallen zufolge unserer Voraussetzung in Gruppen von ν Elementen in der Art, daſs innerhalb

einer Gruppe die Koeffizienten von $v_3, \ldots v_s$ einander gleich und nur die Koeffizienten von v_{s+1} verschieden sind, und für $v_{s+1} = 0$ werden also je ν solche Elemente einander gleich.

Setzen wir in die Gleichung

$$F(y, x; v_i) = 0$$

für y seinen Wert (4) ein und entwickeln nach Potenzprodukten von $v_3, \ldots v_s, v_{s+1}$, so mufs jeder Koeffizient zufolge der bestehenden algebraischen Beziehungen verschwinden; diese Identität mufs also auch bestehen bleiben, wenn wir sie nach einer der Unbestimmten v_k differenzieren, und durch dieses schon auf S. 241 bei einer ähnlichen Untersuchung benutzte Verfahren können wir die Gröfsen $\frac{x_k}{x_1}$ selbst als rationale Funktionen von x und y bestimmen. Wir erhalten so

$$5)\qquad \frac{\partial F(y, x; v_i)}{\partial v_k} + \frac{x_k}{x_1} F'(y, x; v_i) = 0 \qquad (k = 3, 4, \ldots s, s+1);$$

hierbei bedeutet $F'(y, x; v_i)$ die Ableitung von F nach y, die Gröfsen

$$F'(y_1, x; v_i) = (y_1 - y_2) \ldots (y_1 - y_{r-1})(y_1 - y_r)$$

und

$$NF'(y, x; v_i) = \prod (y_\varrho - y_{\varrho'}) \qquad \left(\begin{matrix}\varrho, \varrho' = 1, 2, \ldots r \\ \varrho \neq \varrho'\end{matrix}\right)$$

sind also als Differenzenprodukte von $y_1, y_2 \ldots y_r$ darstellbar, und das zweite von ihnen ist in x und den Parametern $v_3, v_4, \ldots v_s, v_{s+1}$ rational.

Nehmen wir jetzt zwischen den Gröfsen v eine lineare homogene Beziehung an:

$$a_3 v_3 + a_4 v_4 + \cdots + a_s v_s + v_{s+1} = 0,$$

durch welche wir den letzten Parameter v_{s+1} eliminieren können, und setzen wir

$$6)\qquad v_{s+1} = -\sum_{\sigma=3}^{s} a_\sigma v_\sigma$$

in y und die Gleichungen (4) und (5) ein, so erhalten wir $y = y^{(0)}$, wobei

$$y^{(0)} = \frac{v_3(x_3 - a_3 x_{s+1}) + v_4(x_4 - a_4 x_{s+1}) + \cdots + v_s(x_s - a_s x_{s+1})}{x_1}$$

ist, und

$$-\frac{x_{s+1}}{x_1} = \frac{\dfrac{\partial F(y^{(0)}, x; v_i)}{\partial v_{s+1}}}{F'(y^{(0)}, x; v_i)}.$$

In diesem Ausdruck treten aber aufser $x = \frac{x_2}{x_1}$ nur noch die $s-2$ Funktionen

$$\frac{x_\sigma - a_\sigma x_{s+1}}{x_1} = \frac{\xi_\sigma}{x_1} \qquad (\sigma = 3, 4, \ldots s)$$

und die s Parameter $v_3, v_4, \ldots v_s$ auf; wenn also bei dieser Substitution der Nenner oder auch das Differenzenprodukt

$$NF'(y^{(0)}, x; v_i) = \Pi(y_\varrho^{(0)} - y_{\varrho'}^{(0)})$$

für unbestimmt bleibende $v_3, \ldots v_s$ nicht verschwindet, so können wir nachträglich diese Gröfsen auch so spezialisieren, dafs jener Quotient nicht illusorisch wird, und somit $\frac{x_{s+1}}{x_1}$ als rationale Funktion der Gröfsen $\frac{x_2}{x_1}$ und $\frac{\xi_\sigma}{x_1}$ ausdrücken. In diesem Falle ist also zufolge der obigen Auseinandersetzungen die Beziehung zwischen der gegebenen Kurve (1) und der Projektion (2) vom Centrum $P = (0, 0, a_3, a_4, \ldots a_s, 1)$ aus eine umkehrbar eindeutige.

Für alle diejenigen Projektionscentren P, für welche mehrfache Überdeckung eintritt, verschwindet daher die Diskriminante

$$D = NF'(y, x, v_i)$$

identisch durch die Substitution (6), sie enthält also dann einen linearen Faktor mit konstanten Koeffizienten:

$$a_3 v_3 + a_4 v_4 + \cdots + a_s v_s + v_{s+1}.$$

Die Diskriminante D besitzt aber nur eine endliche Anzahl von Linearfaktoren mit konstanten Koeffizienten, und folglich kann man stets in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_{s-2}$ um P_0 ein endliches Gebiet so abgrenzen, dafs in ihm kein weiteres Projektionscentrum gelegen ist, für welches sich mehrfache Überdeckung ergiebt. Da aber $\mathfrak{M}_{s-2}$ eine beliebige durch P_0 hindurchgelegte ebene Mannigfaltigkeit war, so folgt in der That, dafs Projektionscentren mit mehrfacher Überdeckung überhaupt nur vereinzelt auftreten und darum nur in endlicher Anzahl vorhanden sein können.

Wir gehen jetzt dazu über, eine Folge von Projektionen unserer Kurve (1) zu betrachten, wobei das Centrum P immer auf die projizierte Kurve selbst fallen soll. In diesem Falle besitzen die s Divisoren der ersten Unterschar (2)

$$\mathfrak{A}_1 - a_1\mathfrak{A}_{s+1}, \quad \mathfrak{A}_2 - a_2\mathfrak{A}_{s+1}, \ldots \mathfrak{A}_s - a_s\mathfrak{A}_{s+1}$$

einen gröfsten gemeinsamen Teiler, und zwar ist derselbe von k^{ter} Ordnung, wenn P ein k-facher Punkt der ursprünglichen Kurve ist (vgl. S. 467). Wir können aber, da die Kurve nur eine endliche Anzahl von Singularitäten besitzt, stets auf unendlich viele Arten er-

zielen, daſs $k = 1$ wird; ferner können wir nach dem eben bewiesenen Satze auch bewirken, daſs die Projektion eine einfache ist und darum ebenfalls wieder nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen besitzt.

Daher läſst sich auch stets ein zweites Projektionscentrum auf der Kurve (2) so bestimmen, daſs die zweite Unterschar nur einen gröſsten gemeinsamen Teiler zweiter Ordnung und nur eine endliche Anzahl von Singularitäten erhält, und durch Fortsetzung des Verfahrens erhalten wir schlieſslich eine $(s-1)^{\text{te}}$ Unterschar $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'')$ mit nur zwei Elementen, deren gröſster gemeinsamer Teiler genau von der Ordnung $s-1$ ist. Es gilt also folgender Hilfssatz, der im nächsten Abschnitte zur Anwendung kommt:

> In jeder primitiven Schar ganzer Divisoren von der Dimension $s+1$ kann man stets zwei Elemente $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ finden, so daſs ihr gröſster gemeinsamer Teiler $\mathfrak{D}$ genau von der Ordnung $s-1$ und jedes durch $\mathfrak{D}$ teilbare Element der Schar eine Linearform von $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$ ist.

Spricht man den Satz in dieser Form aus, so ist die frühere Einschränkung $(s \geqq 3)$ der positiven Zahl s nicht mehr erforderlich.

§ 2.

Um jetzt das Theorem auf S. 502 zu beweisen, ermitteln wir vor allem die Dimension der Klasse W^r. Da die Ergänzungsklasse von W^r, d. i. $W^{-(r-1)}$, eine negative Ordnung hat, falls $r > 1$ ist, so liefert der Riemann-Rochsche Satz einfach

$$\text{1)} \qquad \{W^r\} = 2r\,(p-1) - p + 1 = (2r-1)(p-1) \qquad (r > 1).$$

Bilden wir andererseits die sämtlichen verschiedenen Produkte, welche aus je r der Fundamentaldivisoren $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p$ zusammengesetzt sind:

$$\text{2)} \qquad \mathfrak{W}_1^{h_1}\,\mathfrak{W}_2^{h_2} \ldots \mathfrak{W}_p^{h_p} \qquad (h_1 + h_2 + \cdots + h_p = r),$$

so ist deren Anzahl bekanntlich

$$\text{2a)} \qquad \frac{p\,(p+1)\,(p+2)\ldots(p+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot r}.$$

Man sieht nun zunächst leicht, daſs die zweite Anzahl nie kleiner als die erste ist. Denn es ist zunächst für $r = 2$:

$$\frac{1}{2}p\,(p+1) - 3\,(p-1) = \frac{1}{2}\,(p-2)(p-3);$$

ferner ist für $r > 2$ und $p = 3$:

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (r+2)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot r} - 2\,(2r-1) = \frac{1}{2}\,(r+1)(r+2) - 2\,(2r-1)$$
$$= \frac{1}{2}\,(r-2)(r-3),$$

und wenn man schliefslich von p zu $p+1$ fortschreitet, so wächst die Binomialzahl (2a) um

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+r-1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot r-1} > \frac{r(r+1)}{2},$$

die Dimensionszahl (1) aber nur um $2r-1$, so dafs sogar der Unterschied zwischen beiden Zahlen sehr bald eine grofse Zahl wird. Kann man daher in der Schar (2) $(2r-1)(p-1)$ Divisoren ausfindig machen, zwischen denen keine lineare homogene Relation besteht, so ist damit unser Satz bewiesen, und es kommt also nur darauf an nachzuweisen, dafs eine derartige Auswahl stets möglich ist. Wir werden nun in dieser Weise zuerst die Fundamentalsysteme für die beiden Klassen W^2 und W^3, und sodann, nachdem dies geschehen ist, in sehr einfacher Weise durch vollständige Induktion ein Fundamentalsystem für eine beliebige Potenz W^r aufstellen.

Zu diesem Zwecke wählen wir in der Schar der ganzen Differentialteiler auf Grund des Satzes des vorigen Abschnittes zwei Divisoren $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2$ so aus, dafs ihr gröfster gemeinschaftlicher Teiler $\mathfrak{A}$ genau von der Ordnung $p-2$ ist. Setzen wir also

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_2, \tag{3}$$

so sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zwei ganze teilerfremde Divisoren einer Klasse B, deren Ergänzungsklasse die Klasse A von $\mathfrak{A}$ ist, so dafs

$$W = AB$$

ist. Ferner ist die Dimensionszahl

$$\{B\} = \left\{\frac{W}{A}\right\} = 2, \tag{4}$$

denn nach jenem Satze sind alle durch $\mathfrak{A}$ teilbaren ganzen Divisoren der Klasse W Linearformen von $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$. Es ist also

$$(B) = (\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$$

eine primitive Klasse der Dimension zwei und der Ordnung p, und es ergiebt sich beiläufig der Satz:

In jedem Körper K vom Geschlechte p, der nicht hyperelliptisch ist, giebt es unendlich viele Funktionen $z = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2}$ von genau p^{ter} Ordnung.

Für die Dimension von A erhalten wir hingegen auf Grund des Riemann-Rochschen Satzes

$$\{A\} - \frac{p-2}{2} = \{B\} - \frac{p}{2},$$

also

$$\{A\} = 1, \tag{5}$$

es giebt also in der Klasse A, abgesehen von Proportionalitätsfaktoren, nur den einzigen ganzen Divisor $\mathfrak{A}$.

Wir wählen jetzt noch in der Klasse W einen dritten ganzen und zu $\mathfrak{A}$ teilerfremden Divisor $\mathfrak{W}_3$, was stets auf mannigfaltige Art geschehen kann, und bilden nunmehr folgendes System von

$$p + (p-1) + (p-2) = 3(p-1)$$

Divisoren

$$6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{W}_1^2, & \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2, & \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_3, & \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_4, \ldots \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_p \\ & \mathfrak{W}_2^2, & \mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3, & \mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_4, \ldots \mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_p \\ & & \mathfrak{W}_3^2, & \mathfrak{W}_3\mathfrak{W}_4, \ldots \mathfrak{W}_3\mathfrak{W}_p. \end{cases}$$

Wir behaupten, daſs dieses System linear unabhängig und also ein Fundamentalsystem für die ganzen Divisoren der Klasse W^2 ist. Würde nämlich eine Relation der Form

$$\sum_{h=1}^{p} a_h \mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_h + \sum_{i=2}^{p} b_i \mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_i + \sum_{k=3}^{p} c_k \mathfrak{W}_3\mathfrak{W}_k = 0$$

bestehen, so wäre die letzte der drei Summen durch $\mathfrak{A}$ teilbar, da $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ den gemeinsamen Teiler $\mathfrak{A}$ besitzen, und da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{W}_3$ zu einander teilerfremd sind, so müſste auch die Summe

$$\sum_{k=3}^{p} c_k \mathfrak{W}_k$$

den Faktor $\mathfrak{A}$ enthalten. Da aber die Gesamtheit der in der Klasse W enthaltenen und durch $\mathfrak{A}$ teilbaren Divisoren durch die Schar $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2)$ gegeben ist, so muſs notwendig

$$c_3 = c_4 = \cdots = c_p = 0$$

sein. Hiernach könnte die zwischen den Divisoren (6) angenommene lineare Relation nur von der Form sein:

$$\mathfrak{W}_1 \sum_{h=1}^{p} a_h \mathfrak{W}_h = -\mathfrak{W}_2 \sum_{i=2}^{p} b_i \mathfrak{W}_i,$$

und es wäre also

$$\frac{\sum\limits_{h=1}^{p} a_h \mathfrak{W}_h}{\sum\limits_{i=2}^{p} b_i \mathfrak{W}_i} = -\frac{\mathfrak{W}_2}{\mathfrak{W}_1} = -\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1}.$$

Da aber $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ keinen gemeinsamen Teiler haben, so kann eine derartige Gleichung nur in der Weise erfüllt sein, dafs

$$\sum_{i=2}^{p} b_i \mathfrak{W}_i = -\bar{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}_1$$

$$\sum_{h=1}^{p} a_h \mathfrak{W}_h = +\bar{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}_2$$

ist, wo $\bar{\mathfrak{A}}$ einen ganzen Divisor von A bedeutet und daher zufolge der Gleichung (5) dem Teiler $\mathfrak{A}$ proportional ist. Man erhält also

$$\bar{\mathfrak{A}} = c\mathfrak{A},$$

folglich nach (3):

$$b_2\mathfrak{W}_2 + \cdots + b_p\mathfrak{W}_p + c\mathfrak{W}_1 = 0$$

$$a_1\mathfrak{W}_1 + a_2\mathfrak{W}_2 + \cdots + a_p\mathfrak{W}_p - c\mathfrak{W}_2 = 0,$$

und hier müssen zufolge der ersten Gleichung $b_2, \ldots b_p, c$, zufolge der zweiten alsdann $a_1, a_2, \ldots a_p$ Null sein. Damit ist in der That bewiesen, dafs die Divisoren (6) ein Fundamentalsystem für die Klasse W^2 bilden.

Um jetzt in analoger Art ein Fundamentalsystem für die Klasse W^3 aufzustellen, verfahren wir folgendermafsen. Bezeichnen wir kurz das Fundamentalsystem (6) für die Klasse W^2 mit $(\mathfrak{S}_2)$ und bilden wir die beiden Systeme

$$\mathfrak{W}_1 \cdot (\mathfrak{S}_2) \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}_2 \cdot (\mathfrak{S}_2), \tag{7}$$

so gehören diese Divisoren sämtlich der Klasse W^3 an, und es stellt der erste Komplex ein Fundamentalsystem für diejenigen ganzen Divisoren der Klasse W^3 dar, welche Multipla von $\mathfrak{W}_1$ sind, während der zweite Komplex dieselbe Beziehung zu dem Divisor $\mathfrak{W}_2$ hat. Denn die Dimension jeder dieser beiden Unterscharen der Klasse W^3 ist gleich

$$\left\{\frac{W^3}{W}\right\} = \{W^2\} = 3(p-1),$$

und es wird also jede der beiden Unterscharen durch die linearen Verbindungen der Divisoren (7) erschöpft. Der gröfste gemeinsame Teiler beider Unterscharen, d. i. die Gesamtheit der in beiden enthaltenen Elemente, wird somit von denjenigen ganzen Divisoren der Klasse W^3 gebildet, welche sowohl durch $\mathfrak{W}_1$ als auch durch $\mathfrak{W}_2$, also auch durch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{W}_1\,\mathfrak{W}_2}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$$

teilbar sind. Die Dimension dieser neuen Unterschar ist, wenn $M = \frac{W^3}{A}$ die Klasse des Divisors $\mathfrak{M}$ bedeutet:

$$\left\{\frac{W^3}{M}\right\} = \{WA\} = 2p - 3.$$

Daher kann man die beiden Scharen (7) auch so transformieren, daſs jedes der beiden Fundamentalsysteme die $2p - 3$ durch $\mathfrak{M}$ teilbaren Divisoren enthält:

$$\mathfrak{W}_1 \cdot (\mathfrak{S}_2) = (\mathfrak{M}\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{M}\mathfrak{G}_{2p-3}, \; \mathfrak{W}_1\mathfrak{H}_1, \dots \mathfrak{W}_1\mathfrak{H}_p)$$
$$\mathfrak{W}_2 \cdot (\mathfrak{S}_2) = (\mathfrak{M}\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{M}\mathfrak{G}_{2p-3}, \; \mathfrak{W}_2\mathfrak{J}_1, \dots \mathfrak{W}_2\mathfrak{J}_p),$$

und wenn man nunmehr diese beiden Fundamentalsysteme zu dem neuen Systeme von $4p - 3$ Elementen:

$$8) \qquad (\mathfrak{M}\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{M}\mathfrak{G}_{2p-3}, \; \mathfrak{W}_1\mathfrak{H}_1, \dots \mathfrak{W}_1\mathfrak{H}_p, \; \mathfrak{W}_2\mathfrak{J}_1, \dots \mathfrak{W}_2\mathfrak{J}_p),$$

vereinigt, so kann zwischen diesen keine lineare homogene Relation stattfinden. Denn bestünde eine Gleichung der Form

$$g_1\,\mathfrak{M}\mathfrak{G}_1 + \cdots + g_{2p-3}\,\mathfrak{M}\mathfrak{G}_{2p-3} + h_1\mathfrak{W}_1\mathfrak{H}_1 + \cdots + h_p\mathfrak{W}_1\mathfrak{H}_p$$
$$+ i_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{J}_1 + \cdots + i_p\mathfrak{W}_2\mathfrak{J}_p = 0,$$

so würde der Divisor

$$i_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{J}_1 + \cdots + i_p\mathfrak{W}_2\mathfrak{J}_p$$

sowohl durch $\mathfrak{W}_1$, als auch durch $\mathfrak{W}_2$, also auch durch $\mathfrak{M}$ teilbar sein, und da alle Multipla von $\mathfrak{M}$ in der Klasse W^3 als lineare Funktionen von $\mathfrak{M}\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{M}\mathfrak{G}_{2p-3}$ darstellbar sind, so muſs

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_p = 0$$

sein; dann aber müssen auch die Koeffizienten g und h verschwinden. Die sämtlichen Divisoren der Reihe (8) haben den Teiler $\mathfrak{A}$, und sie bilden auch ein Fundamentalsystem für die ganzen Divisoren der Klasse W^3, welche Multipla von $\mathfrak{A}$ sind, denn die Dimension dieser Schar ist

$$\left\{\frac{W^3}{A}\right\} = 6(p-1) - (p-2) - (p-1) = 4p - 3.$$

Fügen wir nun zu den Divisoren (8) noch die $p - 2$ Divisoren

$$9) \qquad \mathfrak{W}_3^2\mathfrak{W}_3, \quad \mathfrak{W}_3^2\mathfrak{W}_4, \dots \quad \mathfrak{W}_3^2\mathfrak{W}_p$$

hinzu, so bilden (8) und (9) zusammengenommen ein System von

$$(4p-3) + (p-2) = 5(p-1)$$

linear unabhängigen Divisoren der Klasse W^3, also ein Fundamentalsystem dieser Klasse. Würde nämlich zwischen ihnen eine lineare

homogene Relation bestehen, so wäre eine lineare Verbindung der Divisoren (9):

$$c_3 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_3 + c_4 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_4 + \cdots + c_p \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_p$$

durch $\mathfrak{A}$ teilbar, und da $\mathfrak{W}_3$ und $\mathfrak{A}$ teilerfremd sind, so müfste auch $c_3 \mathfrak{W}_3 + \cdots + c_p \mathfrak{W}_p$ den Teiler $\mathfrak{A}$ haben, was nicht möglich ist, wenn nicht alle Koeffizienten c verschwinden. Hiernach sind jetzt auch die Fundamentaldivisoren der Klasse W^3 als ganze homogene Funktionen dritten Grades von $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p$ dargestellt.

Um jetzt schliefslich in derselben Weise auch ein Fundamentalsystem für die Klasse W^r aufzustellen, nehmen wir unseren Satz bereits für die Klassen $W^2, W^3, \ldots W^r$, wo $r \geq 3$ ist, als bewiesen an und zeigen sodann seine Richtigkeit für W^{r+1}. Es seien $\mathfrak{W}_\alpha$ und $\mathfrak{W}_\beta$ irgend zwei ganze teilerfremde Divisoren der Klasse W und es sei $(\mathfrak{S}_r)$ das System der $(2r-1)(p-1)$ Fundamentaldivisoren der Klasse W^r. Bilden wir dann die beiden Reihen

$$10) \qquad \mathfrak{W}_\alpha \cdot (\mathfrak{S}_r) \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}_\beta \cdot (\mathfrak{S}_r),$$

so gehören die Elemente dieser Systeme zur Klasse W^{r+1} und sind ganze homogene Funktionen $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_p$. Soll nun ein Divisor zu jeder der beiden Scharen (10) gehören, so mufs er sowohl durch $\mathfrak{W}_\alpha$ als auch durch $\mathfrak{W}_\beta$, also da $\mathfrak{W}_\alpha$ und $\mathfrak{W}_\beta$ teilerfremd sind, auch durch ihr Produkt teilbar und somit in der Schar

$$11) \qquad \mathfrak{W}_\alpha \mathfrak{W}_\beta \cdot (\mathfrak{S}_{r-1})$$

enthalten sein; die Dimension dieser Unterschar ist, da $r-1>1$ ist, $(2r-3)(p-1)$. Vereinigt man jetzt die beiden Scharen (10) in der Art, dafs ihr gröfster gemeinschaftlicher Teiler (11) nur einmal auftritt, so erhält man im ganzen

$$2(2r-1)(p-1) - (2r-3)(p-1) = (2r+1)(p-1)$$

linear unabhängige Elemente, und diese bilden also ein Fundamentalsystem der Klasse W^{r+1}. Damit ist der am Anfange des vorigen Paragraphen aufgestellte Satz in allen seinen Teilen bewiesen.

§ 3.

Wir wollen jetzt die gewonnenen Resultate für die niedrigsten hier in Betracht kommenden Geschlechtszahlen $p=3$ und $p=4$ spezialisieren und hieran einige Folgerungen knüpfen, welche eine spätere allgemeine Untersuchung vorbereiten.

Die Hauptkurve H eines Körpers vom Geschlechte drei ist nach den Ergebnissen des vorigen Kapitels eine singularitätenfreie ebene Kurve vierter Ordnung

1) $$F_4(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

und diese Gleichung wird also durch die Substitution

2) $$x_1 : x_2 : x_3 = \mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \mathfrak{W}_3$$

identisch befriedigt. Dieses Resultat wird aber in anderer Weise durch den Satz von Noether bestätigt; denn bildet man die $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ Potenzprodukte der Dimension r:

$$\mathfrak{W}_1^{h_1} \mathfrak{W}_2^{h_2} \mathfrak{W}_3^{h_3} \qquad (h_1 + h_2 + h_3 = r),$$

so giebt es unter ihnen nach S. 512 $2(2r-1)$ linear unabhängige, während die übrigen

$$\tau_r = \frac{1}{2}(r+1)(r+2) - 2(2r-1) = \frac{1}{2}(r-2)(r-3)$$

lineare Funktionen von jenen sind; ebenso grofs ist also auch die Anzahl der linear unabhängigen homogenen Gleichungen r^{ter} Ordnung zwischen den Divisoren $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3$. Da aber $\tau_4 = 1$ ist, so existiert eine Gleichung vierter Ordnung $F_4 = 0$ zwischen ihnen, und um die sämtlichen Gleichungen r^{ter} Ordnung zu erhalten, hat man F_4 mit den Potenzprodukten der Dimension $(r-4)$ zu multiplizieren, deren Zahl ja gerade $\frac{1}{2}(r-2)(r-3)$ ist.

Umgekehrt hat eine doppelpunktfreie Kurve vierter Ordnung

$$F_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

nach der Gleichung (3a) auf S. 427 das Geschlecht drei, und die adjungierten Kurven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Schnittpunktsysteme den Differentialteilern erster Gattung entsprechen, sind die Geraden der Ebene. Geht man also von einer beliebigen derartigen Gleichung aus, so hat man auch umgekehrt

$$\mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \mathfrak{W}_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

Die Untersuchung der projektiven Eigenschaften der ebenen Kurven vierter Ordnung ist hiernach völlig äquivalent der Analyse beliebiger nicht hyperelliptischer Körper vom Geschlechte drei, weil alle derartigen Körper auf eine Gleichung der Form (1) bezogen werden können. Nun enthält aber jene Gleichung $\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$ Konstanten, und da man die Variabeln noch einer beliebigen linearen Transformation unterwerfen kann, so sind von jenen Konstanten nur $15 - 9 = 6$ wesentlich. Diese sechs wesentlichen Konstanten, welche je nach der Auswahl

jener Transformation in verschiedener Form in die Koeffizienten der Gleichung (1) eintreten können, charakterisieren aber die Klasse des algebraischen Gebildes und heifsen nach Riemann die Moduln der Klasse. Zwei Gebilde mit verschiedenen Moduln sind nämlich im allgemeinen nicht ineinander birational transformierbar, weil einer solchen Transformation nach S. 484 eine lineare Substitution der Variabeln x_1, x_2, x_3 entspricht, die zugehörigen Hauptkurven also durch Kollineation auseinander hervorgehen müfsten.

Ein derartiger Körper enthält keine Funktionen zweiter, wohl aber unendlich viele von der dritten Ordnung. Legt man nämlich durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ der Hauptkurve zwei Geraden, so entsprechen ihren Schnittpunktsystemen zwei ganze Divisoren $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ der Klasse W, deren gröfster gemeinschaftlicher Teiler der Primdivisor $\mathfrak{P}$ ist; folglich ist

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{P}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2,$$

wo $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ teilerfremd sind, und

$$z = \frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}_2} = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}$$

ist eine Funktion dritter Ordnung. Umgekehrt aber erhält man auch alle derartigen Funktionen z des Körpers auf diesem Wege. Nimmt man nämlich z in der reduzierten Form $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}$ an und bezeichnet die Klasse des Zählers und Nenners mit A, so hat A die Ordnung drei, und ihre Dimension ist gleich zwei. Denn gäbe es in A aufser $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ noch einen dritten linear unabhängigen ganzen Divisor $\mathfrak{A}_3$, so könnte man in A noch zwei verschiedene ganze Divisoren finden, welche einen beliebigen Primteiler $\mathfrak{Q}$ haben, und deren Quotient wäre eine Funktion zweiter Ordnung; der Körper wäre also entgegen unserer Annahme hyperelliptisch. Ist nun P die Ergänzungsklasse von A:

$$P = \frac{W}{A},$$

so hat diese die Ordnung eins, und für ihre Dimension ergiebt sich nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$\{P\} - \frac{1}{2} = \{A\} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

also

$$\{P\} = 1.$$

Es giebt also, abgesehen von Proportionalitätsfaktoren, je einen und nur einen ganzen Divisor der Klasse W, welcher durch $\mathfrak{A}_1$ resp. $\mathfrak{A}_2$ teilbar ist, und wenn man nunmehr

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{P}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2$$

setzt, so entsprechen den Teilern $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ zwei Geraden, welche sich auf der Kurve in $\mathfrak{P}$ schneiden.

Diese Resultate fassen wir in dem Satze zusammen:

In jedem nicht hyperelliptischen Körper vom Geschlechte drei giebt es unendlich viele Divisorenklassen von der Ordnung drei und der Dimension zwei, nämlich die Ergänzungsklassen aller derjenigen, welche durch einen Primdivisor bestimmt sind; es giebt also auch unendlich viele Funktionen dritter Ordnung. Die Anzahl der Moduln derartiger Körper ist gleich sechs, und es giebt aufser den hyperelliptischen keine weiteren Abarten algebraischer Gebilde vom Geschlechte drei.

§ 4.

Die Hauptkurve H eines Körpers vom Geschlechte vier ist eine doppelpunktfreie Raumkurve sechster Ordnung:

1) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \mathfrak{W}_3 : \mathfrak{W}_4.$$

Bildet man die $\frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{1\cdot 2\cdot 3} = \binom{r+3}{3}$ Potenzprodukte der Dimension r:

$$\mathfrak{W}_1^{h_1}\mathfrak{W}_2^{h_2}\mathfrak{W}_3^{h_3}\mathfrak{W}_4^{h_4} \qquad (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = r),$$

so sind nach dem Satze des § 2 $3(2r-1)$ unter ihnen linear unabhängig; es bestehen also

$$\tau_r = \binom{r+3}{3} - 3(2r-1)$$

unabhängige Relationen r^{ter} Ordnung zwischen den Fundamentaldivisoren der Klasse W, und ebenso grofs ist (vgl. S. 475) die Dimension der Schar von Flächen r^{ter} Ordnung, welche die Hauptkurve enthalten. Da nun $\tau_2 = 1$, $\tau_3 = 5$ ist, so geht durch die Kurve eine einzige Fläche zweiter Ordnung:

2) $$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

und zu den zerfallenden Flächen dritter Ordnung, welche aus jener hervorgehen:

$$x_1 F_2 = 0, \quad x_2 F_2 = 0, \quad x_3 F_2 = 0, \quad x_4 F_2 = 0,$$

tritt noch eine weitere, die Kurve enthaltende Fläche; ihre Gleichung sei

3) $$F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Da der Schnitt der Flächen $F_2 = 0$ und $F_3 = 0$ von sechster Ordnung ist, so ist er mit der Hauptkurve identisch und diese also stets als vollständiger Schnitt von nur zwei Flächen darstellbar.

Dieses letzte Resultat kann noch auf anderem Wege bestätigt werden. Bedeuten nämlich U_{r-2} und U_{r-3} irgend zwei Formen $(r-2)^{\text{ter}}$ und $(r-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von x_1, x_2, x_3, x_4 und bildet man die Fläche r^{ter} Ordnung

$$4)\qquad U_{r-2}F_2 + U_{r-3}F_3 = 0,$$

so geht dieselbe offenbar durch die Kurve hindurch. Sind aber zwei derartige Flächen identisch, ist also

$$U_{r-2}F_2 + U_{r-3}F_3 = U'_{r-2}F_2 + U'_{r-3}F_3,$$

so folgt aus der Gleichung

$$(U'_{r-2} - U_{r-2})F_2 = -(U'_{r-3} - U_{r-3})F_3,$$

dafs die erste Differenz durch F_3, die zweite durch F_2 teilbar, dafs also

$$\begin{aligned} U'_{r-2} - U_{r-2} &= \quad G_{r-5}F_3 \\ U'_{r-3} - U_{r-3} &= -G_{r-5}F_2 \end{aligned}$$

ist, wo G_{r-5} eine quaternäre Form der $(r-5)^{\text{ten}}$ Ordnung bedeutet. Um daher die Dimension der Flächenschar (4) zu erhalten, hat man von der Gesamtzahl der in U_{r-2} und U_{r-3} auftretenden Konstanten die Zahl der Koeffizienten von G_{r-5} in Abzug zu bringen und erhält so

$$\binom{r+1}{3} + \binom{r}{3} - \binom{r-2}{3}.$$

Diese Zahl ist aber gleich τ_r, weil, wie eine leichte Rechnung ergiebt:

$$\binom{r+3}{3} - \binom{r+1}{3} - \binom{r}{3} + \binom{r-2}{3} = 3(2r-1)$$

ist. Hieraus folgt, dafs in der Schar (4) alle die Hauptkurve H enthaltenden Flächen r^{ter} Ordnung auftreten und dafs die Kurve also auch der vollständige Schnitt der Flächen $F_2 = 0$ und $F_3 = 0$ ist.

Andererseits hatten wir auf S. 466 für das Geschlecht der Schnittkurve einer Fläche μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung die Formel

$$2(p-1) = \mu\nu(\mu+\nu-4)$$

gefunden, und es ist also, wenn $\mu = 2$, $\nu = 3$ ist, $p = 4$. Die Untersuchung derjenigen Körper vom Geschlechte vier, welche nicht hyperelliptisch sind, ist also völlig äquivalent der Ergründung der projektiven Eigenschaften der Raumkurven sechster Ordnung, welche der Schnitt zweier Flächen von zweiter und dritter Ordnung ohne besondere Lagenbeziehungen sind.

Um hierdurch einen tieferen Einblick in den Aufbau der Körper des Geschlechtes vier zu erhalten, betrachten wir zuvörderst die ein-

deutig bestimmte Fläche zweiter Ordnung genauer, welche die Hauptkurve enthält. Diese kann entweder eine ordinäre Fläche oder ein Kegel sein. Diesen beiden Möglichkeiten entsprechend, erhalten wir zwei verschiedene Arten von Körpern, die beide nicht hyperelliptisch sind und in ihren Eigenschaften erhebliche Unterschiede aufweisen.

In dem ersten Falle können wir die Gleichung der Fläche durch Transformation auf die Form bringen

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$$

und sie, da es auf Realitätsuntersuchungen hier nicht ankommt, als Hyperboloid interpretieren. Ein solches besitzt bekanntlich zwei Scharen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ von Geraden, von denen die erste durch die Gleichungen

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \quad x_3 - \lambda x_4 = 0,$$

die zweite durch

$$x_1 - \mu x_3 = 0, \quad x_2 - \mu x_4 = 0$$

gegeben sind. Zwei Geraden einer Schar liegen nie in einer Ebene; wenn aber die beiden Geraden (λ) und (μ) verschiedenen Scharen angehören, so liegen sie in der Tangentialebene

$$x_1 - \lambda x_2 - \mu x_3 + \lambda \mu x_4 = 0,$$

und ihr Schnittpunkt ist durch die Gleichungen gegeben:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda \mu : \mu : \lambda : 1;$$

durch jeden Punkt der Fläche geht also je eine Gerade beider Scharen.

In diesem Falle können wir also die quadratische Relation zwischen den vier Fundamentaldivisoren der Klasse W durch Transformation auf die Form bringen:

$$\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_4 = \mathfrak{W}_2 \mathfrak{W}_3.$$

Bezeichnen wir nun den gröſsten gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ mit $\mathfrak{A}$ und setzen wir

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}',$$

also

$$\frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}_2} = \frac{\mathfrak{W}_3}{\mathfrak{W}_4} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'},$$

so sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ relativ prim, und folglich ist

$$\mathfrak{W}_3 = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{W}_4 = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}',$$

wo auch $\mathfrak{A}'$ einen ganzen Divisor bedeutet, der zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd sein muſs, weil W sonst keine primitive Klasse wäre.

Die Klassen A und B von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ und $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ sind Ergänzungsklassen:

$$W = AB,$$

und da ihre Ordnungen zusammen gleich sechs sind, so mufs jede gleich drei sein; denn wäre das nicht der Fall, so wäre die Ordnung einer der beiden Klassen, z. B. von A, kleiner als drei, der Quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}$ also eine Funktion zweiter oder erster Ordnung, was nicht sein kann. Die Dimension jeder der beiden Klassen ist gleich zwei; denn würde z. B. die Klasse $A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ noch einen dritten linear unabhängigen Divisor $\mathfrak{A}''$ enthalten, so könnte man in ihr noch zwei verschiedene Divisoren bestimmen, welche einen Primteiler $\mathfrak{Q}$ enthalten, und ihr Quotient wäre also eine Funktion zweiter Ordnung.

Die beiden Klassen A und B, die beide die Ordnung drei und die Dimension zwei haben, sind aber stets voneinander verschieden. Denn wäre $A = B$, also

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'),$$

so würden Gleichungen der Form bestehen:

$$\mathfrak{B} = \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{B}' = \gamma\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A}' \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Dann aber wäre

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}' = \alpha\mathfrak{W}_2 + \beta\mathfrak{W}_4 = \gamma\mathfrak{W}_1 + \delta\mathfrak{W}_3,$$

und es wären also die Divisoren $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \mathfrak{W}_4$ nicht voneinander linear unabhängig.

Die so bestimmten ausgezeichneten Divisorenklassen A und B, welche für den Aufbau des Körpers von entscheidender Bedeutung sind, stehen in engstem Zusammenhange mit den Geraden des Hyperboloides. Betrachtet man nämlich den Schnitt einer Tangentialebene

$$x_1 - \lambda x_2 - \mu x_3 + \lambda\mu x_4 = 0$$

mit der Kurve, so lautet der zugeordnete Divisor

$$\mathfrak{W}_1 - \lambda\mathfrak{W}_2 - \mu\mathfrak{W}_3 + \lambda\mu\mathfrak{W}_4 = (\mathfrak{A} - \mu\mathfrak{A}')(\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{B}');$$

derselbe zerfällt also in zwei Faktoren, von denen der erste der Klasse A angehört und nur von dem Parameter μ abhängt, während der zweite in B enthalten und nur von λ abhängig ist. Legt man also durch eine Gerade (λ) der ersten Schar:

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \quad x_3 - \lambda x_4 = 0$$

das Ebenenbüschel, so bleibt der Divisor dritter Ordnung $\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{B}'$ fest; die Gerade mufs also eine Trisekante der Raumkurve sein, deren Schnitt durch $\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{B}'$ gegeben ist, und jeder ganze Divisor von B

entspricht einer und nur einer Geraden der Schar $\mathfrak{S}_1$. Ebenso gehört zu jeder Geraden der Schar $\mathfrak{S}_2$:

$$x_1 - \mu x_3 = 0, \quad x_2 - \mu x_4 = 0,$$

ein und nur ein ganzer Divisor der Klasse A, nämlich $\mathfrak{A} - \mu\mathfrak{A}'$.

Durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Hauptkurve gehen somit zwei verschiedene, niemals zusammenfallende Trisekanten, welche den beiden Geradenscharen des Hyperboloides zugehören; projiziert man also die Kurve von $\mathfrak{P}$ aus auf eine Ebene, so ist die Projektion eine Kurve fünfter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Umgekehrt mufs eine Trisekante der Raumkurve ganz auf dem Hyperboloide gelegen sein, weil sie mit ihm drei Punkte gemein hat. Aufser den Geraden der beiden Scharen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ giebt es also keine weiteren Trisekanten der Raumkurve.

Hieraus folgt auch, dafs es aufser den Klassen A und B keine anderen giebt, welche die Ordnung drei und die Dimension zwei haben. Ist nämlich Q eine solche Klasse, und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ einer ihrer ganzen Divisoren, so ergiebt sich aus dem Riemann-Rochschen Satze als Dimension der Ergänzungsklasse von $\mathfrak{Q}$:

$$\left\{\frac{W}{Q}\right\} = \{Q\} = 2,$$

folglich giebt es zwei verschiedene ganze Differentialteiler $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$, welche durch $\mathfrak{Q}$ teilbar sind. Die drei Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ der Hauptkurve liegen somit in den beiden Ebenen, welche den Divisoren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ entsprechen, also auch in ihrer Schnittgeraden, d. h. sie sind die drei Schnittpunkte einer Trisekante der Kurve; folglich ist in der That $Q = A$ oder $Q = B$.

Wir gehen nunmehr dazu über, auf Grund des gewonnenen Einblicks in die Struktur des Körpers eine Normalgleichung von möglichst einfacher Gestalt, ähnlich wie im Falle $p = 3$, zu bestimmen. Bilden wir die beiden Funktionen dritter Ordnung

$$\text{5)} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_4} \\ y &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}, \end{aligned}$$

so ist der Körper $K(x, y)$ mit dem gegebenen Körper $K(z, u)$ identisch. Denn aus dem Fundamentalsatze auf S. 237 folgt zunächst, dafs wir x als unabhängige Variable wählen können und dafs jede zweite Variable $\bar{y}$ einer bestimmten Gleichung dritten Grades genügt:

$$F(x, \bar{y}) = a_3(x)\bar{y}^3 + a_2(x)\bar{y}^2 + a_1(x)\bar{y} + a_0(x) = 0,$$

deren linke Seite entweder irreduktibel oder eine Potenz einer irreduktibeln Funktion ist. Träte nun die zweite Möglichkeit für $\bar{y} = y$ ein

und wäre also der Körper $K(x, y)$ nur ein Unterkörper von $K(z, u)$, so würde $F(x, y)$ die dritte Potenz einer Linearfunktion von y:

$$p(x)y - q(x),$$

also $y = \frac{q(x)}{p(x)}$ eine rationale Funktion von x sein müssen. Da aber y ebenfalls von dritter Ordnung ist, so müfste jene rationale Funktion linear sein:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

also wäre für Zähler und Nenner von y:

$$\mathfrak{B} = \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{A}'$$
$$\mathfrak{B}' = \gamma\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A}',$$

dies aber ist unmöglich, weil die Klassen A und B verschieden sind.

Es besteht also in der That zwischen x und y eine irreduktible Gleichung

$$6) \qquad F(x, y) = a_3(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

welche in jeder der beiden Variabeln vom dritten Grade ist, so dafs

$$a_\nu(x) = c_{3\nu}x^3 + c_{2\nu}x^2 + c_{1\nu}x + c_{0\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

ist. Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist nunmehr leicht festzustellen. Erteilt man nämlich der Variabeln x den Wert μ, so ist

$$\mathfrak{z}_{x-\mu} = \mathfrak{A} - \mu\mathfrak{A}',$$

und es wird also hierdurch eine bestimmte Gerade (μ) der Schar $\mathfrak{S}_2$ ausgewählt. Diese schneidet die Kurve in drei Punkten, durch welche drei bestimmte Geraden (λ_1), (λ_2), (λ_3) der Schar $\mathfrak{S}_1$ gehen, und für diese ist

$$y = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Die Kurve vermittelt also auf dem Hyperboloid eine $(3, 3)$-deutige Beziehung zwischen den Geraden der beiden Scharen, und diese wird durch die Gleichung (6) gegeben. Diese Zuordnung ist von ganz ähnlicher Beschaffenheit wie die allgemeine, welche wir auf S. 368 besprochen haben, nur dafs die zugeordneten Geraden hier nicht die Strahlen zweier Büschel der Ebene, sondern der beiden Geradenscharen des Hyperboloides sind.

Gehen wir jetzt umgekehrt von einer Gleichung der Form (5) aus, so stellt dieselbe zufolge der Formel (6) auf S. 385, wenn die Koeffi-

zienten $c_{\mu\nu}$ keiner besonderen Bedingung unterworfen werden, ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte vier dar, weil $m = n = 3$, also

$$p = (m-1)(n-1) = 4$$

ist. Die zu einem solchen Gebilde gehörigen vier linear unabhängigen Differentiale erster Gattung haben nach S. 415 die Form

$$xy\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad x\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad y\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

und die entsprechenden Differentialteiler sind, da $\mathfrak{D} = 1$, also nach S. 384

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} \sim \mathfrak{n}_x \mathfrak{n}_y = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$$

ist, der Reihe nach

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}', \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{B}',$$

also

$$\mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \mathfrak{W}_3 : \mathfrak{W}_4 = \mathfrak{A}\mathfrak{B} : \mathfrak{A}\mathfrak{B}' : \mathfrak{A}'\mathfrak{B} : \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = xy : x : y : 1,$$

wodurch wir genau wieder zu den Formeln zurückgelangen, von denen wir ausgegangen sind.

Daher werden durch die Gleichung (6) bei allgemeinster Auswahl der Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ auch alle algebraischen Gebilde des Geschlechtes vier gegeben, deren Hauptkurve auf einer ordinären Fläche zweiter Ordnung liegt, und sie kann somit als Normalgleichung zu Grunde gelegt werden. Die Anzahl der in ihr auftretenden willkürlichen Konstanten kann dadurch noch verringert werden, dafs jede der beiden Variabeln x und y einer beliebigen linearen gebrochenen Substitution unterworfen wird, da z. B. die Transformation

$$\bar{x} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

nur einer Transformation der Grunddivisoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ der Klasse A in

$$\bar{\mathfrak{A}} = \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{A}'$$
$$\bar{\mathfrak{A}}' = \gamma\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A}'$$

entspricht. Daher können von den 15 Koeffizienten $2 \cdot 3 = 6$ gleich eins angenommen werden; die übrigen 9 Koeffizienten aber sind wesentlicher Natur, weil für einen Körper der hier untersuchten Art die Klassen A und B, und bei geeigneter Normierung auch die Funktionen x und y eindeutig bestimmt sind, und können daher als die Moduln der Klasse des algebraischen Gebildes betrachtet werden.

Es ist nunmehr auch leicht, die Gleichung einer irreduktibeln Fläche dritter Ordnung, welche die Kurve enthält, in Tetraederkoordinaten aufzustellen. Dieselbe geht sofort aus der Normalgleichung (6) hervor, wenn man von den Gleichungen (5) Gebrauch macht, und ein Potenzprodukt $x^\mu y^\nu$ durch

$$\frac{x_2^\mu x_3^\nu}{x_4^{\mu+\nu}} \quad \text{oder} \quad \frac{x_1^{\mu+\nu-3}\, x_2^{3-\nu}\, x_3^{3-\mu}}{x_4^3}$$

ersetzt, je nachdem $\mu + \nu \leqq 3$ oder > 3 ist. Man erhält so, wenn man mit x_4^3 heraufmultipliziert, die Gleichung

$$\sum_{\mu+\nu \leqq 3} c_{\mu\nu}\, x_2^\mu\, x_3^\nu\, x_4^{3-\mu-\nu} + \sum_{\mu+\nu > 3} c_{\mu\nu}\, x_1^{\mu+\nu-3}\, x_2^{3-\nu}\, x_3^{3-\mu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3);$$

es ist also

$$\begin{aligned} F_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & c_{00}x_4^3 + c_{01}x_3x_4^2 + c_{02}x_3^2x_4 + c_{03}x_3^3 \\ & + c_{10}x_2x_4^2 + c_{11}x_2x_3x_4 + c_{12}x_2x_3^2 + c_{13}x_1x_3^2 \\ & + c_{20}x_2^2x_4 + c_{21}x_2^2x_3 + c_{22}x_1x_2x_3 + c_{23}x_1^2x_3 \\ & + c_{30}x_2^3 + c_{31}x_1x_2^2 + c_{32}x_1^2x_2 + c_{33}x_1^3. \end{aligned}$$

§ 5.

Wenn die Oberfläche zweiter Ordnung, welche die Hauptkurve H enthält, ein Kegel ist, so können wir ihre Gleichung in der Form annehmen:

1) $$x_1 x_3 - x_2^2 = 0,$$

indem wir die Spitze des Kegels als Eckpunkt, zwei Tangentialebenen ($x_1 = 0$ und $x_3 = 0$) und die Polarebene ihrer Schnittgeraden ($x_2 = 0$) als Seitenebenen des Koordinatentetraeders wählen. Die zwischen den Fundamentaldivisoren der Klasse W bestehende quadratische Relation lautet alsdann

1a) $$\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_3 - \mathfrak{W}_2^2 = 0$$

und enthält hiernach den Teiler $\mathfrak{W}_4$ überhaupt nicht.

Aus dieser Gleichungsform folgt aber leicht, daſs die drei Divisoren $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3$ sich in die folgende Gestalt setzen lassen müssen:

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}^2, \quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{W}_3 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2,$$

wenn $\mathfrak{M}$ ihren gröſsten gemeinsamen Teiler und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zwei ganze teilerfremde Divisoren bedeuten. Bildet man nämlich die Funktion

2) $$x = \frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{W}_2} = \frac{\mathfrak{W}_2}{\mathfrak{W}_3} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'},$$

wo der letzte Bruch reduziert sein soll, so folgt, daſs der Divisor $\mathfrak{W}_2$, weil er als Zähler und als Nenner auftritt, sowohl durch $\mathfrak{A}$ als auch durch $\mathfrak{A}'$, also auch durch das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ teilbar sein muſs. Setzt man aber $\mathfrak{W}_2 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, so ergiebt sich in der That $\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{W}_3 = \mathfrak{M}\mathfrak{A}'^2$.

Für die Ordnung μ und α der Divisoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}$ hat man die Gleichung

$$\mu + 2\alpha = 6,$$

und da α der Grad der Funktion x und somit gröſser als zwei sein muſs, so ist notwendig $\alpha = 3$ und $\mu = 0$. Folglich ist notwendigerweise $\mathfrak{M} = 1$, die Divisoren

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{A}^2, \quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{W}_3 = \mathfrak{A}'^2 \tag{3}$$

haben also keinen gemeinsamen Teiler, und es ist, wenn A die Klasse von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ bedeutet:

$$W = A^2.$$

Die Dimension von A ist, wie ganz ebenso wie im vorigen Abschnitt (S. 518) bewiesen wird, gleich zwei.

Die Divisoren der Klasse A entsprechen genau den Schnittpunktsystemen der Kegelkanten, welche zugleich Trisekanten der Raumkurve sind. Legt man nämlich durch die Kegelspitze eine beliebige Ebene

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0,$$

so wird der Schnitt mit der Kurve durch den Divisor sechster Ordnung

$$c_1 \mathfrak{W}_1 + c_2 \mathfrak{W}_2 + c_3 \mathfrak{W}_3 = c_1 \mathfrak{A}^2 + c_2 \mathfrak{A}\mathfrak{A}' + c_3 \mathfrak{A}'^2$$

bestimmt, und dieser kann als binäre quadratische Form von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ stets als ein Produkt

$$(\lambda\mathfrak{A} + \lambda'\mathfrak{A}')(\mu\mathfrak{A} + \mu'\mathfrak{A}')$$

dargestellt werden, dessen Faktoren den beiden in jener Ebene liegenden Kegelkanten entsprechen. Daher trifft in der That jede Kante die Kurve in drei Punkten, und der hierdurch bestimmte Divisor gehört der Klasse A an.

Während wir also im vorigen Abschnitte zwei verschiedene Klassen A und B von der Ordnung drei und der Dimension zwei erhielten, so ergiebt sich hier nur eine und diese ist ihre eigene Ergänzungsklasse. Die hier untersuchten Körper können daher als eine Ausartung der vorher behandelten ordinären Körper betrachtet werden, bei welcher die beiden ausgezeichneten Klassen A und B in eine zusammengefallen sind. Dem entspricht es, daſs der Kegel als eine Ausartung des Hyperboloides aufgefaſst werden kann, bei welcher die beiden Geradenscharen in eine einzige übergegangen sind. Daher giebt

es in diesem Falle überhaupt keine zweite Klasse Q mit der Ordnung drei und der Dimension zwei; denn man beweist genau wie auf S. 519, daſs jeder ihrer Divisoren $\mathfrak{Q}$ einer Trisekante der Raumkurve zugeordnet und folglich $Q = A$ sein muſs.

Aus diesem Grunde haben wir hier auch nur eine Klasse von Funktionen dritter Ordnung, welche durch die Gleichung

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

gegeben sind, während vorher noch eine zweite derartige Funktionenklasse auftrat. Dieser Umstand hat aber die wichtige Folge, daſs hier eine ganz andere Form der Normalgleichung aufgestellt werden muſs und die hier betrachteten algebraischen Gebilde sich somit der für ordinäre Körper geltenden Normalgleichung entziehen.

Es liegt nahe, zur Bildung jener Gleichung den vierten ganzen Divisor $\mathfrak{W}_4$ der Klasse W, der bisher noch nicht in Rechnung gezogen wurde, hinzuzunehmen und zur Konstruktion einer Funktion sechster Ordnung

$$y = \frac{\mathfrak{W}_4}{\mathfrak{A}'^2} \tag{4}$$

zu verwenden. Hierbei ist $\mathfrak{W}_4$ nicht völlig bestimmt und durch den drei willkürliche Konstanten enthaltenden Divisor

$$\overline{\mathfrak{W}}_4 = \mathfrak{W}_4 + \lambda_1 \mathfrak{W}_1 + \lambda_2 \mathfrak{W}_2 + \lambda_3 \mathfrak{W}_3$$

ersetzbar, wodurch y in

$$\bar{y} = y + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$$

übergeht.

Da die Funktion y nur für die drei Primfaktoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ von $\mathfrak{A}'$ von zweiter Ordnung unendlich wird, so ist sie eine ganze Funktion von x und besitzt für $(x = \infty)$ drei Reihenentwickelungen der Form

$$y_1 = e_1 x^2 + \cdots, \quad y_2 = e_2 x^2 + \cdots, \quad y_3 = e_3 x^2 + \cdots, \tag{5}$$

welche nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreiten. Hierin sind die Anfangskoeffizienten e_1, e_2, e_3 voneinander verschieden, denn wäre z. B. $e_1 = e_2$, so würde die Funktion

$$y - e_1 x^2 = \frac{\mathfrak{W}_4 - e_1 \mathfrak{A}^2}{\mathfrak{A}'^2}$$

in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ nur von erster Ordnung unendlich werden, und es wäre also ihr Zähler durch $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ teilbar. Dann aber würden in dem Fundamentalsystem der Klasse W:

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{A}^2, \quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{W}_3 = \mathfrak{A}'^2, \quad \mathfrak{W}_4 - e_1 \mathfrak{A}^2$$

alle Elemente auſser dem ersten den Divisor zweiter Ordnung $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ besitzen, was nach dem auf S. 487 bewiesenen Satze nur bei hyperelliptischen Körpern eintreten könnte.

Bilden wir hiernach die symmetrischen Elementarfunktionen von y_1, y_2, y_3:

$$g = y_1 + y_2 + y_3, \quad a = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3, \quad -b = y_1 y_2 y_3,$$

so sind dies ganze Funktionen von x, deren Grade resp. gleich 2, 4 und 6 sind. Da wir ferner zu y eine ganze Funktion zweiten Grades beliebig hinzufügen können, so wird die erste Funktion, wenn wir y durch $y - \frac{g}{3}$ ersetzen, gleich Null, während die anderen beiden die Form erhalten:

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_4 x^4, \quad b = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_6 x^6.$$

Die so erhaltene Normalgleichung

$$y^3 + a y + b = 0 \tag{6}$$

besitzt die Diskriminante

$$\Delta = -(y_1 - y_2)^2 (y_1 - y_3)^2 (y_2 - y_3)^2 = 4a^3 + 27b^2,$$

eine ganze Funktion zwölften Grades, deren höchster Koeffizient nach der Bemerkung des vorigen Absatzes von Null verschieden ist.

Die Normalgleichung (6) enthält $5 + 7 = 12$ Konstanten; wenn man aber in der Klasse A an Stelle von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ ein anderes Fundamentalsystem einführt und sodann den Divisor $\mathfrak{W}_4$ wieder so bestimmt, dafs der Koeffizient von y^2 fortfällt, so werden die Variabeln einer birationalen Transformation der Form

$$\xi = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \eta = \frac{m y}{(\gamma x + \delta)^2}$$

unterworfen, und da wir hier vier willkürliche Konstanten zur Verfügung haben, so behalten wir in der Normalgleichung bei solcher Formänderung nur $12 - 4 = 8$ wesentliche Konstanten übrig, welche die Moduln der Klasse des algebraischen Gebildes sind.

Gehen wir jetzt umgekehrt von einer Gleichung der Form (6) mit beliebig gewählten Koeffizienten aus, so kann man leicht zeigen, dafs das Gebilde das Geschlecht vier und alle hier vorausgesetzten Eigenschaften besitzt; die Koeffizienten der Gleichung brauchen also keinen weiteren Bedingungen unterworfen zu werden. In der That, wendet man die auf S. 199 flg. für Gleichungen dritten Grades gegebenen Regeln an, so ergiebt sich, dafs die Riemannsche Fläche in den zwölf Nullpunkten der Diskriminante Δ eine einfache, für $(x = \infty)$ aber keine Verzweigung besitzt; hierbei ist es wesentlich, dafs Δ lauter einfache Wurzeln hat und wirklich vom zwölften Grade ist, eine Voraussetzung, welche bei nicht speziell ausgewählten Koeffizienten stets erfüllt ist. Daher ist $w = 12$, also

$$p = \frac{w}{2} - n + 1 = 4.$$

Da ferner die Derivirte $\frac{\partial F}{\partial y}$ in den Verzweigungspunkten in erster Ordnung verschwindet, für die drei Unendlichkeitsstellen von

$$x = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}$$

aber einen Pol vierter Ordnung besitzt, so hat sie die Divisorendarstellung:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}'^4},$$

also ist das Differential

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} \sim \mathfrak{A}'^2,$$

und somit von der ersten Gattung. Vergleicht man diese Formel mit der allgemeinen

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}} \sim \frac{\mathfrak{n}_x^{m-2}\,\mathfrak{n}_y^{n-2}}{\mathfrak{D}},$$

welche auf S. 384 zur Definition des Divisors $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte aufgestellt wurde, so ergiebt sich, da $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{n}_y = \mathfrak{A}'^2$ ist, dafs

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}'^4$$

ist; die Kurve besitzt also bei $(x = \infty)$ eine Singularität, die sich bei näherer Untersuchung als ein dreifacher Selbstberührungspunkt erweist, d. i. ein Punkt, in welchem drei Zweige mit gemeinsamer Tangente zusammenlaufen.

Bilden wir schliefslich die vier linear unabhängigen Differentiale erster Gattung

$$x^2\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad x\,\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad y\,\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

so sind die zugehörigen Divisoren

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{A}^2,\quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}',\quad \mathfrak{W}_3 = \mathfrak{A}'^2,\quad \mathfrak{W}_4 = \mathfrak{z}_y,$$

wodurch wir auch hier genau auf die Ausgangsgleichungen (3) und (4) zurückkommen. Kehren wir also jetzt zur Hauptkurve

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mathfrak{W}_1 : \mathfrak{W}_2 : \mathfrak{W}_3 : \mathfrak{W}_4$$

zurück, so erkennen wir, dafs sie aufser auf dem Kegel

$$\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_3 - \mathfrak{W}_2^2 = 0$$

auch noch auf einer Oberfläche dritter Ordnung liegt, als deren Gleichung sich vermöge (6) ergiebt:

$$\mathfrak{W}_4^3 + \mathfrak{L}\,\mathfrak{W}_4 + \mathfrak{M} = 0, \tag{7}$$

worin

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}'^4 a\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}\right)$$

und

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}'^6 b\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}\right)$$

zunächst als binäre Formen vierter und sechster Ordnung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ erscheinen; diese aber können leicht in ternäre Formen zweiter resp. dritter Ordnung von $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3$ umgeformt werden; es ist nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \alpha_0 \mathfrak{W}_3^2 + \alpha_1 \mathfrak{W}_3 \mathfrak{W}_2 + \alpha_2 \mathfrak{W}_2^2 + \alpha_3 \mathfrak{W}_2 \mathfrak{W}_1 + \alpha_4 \mathfrak{W}_1^2,\\ \mathfrak{M} &= \beta_0 \mathfrak{W}_3^3 + \beta_1 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_2 + \beta_2 \mathfrak{W}_3^2 \mathfrak{W}_1 + \beta_3 \mathfrak{W}_2^3\\ &\quad + \beta_4 \mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{W}_3 + \beta_5 \mathfrak{W}_1^2 \mathfrak{W}_2 + \beta_6 \mathfrak{W}_1^3.\end{aligned}$$

Das Hauptresultat dieses und des vorigen Paragraphen fassen wir in folgendem Satze zusammen:

Es giebt zwei wesentlich verschiedene Arten von Körpern des Geschlechtes vier, welche nicht hyperelliptisch sind. In den Körpern erster Art giebt es zwei, in den anderen eine einzige Divisorenklasse von der Ordnung drei und der Dimension zwei, und daher in jenen zwei verschiedene, in diesen nur eine Klasse von Funktionen dritter Ordnung. Diesen beiden Fällen entsprechend erhält das algebraische Gebilde verschiedene Normalformen, von denen die erste neun, die zweite nur acht wesentliche Konstanten oder Moduln besitzt.

Dreifsigste Vorlesung.

Klassen algebraischer Gleichungen; ihre Moduln. — Normalgleichungen. — Rationale, elliptische, hyperelliptische Gebilde. — Zahl ihrer Moduln. — Die rationalen und elliptischen Gebilde besitzen unendlich viele Transformationen in sich. — Die Zahl der Moduln eines allgemeinen Körpers vom Geschlechte p ist gleich $3p-3$.

§ 1.

Wir kehren jetzt noch einmal zum Begriff der umkehrbar eindeutigen Transformation zurück, der in der sechzehnten Vorlesung eingeführt und erklärt wurde, um ihn mit Hilfe des jetzt erlangten Einblicks in die Natur der algebraischen Gebilde noch weiter zu entwickeln und für einige neue Problemstellungen zu verwenden. Wenn wir, wie auf S. 237, den Körper $K(z, u)$ durch zwei in ihm enthaltene Funktionen x und y in den mit ihm identischen Körper $K(x, y)$ transformieren, so bestehen zwischen den Gröfsen z und u einerseits und x und y andererseits die beiden Gleichungen

$$f(z, u) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, y) = 0,$$

und die beiden hierdurch definierten algebraischen Gebilde sind umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen. Da zwei derartige algebraische Gebilde für viele Fragen als völlig gleichwertig zu betrachten sind, so rechnen wir alle ineinander transformierbaren Gleichungen mit Riemann in eine Klasse und charakterisieren die Klasse durch eine der in ihr enthaltenen Gleichungen (vgl. S. 484).

Da aber die Auswahl der Gröfsen x und y eine aufserordentlich grofse Willkür enthält, so wird es darauf ankommen, so zu verfahren, dafs die Funktionen x und y innerhalb des Körpers K invariante Bedeutung haben und also durch bestimmte von der Wahl der Ausgangsgleichung unabhängige Bedingungen charakterisiert werden können. Eine solche Gleichung der Klasse $F(x, y) = 0$ nennen wir eine Normalgleichung; sie enthält, wenn das Geschlecht p und die etwaigen Besonderheiten des Körpers K gegeben sind, eine bestimmte Anzahl stetig veränderlicher und voneinander unabhängiger Parameter, welche die Moduln der Klasse genannt werden; diese Moduln sind Invarianten in dem Sinne, dafs algebraische Gebilde derselben Klasse

in Normalgleichungen mit gleichen Moduln transformiert werden können und dafs Normalgleichungen mit verschiedenen Moduln im allgemeinen nicht ineinander übergeführt werden können. Eine der Hauptaufgaben besteht alsdann darin, bei gegebenem Geschlecht die Anzahl der Moduln zu bestimmen; die Lösung dieser Aufgabe fällt aber, wie wir sehen werden, verschieden aus, je nachdem wir den Körper K als den allgemeinsten seines Geschlechtes voraussetzen oder ihm spezielle Eigenschaften aufprägen, die er im allgemeinen nicht zu haben braucht, aber in besonderen Fällen erhalten kann.

Das soeben gekennzeichnete Problem ist seiner Natur nach nicht vollständig bestimmt, weil es der Untersuchung spezieller Körper einen gewissen Spielraum läfst; seine vollständigste Lösung erhalten wir, wenn es, ebenso wie bei der in §§ 3 und 4 der vorigen Vorlesung durchgeführten Untersuchung, gelingt, ein System von Normalgleichungen wirklich herzustellen und durch ihre charakteristischen Eigenschaften eindeutig zu definieren. Während wir also früher aus einer gegebenen Gleichung die Eigenschaften des durch sie bestimmten Körpers erschlossen haben, so handelt es sich hier um die umgekehrte Aufgabe, einen Körper, von dem das Geschlecht und zuweilen auch eine spezielle Eigenschaft gegeben ist, durch eine Gleichung zu konstruieren.

Wir wollen zunächst die Fälle erledigen, in denen der Körper rational, elliptisch oder hyperelliptisch ist, weil das Resultat hier ein besonders einfaches und vollständiges und daher für alle komplizierteren Verhältnisse vorbildlich ist. Wenn das algebraische Gebilde $f(z,u)=0$ das Geschlecht Null hat, so lassen sich die Gröfsen z und u nach den Ausführungen auf S. 323 mit Hilfe einer Funktion t des Körpers $K(z,u)$, deren Ordnung gleich eins ist, als rationale Funktionen von t darstellen, und es ist also:

$$z = r(t), \quad u = r_1(t).$$

Ebenso ist für ein zweites Gebilde $F(x,y)=0$ vom Geschlechte Null

$$x = R(\tau), \quad y = R_1(\tau),$$

wo τ ebenfalls eine Funktion erster Ordnung des Körpers $K(x,y)$ bedeutet. Da somit t und τ beide Funktionen erster Ordnung sind, so mufs notwendig, wenn die Gebilde in dieselbe Klasse gehören und also $K(z,u) = K(x,y)$ ist,

$$t = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0)$$

sein; umgekehrt können aber auch offenbar irgend zwei rationale Gebilde durch eine derartige Substitution stets ineinander transformiert werden. Da nun hierbei drei Gröfsen, nämlich die Verhältnisse $\alpha:\beta:\gamma:\delta$, willkürlich bleiben, so folgt nicht blofs, dafs irgend zwei Gleichungen

vom Geschlechte Null in dieselbe Klasse fallen, sondern auch, dafs die Überführung beider Gleichungen durch eine dreifach unendliche Schar von Transformationen möglich ist. Die Zahl der Moduln ist also gleich Null; ferner erhalten wir für den Fall, dafs die beiden Gleichungen $f(z, u) = 0$ und $F(x, y) = 0$ identisch sind, den Satz:

> Jedes algebraische Gebilde vom Geschlechte Null kann durch unendlich viele Transformationen, welche von drei willkürlichen Parametern abhängen, in sich, also auch durch ∞^3 Transformationen in jedes andere übergeführt werden.

Anstatt jetzt die nächsten Fälle $p = 1$ und $p = 2$ zu untersuchen, können wir, ohne die Betrachtung zu komplizieren, gleich allgemeiner den Fall eines hyperelliptischen Gebildes von beliebigem Geschlechte erörtern, unter welchen sich, wie wir wissen, die vorher erwähnten Spezialfälle subsumieren lassen. Ein hyperelliptischer Körper vom Geschlechte p ist dadurch charakterisiert, dafs es in ihm eine Funktion z von der zweiten Ordnung giebt. Wählen wir diese zur unabhängigen Variabeln, so können wir, wie früher bewiesen wurde, die andere Variable u so wählen, dafs die Gleichung zwischen u und z rein quadratisch und u eine ganze Funktion von z wird:

$$1)\qquad u^2 = C(z - e_1)(z - e_2)\ldots(z - e_{2p+2}).$$

Für die Variable u gilt dann nach S. 486 die Divisorendarstellung

$$2)\qquad u = \frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^{p+1}},$$

und hierdurch ist offenbar nach Auswahl von z die Variable u, abgesehen von einem konstanten Faktor, völlig bestimmt; dieser Faktor kann dann z. B. durch die Forderung festgelegt werden, dafs in der Gleichung (1) die Konstante C gleich eins werden soll.

Aufser der Variabeln z giebt es in dem Körper $K(z, u)$ noch unendlich viele andere Funktionen zweiter Ordnung, nämlich alle Funktionen der Form

$$3)\qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgendwelche Konstanten mit nicht verschwindender Determinante sind. Führen wir eine solche Funktion z' und an Stelle von u die Funktion

$$2\text{a})\qquad u' = \frac{u}{(\gamma z + \delta)^{p+1}} = \frac{\mathfrak{Z}_{z'}}{\mathfrak{n}_{z'}^{p+1}}$$

in die Gleichung (1) ein, so geht dieselbe über in

$$1\text{a})\qquad u'^2 = C'(z' - e_1')(z' - e_2')\ldots(z' - e_{2p+2}'),$$

wobei die Verzweigungswerte e'_h mit den entsprechenden e_h durch die Gleichung

$$e'_h = \frac{\alpha e_h + \beta}{\gamma e_h + \delta}$$

zusammenhängen. Zwei derartige Gleichungen (1) und (1a) gehören in eine Klasse, und da hierbei die Verzweigungswerte e_h einer linearen Transformation unterworfen werden, so sind die Doppelverhältnisse

$$(e_1 e_2 e_3 e_h) = \frac{e_h - e_1}{e_h - e_2} \frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1}$$

und $\qquad (h = 4, 5, \ldots 2p + 2)$

$$(e'_1 e'_2 e'_3 e'_h) = \frac{e'_h - e'_1}{e'_h - e'_2} \frac{e'_3 - e'_2}{e'_3 - e'_1}$$

einander gleich. Wir werden nun aber umgekehrt nachweisen, dafs zwei hyperelliptische Gebilde (1) und (1a) nur dann in dieselbe Klasse gehören, wenn die Verzweigungswerte so angeordnet werden können, dafs die $2p - 1$ Doppelverhältnisse $(e_1 e_2 e_3 e_h)$ und $(e'_1 e'_2 e'_3 e'_h)$ einander gleich sind und die beiden Gleichungen also durch die Substitution (3) ineinander übergehen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir den Zähler und den Nenner von z':

$$\mathfrak{z}_{z'} = \alpha \mathfrak{z}_z + \beta \mathfrak{n}_z, \quad \mathfrak{n}_{z'} = \gamma \mathfrak{z}_z + \delta \mathfrak{n}_z$$

und die zugehörige Divisorenklasse A. Irgend zwei ganze Divisoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ dieser Klasse, welche voneinander linear unabhängig sind, z. B. $\mathfrak{z}_z$ und $\mathfrak{n}_z$ oder $\mathfrak{z}_{z'}$ und $\mathfrak{n}_{z'}$, liefern durch ihren Quotienten $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}$ eine Funktion zweiter Ordnung des Körpers. Die Klasse A hat die Ordnung zwei, und für ihre Dimension hat man zunächst, da $\mathfrak{z}_z$ und $\mathfrak{n}_z$ linear unabhängig sind:

$$\{A\} \geq 2.$$

Man sieht aber leicht, dafs hier notwendig das Gleichheitszeichen stehen mufs. Es gilt nämlich allgemein der in einzelnen Fällen schon früher angewendete Satz:

> Ist $z = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}$ eine Funktion des Körpers von möglichst niedriger Ordnung und A die Klasse ihres Zählers und Nenners, so ist die Dimension $\{A\} = 2$.

Denn gäbe es in der Klasse A drei ganze linear unabhängige Divisoren, so könnte man in ihr noch zwei Elemente $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ mit einem gemeinsamen Primteiler $\mathfrak{P}$ finden, und deren Quotient $\zeta = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1}$ wäre von

niedrigerer Ordnung als z, weil der Faktor $\mathfrak{P}$ gehoben werden kann. Es ist klar, dafs in unserem Falle z wirklich eine Funktion von möglichst niedriger Ordnung ist, weil der Körper keine Funktionen erster Ordnung enthält (S. 323), und folglich ist in der That

$$\{A\} = 2.$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, alle in einem hyperelliptischen Körper $K(z, u)$ enthaltenen Funktionen zweiter Ordnung zu finden. Diese Aufgabe ist nach dem eben Bewiesenen identisch mit der anderen, alle Divisorenklassen aufzustellen, für welche Ordnung und Dimension beide gleich zwei sind. Die Antwort auf diese Frage fällt aber verschieden aus, je nachdem $p = 1$ oder $p > 1$ ist, und zwar werden wir zunächst für den Fall $p > 1$ nachweisen, dafs es aufser der Klasse A, welcher Zähler und Nenner von z angehören, keine zweite von der geforderten Eigenschaft giebt. Bilden wir nämlich zur Klasse A die Ergänzungsklasse $\frac{W}{A}$, so ergiebt sich nach dem Riemann-Rochschen Satze für ihre Dimension die Gleichung

$$\left\{\frac{W}{A}\right\} - (p-2) = \{A\} - 1$$

oder

$$\left\{\frac{W}{A}\right\} = p - 1 > 0.$$

Jeder ganze Divisor der Klasse A besteht also aus zwei Primfaktoren $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von der Beschaffenheit, dafs diejenigen Divisoren der Klasse W, welche den Primdivisor $\mathfrak{P}_1$ haben, auch durch $\mathfrak{P}_2$ teilbar sind; denn da die Klasse W primitiv ist, so giebt es in ihr $p-1$ linear unabhängige Divisoren, welche Multipla von $\mathfrak{P}_1$ sind, und diese haben zufolge der letzten Gleichung auch den Faktor $\mathfrak{P}_2$. Nun wurde aber auf S. 486 bewiesen, dafs die ganzen Divisoren der Differentialklasse

$$W = A^{p-1}$$

die Form

$$\mathfrak{W} = c_1 \mathfrak{n}_z^{p-1} + c_2 \mathfrak{n}_z^{p-2} \mathfrak{z}_z + \cdots + c_{p-1} \mathfrak{n}_z \mathfrak{z}_z^{p-2} + c_p \mathfrak{z}_z^{p-1}$$

besitzen und dafs hierdurch zu einem beliebig gegebenen Primteiler $\mathfrak{P}_1$ stets ein und nur ein zweiter $\mathfrak{P}_2$ bestimmt wird, der gleichzeitig mit $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{W}$ enthalten ist; in diesem nimmt nämlich die Variable $z = \frac{\mathfrak{z}_z}{\mathfrak{n}_z}$ denselben Wert wie in $\mathfrak{P}_1$ an; d. h. es ist $\mathfrak{P}_2$ der über $\mathfrak{P}_1$ gelegene Punkt des anderen Blattes der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$. Für $p > 1$ mufs nach dem eben Bewiesenen jede Divisorenklasse von der Ordnung und der Dimension zwei diese Eigenschaft der Klasse A besitzen;

irgend zwei derartige Klassen enthalten also genau die gleichen ganzen Divisoren $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ und sind daher identisch, und aufser den Funktionen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

giebt es keine anderen Funktionen zweiter Ordnung des Körpers $K(z, u)$, was zu beweisen war.

Nach diesen Feststellungen können wir für $p > 1$ unmittelbar die im Anfange gestellte Frage entscheiden. Wenn ein zweites hyperelliptisches Gebilde vom Geschlechte p durch die Gleichung

$$1\text{a}) \qquad u'^2 = C'(z' - e_1')(z' - e_2') \ldots (z' - e_{2p+2}')$$

gegeben ist, so ist z' eine Funktion zweiter Ordnung des Körpers $K(z' u')$, und es ist analog wie in Formel (2):

$$2\text{a}) \qquad u' = \frac{\mathfrak{Z}_{z'}}{\mathfrak{n}_{z'}^{p+1}}.$$

Soll nun die Gleichung (1a) in (1) birational transformierbar, also $K(z, u) = K(z', u')$ sein, so mufs nach dem zuletzt bewiesenen Satze notwendig

$$3) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

also

$$4) \qquad \mathfrak{z}_{z'} = \alpha \mathfrak{z}_z + \beta \mathfrak{n}_z, \quad \mathfrak{n}_{z'} = \gamma \mathfrak{z}_z + \delta \mathfrak{n}_z$$

sein. Dann aber gilt für die Verzweigungsdivisoren nach S. 249 die Gleichung

$$\mathfrak{Z}_{z'} = \mathfrak{Z}_z,$$

also ist:

$$\frac{u'}{u} = \left(\frac{\mathfrak{n}_z}{\mathfrak{n}_{z'}}\right)^{p+1}$$

oder, da $\gamma z + \delta = \frac{\mathfrak{n}_{z'}}{\mathfrak{n}_z}$ ist:

$$u' = \frac{u}{(\gamma z + \delta)^{p+1}}.$$

Damit ist die am Anfange aufgestellte Behauptung für $p > 1$ vollständig bewiesen, und es ergiebt sich somit der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Transformierbarkeit zweier hyperelliptischer Gebilde (1) und (1a) ineinander besteht darin, dafs die beiden binären Formen

$$(\mathfrak{z}_z - e_1 \mathfrak{n}_z)(\mathfrak{z}_z - e_2 \mathfrak{n}_z) \ldots (\mathfrak{z}_z - e_{2p+2} \mathfrak{n}_z) = G(\mathfrak{z}_z, \mathfrak{n}_z)$$

und

$$(\mathfrak{z}_{z'} - e_1' \mathfrak{n}_{z'})(\mathfrak{z}_{z'} - e_2' \mathfrak{n}_{z'}) \ldots (\mathfrak{z}_{z'} - e_{2p+2}' \mathfrak{n}_{z'}) = G'(\mathfrak{z}_{z'}, \mathfrak{n}_{z'})$$

durch die Substitution (4) ineinander übergehen.

Die Lösung der Aufgabe kommt hiernach auf ein bekanntes Problem der binären Invariantentheorie zurück: es müssen nämlich die beiden Formen G und G' äquivalent sein. Bringt man, was durch

lineare Transformation stets erreicht werden kann, drei der $2p+2$ Verzweigungswerte an die Stellen $0, 1, \infty$, so werden die übrigen $2p-1$ gleich den Doppelverhältnissen

$$i_h = (e_1 e_2 e_3 e_h) \qquad (h = 4, 5, \ldots 2p+2).$$

Diese Doppelverhältnisse sind also die Moduln des hyperelliptischen Gebildes, und es gilt somit der Satz, der, wie wir sehen werden, ebenso wie der vorige, auch im Falle $p=1$ richtig bleibt:

Die Anzahl der Moduln eines hyperelliptischen Gebildes vom Geschlechte p ist gleich $2p-1$.

Wenn zwei hyperelliptische Gebilde in dieselbe Klasse gehören, so können durch geeignete Transformation die $2p-1$ Moduln i_h gleiche Werte erhalten; aber es ist zu beachten, dafs aus der Ungleichheit der Moduln nicht unbedingt erschlossen werden darf, dafs die Gebilde nicht äquivalent sind, weil die Werte der Moduln auch von der Anordnung der Verzweigungspunkte abhängen; nur die Anzahl der Moduln bleibt hiervon unberührt. Man kann diesem Übelstande, der auch in den späteren Untersuchungen wiederkehrt, hier dadurch entgehen, dafs man statt der Invarianten i_h, welche algebraisch von den Koeffizienten der Formen G und G' abhängen, rationale Invarianten beider Formen einführt, worauf wir hier nicht weiter eingehen.

§ 2.

Etwas komplizierter liegt die Sache in dem Falle $p=1$, weil alsdann die Deduktion auf S. 532 nicht mehr zutrifft. Sind nämlich z und z' zwei Funktionen zweiter Ordnung des Körpers, so ist es nicht notwendig, dafs $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ist, sondern es giebt in der That, da man in diesem Falle die beiden Pole einer Funktion zweiter Ordnung nach Belieben wählen kann (S. 488), unendlich viele Divisorenklassen, deren Ordnung und Dimension gleich zwei ist.

Die Mannigfaltigkeit dieser Divisorenklassen ist von der gleichen Mächtigkeit, wie die der Punkte der Riemannschen Fläche. Denn man kann innerhalb jeder Divisorenklasse einen bestimmten Divisor so auswählen, dafs er einen willkürlich, aber fest angenommenen Punkt $\mathfrak{P}$ enthält; wenn man diesen mit allen möglichen Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ der Riemannschen Fläche zu den Divisoren $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}\mathfrak{P}_2, \ldots$ vereinigt, so gehören alle diese zu verschiedenen Klassen, weil es anderenfalls, wenn z. B. $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}\mathfrak{P}_2$ wäre, Funktionen erster Ordnung $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2}$ gäbe, was nicht angeht. Man kann also innerhalb jeder

Divisorenklasse ein und nur ein durch den festen Primdivisor $\mathfrak{P}$ teilbares Element ausfindig machen.

Wählen wir demgemäſs zwei Funktionen zweiter Ordnung z und z' des Körpers K, deren Nenner zu verschiedenen Klassen A und A' gehören, so besteht zwischen ihnen eine Gleichung, welche in jeder der beiden Variabeln vom zweiten Grade ist:

$$\begin{aligned}\Phi(z, z') = z'^2(az^2 + 2bz + c) &+ 2z'(a'z^2 + 2b'z + c') \\ &+ (a''z^2 + 2b''z + c'') = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

und es ist notwendig $K(z, u) = K(z, z')$; anderenfalls würde nämlich der zweite Körper ein Unterkörper des ersten sein, dann aber wäre die Gleichung 1) reduktibel und somit z' eine rationale, also auch eine lineare Funktion von z, und dies hatten wir gerade ausgeschlossen.

In der Gleichung (1) kann man, ohne an ihr etwas Wesentliches zu verändern, jede der beiden Variabeln z und z' einer beliebigen linearen gebrochenen Transformation unterwerfen, denn eine derartige Transformation ist nur einer Veränderung der Fundamentaldivisoren der Klassen A und A' äquivalent. Wir wollen diese Bemerkung dazu benutzen, die Gleichung (1) zu einer symmetrischen zu machen, so daſs also

$$\Phi(z, z') = \Phi(z', z)$$

ist. Da nämlich die Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}_z$ und $\mathfrak{Z}_{z'}$ von vierter Ordnung sind und somit jede der beiden Klassen A und A' vier Divisoren $\mathfrak{P}_1^2, \mathfrak{P}_2^2, \mathfrak{P}_3^2, \mathfrak{P}_4^2$, resp. $\mathfrak{P}_1'^2, \mathfrak{P}_2'^2, \mathfrak{P}_3'^2, \mathfrak{P}_4'^2$ enthalten, welche Quadrate sind, so kann man

$$z = \frac{\mathfrak{P}_1^2}{\mathfrak{P}_2^2}, \quad z' = \frac{\mathfrak{P}_1'^2}{\mathfrak{P}_2'^2}$$

annehmen. Die Gleichung $\Phi(z, z') = 0$ erhält dann für $(z = 0)$ und $(z = \infty)$ je eine Doppelwurzel, und das Gleiche ist für $(z' = 0)$ und $(z' = \infty)$ der Fall; die vier Funktionen

$$\begin{aligned} &az^2 + 2bz + c, &&a''z^2 + 2b''z + c'' \\ &az'^2 + 2a'z' + a'', &&cz'^2 + 2c'z' + c'' \end{aligned}$$

sind also Quadrate. Die Gleichung (1) erhält daher bei Einführung dieser Bedingungen folgende Form:

$$\begin{aligned} z'^2(\lambda^2 z^2 + 2\lambda\mu z + \mu^2) &+ 2z'(\lambda\bar{\mu}z^2 + 2b'z + \mu\nu) \\ &+ (\bar{\mu}^2 z^2 + 2\bar{\mu}\nu z + \nu^2) = 0. \end{aligned} \tag{1a}$$

Die Gröſsen μ und $\bar{\mu}$ können hier nicht verschwinden, denn wenn z. B. $\mu = 0$ wäre, so würde zu $(z' = \infty)$ zweimal die Wurzel $(z = 0)$

gehören; es wären also der Nenner von z' und der Zähler von z und folglich auch ihre Klassen A und A' identisch, was der Voraussetzung widerspricht. Führen wir daher in (1a) statt z' die Variable $\frac{\bar{\mu}}{\mu} z'$ ein, so erhalten wir schliefslich, wie behauptet wurde, eine symmetrische Form der Gleichung zwischen z und z', nämlich:

$$\text{1b)} \quad z'^2(\lambda^2 z^2 + 2\lambda\mu z + \mu^2) + 2z'(\lambda\mu z^2 + 2b'z + \mu\nu) + (\mu^2 z^2 + 2\mu\nu z + \nu^2) = 0,$$

wobei für $\frac{\mu}{\bar{\mu}} b'$ und $\frac{\mu}{\bar{\mu}} \nu$ wieder b' und ν substituiert sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt leicht zeigen, dafs für zwei Gleichungen vom Geschlechte $p = 1$:

$$\text{2)} \quad u^2 = C(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)$$

und

$$\text{2a)} \quad u'^2 = C'(z' - e'_1)(z' - e'_2)(z' - e'_3)(z' - e'_4),$$

welche in dieselbe Klasse gehören, die Doppelverhältnisse $(e_1 e_2 e_3 e_4)$ und $(e'_1 e'_2 e'_3 e'_4)$ einander gleich sind, auch dann, wenn die Nenner $\mathfrak{n}_z$ und $\mathfrak{n}_{z'}$ in verschiedene Divisorenklassen A und A' fallen. Denn unter dieser Voraussetzung besteht zufolge des eben Bewiesenen nach passender linearer Transformation von z und z' zwischen diesen Gröfsen eine Gleichung der Form (1b), und da die Diskriminante dieser Gleichung in Beziehung auf z'

$$(\lambda\mu z^2 + 2b'z + \mu\nu)^2 - (\lambda z + \mu)^2 (\mu z + \nu)^2$$

die Verzweigungswerte von z angiebt, so ist sie, abgesehen von einem konstanten Faktor, mit

$$(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)$$

identisch.

Das Analoge gilt aber von der Diskriminante in Beziehung auf z, und da die Gleichung (1b) symmetrisch ist und beide Diskriminanten also gleich sind, so ist nach jener linearen Transformation von z und z':

$$e_h = e'_h,$$

also vor derselben $(e_1 e_2 e_3 e_4) = (e'_1 e'_2 e'_3 e'_4)$, was zu beweisen war.

Wenn also die beiden Gleichungen (2) und (2a) in dieselbe Klasse gehören, so sind auch im Falle $p = 1$ die Doppelverhältnisse der Verzweigungswerte gleich, und es ist auch in diesem Falle stets möglich, die beiden Gleichungen durch dieselbe Transformation wie vorher, nämlich durch die Substitution (3) des vorigen Abschnittes, ineinander überzuführen. Der Unterschied gegenüber der früheren Untersuchung besteht nur darin, dafs es in diesem Falle aufser dieser noch unendlich viele andere Trans-

formationen giebt, welche den unendlich vielen verschiedenen Divisorenklassen von der Ordnung und der Dimension zwei entsprechen. Daher giebt es in diesem Falle auch unendlich viele Transformationen des algebraischen Gebildes in sich. Wir gelangen zu diesen, wenn wir die Klasse A' willkürlich wählen und in der Gleichung (1) alsdann die Konstanten passend bestimmen. Es gilt also der Satz, welcher zusammen mit dem entsprechenden auf S. 530 das Theorem des § 4 der achtundzwanzigsten Vorlesung vervollständigt:

> Ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $p = 1$ besitzt unendlich viele Transformationen in sich, welche von einem veränderlichen Parameter abhängen.

Die Existenz dieser kontinuierlichen Gruppe von Transformationen ist geometrisch unmittelbar evident, wenn man von der Gleichungsform

$$u^2 = C(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$$

ausgeht, auf der hierdurch gegebenen Kurve dritter Ordnung einen beliebigen Punkt Q wählt und jedem Punkte P des Gebildes denjenigen P' zuordnet, welcher mit Q und P in gerader Linie liegt; es ist klar, dafs die Punkte des Gebildes hierdurch umkehrbar eindeutig einander zugeordnet werden und dafs es ebenso viele Transformationen wie Projektionscentren Q giebt. Die Ausführung der hier erforderlichen Rechnung kann unterbleiben, da dieselbe mit einer später bei Gelegenheit des Abelschen Theorems anzustellenden zusammenfällt.

§ 3.

Gehen wir jetzt dazu über, allgemeine Körper von beliebig gegebenem Geschlechte p zu untersuchen, so wollen wir uns zuvörderst auf die Bestimmung der Anzahl der Moduln unter der Voraussetzung beschränken, dafs das algebraische Gebilde keine Besonderheiten hat, der Körper also ein ordinärer ist (S. 494).

Nach den Ergebnissen des vorigen Kapitels ist die Kurve H der Differentiale erster Gattung stets von invarianter Beschaffenheit; diese Kurve ist aber in einem Raume von $p - 1$ Dimensionen gelegen und daher zur Aufstellung von Normalgleichungen nicht unmittelbar verwendbar. Wir gelangen aber zu einer solchen, wenn wir nur diejenigen ganzen Divisoren der Klasse W betrachten, welche durch einen beliebig gewählten ganzen Divisor der Ordnung $p - 3$

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{p-3}$$

teilbar sind; denn wenn die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{p-3}$ keine besonderen Lagen besitzen, so ist die Dimension der Klasse $\frac{W}{Q}$ nach den Aus-

führungen auf S. 318 gleich $p-(p-3)=3$; folglich giebt es drei ganze linear unabhängige, durch $\mathfrak{Q}$ teilbare Divisoren der Klasse W, und zwischen ihnen besteht eine homogene Gleichung, deren Grad gleich $2(p-1)-(p-3)=p+1$ ist. Geometrisch ausgedrückt bedeutet dies, dafs wir auf der Hauptkurve $p-3$ willkürliche, aber feste Punkte annehmen, und vermöge eines durch sie hindurchgelegten Büschels ebener Mannigfaltigkeiten die Kurve aus einem Raume von $p-1$ Dimensionen in einen solchen von nur zwei Dimensionen projizieren.

Die so erhaltene ebene Kurve der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, deren Gleichung

$$F(x_0, x_1, x_2)=0$$

sei, besitzt eine Anzahl Doppelpunkte, denn da ihr Geschlecht p ist, so ergiebt sich für die Ordnung $2d$ des Divisors der Doppelpunkte (im projektiven Sinne) nach der Formel (3) auf S. 427:

$$d=\frac{1}{2}p(p-1)-p=\frac{1}{2}p(p-3).$$

Wenn ferner der Körper ein ordinärer ist und die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{p-3}$ nicht speziell ausgewählt sind, so bestehen die Singularitäten der Kurve in d gewöhnlichen Doppelpunkten; denn wir werden jetzt umgekehrt zeigen, dafs eine ebene Kurve der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit $\frac{p(p-3)}{2}$ Doppelpunkten in allgemeiner Lage das Geschlecht p hat, und dafs sich $x_0 : x_1 : x_2$ wie drei Differentiale erster Gattung mit einem gemeinsamen Teiler $(p-3)^{\text{ter}}$ Ordnung verhalten; ein durch eine solche Gleichung definierter Körper mufs also ein ordinärer sein. Der erste Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus der letzten Formel; um auch den zweiten zu beweisen, legen wir durch die Doppelpunkte eine adjungierte Kurve der $(p-3)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$A(x_0, x_1, x_2)=0;$$

diese ist, wenn die vorhandenen $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkte keine besonderen Lagen haben, gerade durch sie eindeutig bestimmt, weil zur Festlegung einer Kurve n^{ter} Ordnung $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte erforderlich sind, und sie schneidet die Grundkurve aufser in den Doppelpunkten noch in

$$(p+1)(p-3)-p(p-3)=p-3$$

festen Punkten, welche mit $P_1, P_2, \ldots P_{p-3}$ bezeichnet sein sollen. Bedeutet also dM dasselbe Differential wie auf S. 428, so sind

$$A(x_0, x_1, x_2)\cdot x_0\,dM, \quad A(x_0, x_1, x_2)\cdot x_1\,dM, \quad A(x_0, x_1, x_2)\cdot x_2\,dM$$

Differentiale erster Gattung, weil die Faktoren von dM, gleich Null gesetzt, adjungierte Kurven der $(p-2)^{\text{ten}}$ Ordnung darstellen. Die drei Differentiale verhalten sich wie $x_0 : x_1 : x_2$, und eine lineare Verbindung

$$A(x_0 x_1 x_2)(c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2) = 0$$

stellt eine adjungierte Kurve dar, welche die Grundkurve in den $p-3$ festen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_{p-3}$, und überdies in den $p+1$ Schnittpunkten einer Geraden der Ebene trifft. Sind also $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{p-3}$ die Primdivisoren, die den Punkten $P_1, P_2 \ldots P_{p-3}$ entsprechen, so besitzen jene drei Differentialteiler den gröfsten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{p-3}$, und damit sind wir auf den Ausgangspunkt der Betrachtung zurückgekommen.

Bestimmen wir jetzt die Anzahl der in der Kurvengleichung enthaltenen wesentlichen Konstanten, so haben wir zu berücksichtigen, dafs die Gleichung einer ebenen Kurve $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{1}{2}(p+1)(p+4)$ nicht homogene Konstanten enthält und dafs sich die Konstantenzahl durch die Forderung von $\frac{1}{2}p(p-3)$ Doppelpunkten auf

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+4) - \frac{1}{2}p(p-3) = 4p+2$$

erniedrigt. Von diesen Konstanten sind aber nicht alle wesentlich; denn wir können erstens durch eine Kollineation acht fortschaffen, und zweitens durch passende Auswahl der $p-3$ Projektionspunkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{p-3}$ noch $p-3$ weitere Konstanten, im ganzen also $p+5$ Konstanten in Fortfall bringen. Die Anzahl der wesentlichen Konstanten ist also

$$4p + 2 - (p+5) = 3p - 3.$$

Denken wir uns aber eine solche Normalgleichung mit $3p-3$ Konstanten wirklich hergestellt, so gehören zu Gebilden einer Klasse gleiche, zu Gebilden verschiedener Klassen verschiedene Normalgleichungen, und da ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte $p > 1$ nur eine endliche Zahl von Transformationen in sich besitzt, so giebt es auch nur eine endliche Anzahl von Transformationen zweier äquivalenter Gebilde ineinander. Die Moduln sind also voneinander unabhängige Invarianten, und es gilt der wichtige, von Riemann aufgestellte Satz:

> Eine Klasse algebraischer Gebilde vom Geschlechte p ohne jede Besonderheit besitzt $3p-3$ Moduln.

Bei dieser Untersuchung ist $p \geq 3$ vorausgesetzt; es folgt aber aus dem ersten Paragraphen, dafs der Satz auch für $p = 2$ richtig ist, während er für $p = 0$ und $p = 1$ seine Geltung verliert.

Einunddreifsigste Vorlesung.

Bestimmung einer Normalgleichung durch die Weierstrafs-Punkte. — Zweiter Beweis des Satzes, dafs algebraische Gebilde vom Geschlechte $p > 1$ nur eine endliche Zahl von Transformationen in sich haben. — Die Singularitäten des durch die Normalgleichung gegebenen Gebildes. — Anzahl der Moduln. — Ordinäre und spezielle Körper. — Funktionen niedrigster Ordnung des Körpers. — Körper, welche Funktionen dritter Ordnung enthalten. — Ihre Normalgleichungen. — Die Zahl ihrer Moduln hängt von zwei Invarianten ab.

§ 1.

Wir wollen jetzt für höhere Geschlechtszahlen und beliebige Körper Normalgleichungen wirklich herstellen und hierdurch noch einmal und auf anderem Wege die Anzahl der Moduln einer Klasse algebraischer Gebilde bestimmen.

Hierzu knüpfen wir zunächst an die Ergebnisse der achtundzwanzigsten Vorlesung über Weierstrafs-Punkte an. Diese Punkte treten, wie wir wissen, stets für $p > 1$ und in endlicher Anzahl auf, und sie sind ausschliefslich von der Beschaffenheit des Körpers $K(z, u)$, nicht aber von der besonderen Form der Ausgangsgleichung $f(z, u) = 0$ abhängig, der zu einem Weierstrafs-Punkte gehörige Divisor ist also innerhalb der Gesamtheit aller Primteiler durch eine bei birationaler Transformation invariante Eigenschaft definiert.

Ist nun $\mathfrak{P}$ ein solcher Punkt und P seine Klasse, und betrachten wir den zu $\mathfrak{P}$ gehörigen additiven Modul $(\mathfrak{M})$ (S. 493), welchen die Ordnungszahlen der Funktionen mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}$ bilden, so sei n die kleinste positive Zahl dieses Systems und $r + n$ eine spätere, welche in $(\mathfrak{M})$ an $(h+1)^{\text{ter}}$ Stelle stehen möge, und zwar sei es die kleinste Zahl des Moduls, welche zu n teilerfremd ist. Die n Blätter der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ hängen also bei $(x = \infty)$ im Cyklus miteinander zusammen, und wir können den ausgezeichneten Punkt $\mathfrak{P}$ kurz durch $\mathfrak{P}_\infty$ bezeichnen. Hiernach giebt es zwei Funktionen x und y, deren Nenner resp. gleich $\mathfrak{P}_\infty^n$ und $\mathfrak{P}_\infty^{r+n}$ sind, so dafs

$$1) \qquad x = \frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{P}_\infty^n}, \quad y = \frac{\mathfrak{z}_y}{\mathfrak{P}_\infty^{r+n}}$$

und y also eine ganze Funktion von x ist.

Da ferner n die kleinste der vorhandenen Ordnungszahlen sein sollte, so ist die Gesamtheit der Funktionen des Körpers mit dem Nenner $\mathfrak{P}_\infty^n$ durch die Schar

$$x' = \alpha x + \beta$$

gegeben, wobei α und β zwei Konstanten bedeuten, deren erste von Null verschieden ist. Ersetzt man ebenso die Funktion y durch eine andere Funktion y' mit dem Nenner $\mathfrak{P}_\infty^{r+n}$, so stehen die beiden Funktionen y und y' in einer Beziehung der Form

$$2)\qquad y' = c_0 + c_1 x + c_2 u + c_3 v + \cdots + c_{h-1} w + c_h y,$$

wobei $1, x, u, v, \ldots w$ Funktionen bedeuten, deren Ordnungen den in dem Systeme $\mathfrak{M}$ der Zahl $r + n$ vorhergehenden Zahlen gleich sind. Für die Dimension $(h + 1)$ dieser zweiten Schar ergiebt sich nach dem Riemann-Rochschen Satze die Gleichung:

$$3)\qquad h = r + n - p + \varrho,$$

wo

$$3\text{a})\qquad \varrho = \left\{ \frac{W}{P^{r+n}} \right\}$$

die Dimension der Ergänzungsklasse von P^{r+n} ist.

Entwickeln wir die Funktion y in der Umgebung von $(x = \infty)$ in eine Reihe, so erhalten wir

$$y_1 = \lambda \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{r+n}{n}} + \cdots,$$

und aus dieser die konjugierten Reihenentwickelungen $y_1, y_2, \ldots y_n$, indem wir $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$ durch $\omega \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$ ersetzen, wo ω eine der n^{ten} Einheitswurzeln bedeutet. Da wir aber r als zu n teilerfremd angenommen haben, so fallen diese n Reihenentwickelungen

$$4)\qquad y_h = \lambda\, e^{\frac{2\pi i r (h-1)}{n}} \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{r+n}{n}} + \cdots \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

alle voneinander verschieden aus, und die zwischen x und y bestehende Gleichung n^{ten} Grades

$$F(x, y) = (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_n) = 0$$

ist somit irreduktibel; der Körper $K(x, y)$ ist also mit dem gegebenen $K(z, u)$ identisch, und alle Funktionen von $K(z, u)$ sind als rationale Funktionen von x und y ausdrückbar. Ohne die vorher getroffene Festsetzung hingegen, daſs r und n relativ prim sind,

könnte es eintreten, dafs der Körper $K(x, y)$ nur ein Unterkörper von $K(z, u)$ ist.

Die elementaren symmetrischen Funktionen von $y_1, y_2, \dots y_n$:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -a_{n-1}(x)$$
$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n = a_{n-2}(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_1 y_2 \dots y_n = (-1)^n a_0(x),$$

sind ganze rationale Funktionen von x, weil sie nur bei $(x = \infty)$ einen Pol besitzen; und es ist der Grad von $a_{n-k}(x)$ höchstens gleich der gröfsten in $\frac{k(r+n)}{n}$ enthaltenen ganzen Zahl

$$\delta_k = \left[\frac{k(r+n)}{n}\right].$$

Hierbei ist aber zu beachten, dafs das Produkt $a_0(x)$ der konjugierten Funktionen nur ein Glied höchster Ordnung erhält:

$$a_0(x) = -\lambda^n x^{r+n} + \cdots,$$

und dafs also der letzte Gleichungskoeffizient genau vom Grade

$$\delta_n = r + n$$

ist. Die Gleichung zwischen x und y hat hiernach folgende Gestalt:

$$5) \quad F(x, y) = y^n + a_{n-1}(x) y^{n-1} + a_{n-2}(x) y^{n-2} + \cdots + a_1(x) y + a_0(x) = 0,$$

worin $a_{n-k}(x)$ eine ganze Funktion höchstens vom Grade $\left[\frac{k(r+n)}{n}\right]$ und $a_0(x)$ genau vom Grade $r + n$ ist.

Wir wollen, bevor wir weitergehen, aus der Form dieser Gleichung noch einmal den schon früher bewiesenen Satz ableiten, dafs für $p > 1$ die Anzahl der Transformationen des algebraischen Gebildes in sich stets eine endliche ist. Da wir x durch $\alpha x + \beta$ ersetzen können, so können wir über diese Funktion noch die weitere Verfügung treffen, dafs sie einen zweiten Weierstrafs-Punkt $\mathfrak{P}_0$ zur Nullstelle hat; hierdurch ist sie dann, abgesehen von einer multiplikativen Konstanten, völlig bestimmt. Ebenso können wir die Funktion y bis auf einen konstanten Faktor durch die Festsetzung normieren, dafs der Zähler $\mathfrak{z}_y$ den Punkt $\mathfrak{P}_0$ in einer möglichst hohen Potenz enthalten solle. Nachdem so x und y bis auf konstante Faktoren bestimmt sind, können wir über diese schliefslich noch so verfügen, dafs der Koeffizient λ in der Reihe (4) gleich eins wird; dann erhält die Gleichung (5) die folgende Form:

5a) $$F(x, y) = y^n - x^{r+n} + \sum_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0,$$

wobei in der Summe ν nur positive Werte, die $< n$, μ nur positive Werte, die $< r+n$ sind, annimmt.

Nach den früheren Ergebnissen auf S. 500 braucht aber zum Beweise unseres Satzes blofs gezeigt zu werden, dafs die Untergruppe derjenigen Transformationen endlich ist, welche die Weierstrafs-Punkte fest lassen. Nun war aber

$$x = \frac{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^n}, \quad y = \frac{\mathfrak{P}_0^e \mathfrak{G}_1}{\mathfrak{P}_\infty^{r+n}},$$

worin $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ ganze Divisoren bedeuten und der Exponent e den gröfsten erreichbaren Wert annehmen sollte. Da die Punkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_\infty$ aber bei der Transformation unverändert bleiben, so gehen x und y durch dieselbe in zwei Funktionen ξ und η über, von denen die erste ebenfalls ein Vielfaches von $\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_\infty^n}$, die zweite ein Vielfaches von $\frac{\mathfrak{P}_0^e}{\mathfrak{P}_\infty^{r+n}}$ sein mufs, und da diese Divisoren die Funktionen bis auf einen Faktor festlegen, so mufs:

6) $$\xi = \alpha x, \quad \eta = \beta y,$$

sein, worin α und β zwei noch näher zu untersuchende Konstanten bedeuten.

Da nämlich zwischen ξ und η die Gleichung

$$F(\xi, \eta) = \eta^n - \xi^{r+n} + \sum_{\mu\nu} c_{\mu\nu} \xi^\mu \eta^\nu = 0$$

bestehen soll, so ist auch

$$\beta^n y^n - \alpha^{r+n} x^{r+n} + \sum_{\mu\nu} c_{\mu\nu} \alpha^\mu \beta^\nu x^\mu y^\nu = 0,$$

und da diese Gleichung bis auf einen konstanten Faktor mit $F(x, y) = 0$ identisch sein mufs, so ist notwendig

$$\alpha^{r+n} = \beta^n = k,$$

und für jede Kombination (μ, ν), deren zugehöriger Koeffizient $c_{\mu\nu}$ von Null verschieden ist:

$$\alpha^\mu \beta^\nu = k.$$

Zufolge der ersten Gleichung kann man

$$\alpha = \omega^n, \quad \beta = \omega^{r+n}$$

setzen, und da alsdann für jedes auftretende Zahlenpaar (μ, ν)

$$\omega^{\mu n + \nu(r+n)} = \omega^{n(r+n)}$$

ist, so ist ω, also auch α und β, mit Notwendigkeit eine Einheitswurzel, und die Transformation (6) führt daher nach einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen zur Identität. Da aber die hier auftretenden Gleichungen nur eine endliche Anzahl möglicher Lösungen (und im allgemeinen sogar nur die Lösung $\omega = 1$) haben, so ergiebt sich in der That jetzt der Satz:

> Ein algebraisches Gebilde besitzt nur eine endliche Anzahl von Transformationen in sich, sobald sein Geschlecht gröfser als eins ist.

Ein Beispiel mag die zum Schlusse der Untersuchung notwendige Berechnung der Einheitswurzel ω erläutern. Das Gebilde sei durch die Gleichung

$$y^3 - x^4 + \gamma x y = 0$$

gegeben, so dafs $n = 3$, $r + n = 4$ ist. Da ferner für das einzige auftretende Glied der Summe $\sum_{\mu\nu} c_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ $\mu = \nu = 1$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\omega^7 = \omega^{12} \quad \text{oder} \quad \omega^5 = 1,$$

es sind also die Transformationen der hier betrachteten Art durch die Gleichungen

$$\xi = e^{\frac{6\pi i h}{5}} x, \quad \eta = e^{\frac{8\pi i h}{5}} y \qquad h = (0, 1, 2, 3, 4)$$

gegeben, und jede von ihnen führt nach fünf Wiederholungen zur Identität.

Der hier gegebene Beweis ist Herrn Schwarz, der den obigen Satz zuerst aufgestellt hat, von Weierstrafs im Jahre 1875 in einem Briefe mitgeteilt und neuerdings (1895) veröffentlicht worden*); ebendaselbst findet sich auch eine Andeutung der Methode zur Herstellung von Normalgleichungen, die wir im folgenden Paragraphen ausführen.

§ 2.

Kehren wir jetzt zu der Gleichung (5) des vorigen Abschnittes

$$1) \quad F(x,y) = y^n + a_{n-1}(x) y^{n-1} + a_{n-2}(x) y^{n-2} + \cdots + a_1(x) y + a_0(x) = 0$$

zurück, in welcher a_{n-k} eine ganze Funktion des Grades

$$2) \qquad \delta_k = \left[\frac{k(r+n)}{n}\right]$$

*) Mathematische Werke, Bd. II, S. 235—244. Die später erwähnte Stelle S. 243, Z. 1—8.

ist, und fragen wir uns umgekehrt, wie wir die in ihr enthaltenen Konstanten wählen müssen, damit der Körper $K(x, y)$ das Geschlecht p erhält und für $(x = \infty)$ sich nur ein Punkt der Riemannschen Fläche ergiebt, der ein Weierstrafs-Punkt ist. Unsere bisherigen Betrachtungen hatten blofs ergeben, dafs das algebraische Gebilde vom Geschlechte p durch eine Gleichung obiger Form dargestellt werden kann; umgekehrt aber wird sich herausstellen, dafs die Koeffizienten der Gleichung (1) im allgemeinen noch weiteren Bedingungen zu genügen haben, damit das algebraische Gebilde die vorausgesetzten Eigenschaften besitzt.

Bestimmen wir zunächst die Zahl σ der in obiger Gleichung vorkommenden Konstanten, so erhalten wir, da eine ganze Funktion des Grades m von $m+1$ Konstanten abhängt:

$$\sigma = \left(1 + \left[\frac{r+n}{n}\right]\right) + \left(1 + \left[\frac{2(r+n)}{n}\right]\right) + \cdots + \left(1 + \left[\frac{(n-1)(r+n)}{n}\right]\right) + (r+n+1)$$
$$= r + 2n + \left[\frac{r+n}{n}\right] + \left[\frac{2(r+n)}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{(n-1)(r+n)}{n}\right].$$

Die hier auftretende Summe von gröfsten Ganzen läfst sich einfacher darstellen, wenn man berücksichtigt, dafs sich je zwei Glieder zusammenfassen lassen, welche vom Anfang und vom Ende gleich weit abstehen; es ist nämlich für jedes k der Reihe $1, 2, \ldots n-1$:

$$\left[\frac{k(r+n)}{n}\right] + \left[\frac{(n-k)(r+n)}{n}\right] = r + n - 1.$$

Denn man hat in der durch die Gleichung (2) eingeführten Bezeichnung

$$\frac{k(r+n)}{n} = \delta_k + \varepsilon_k,$$

wo ε_k einen echten Bruch bedeutet, der gröfser als Null ist, weil $r+n$ zu n relativ prim, also der auf der linken Seite stehende Bruch niemals eine ganze Zahl ist; folglich ist

$$\frac{(n-k)(r+n)}{n} = (r+n-1-\delta_k) + (1-\varepsilon_k) \quad (0 < 1 - \varepsilon_k < 1),$$

und es ist also die gröfste in diesem Bruche enthaltene ganze Zahl δ_{n-k} wirklich gleich $r+n-1-\delta_k$ oder $\delta_k + \delta_{n-k} = r+n-1$. Hieraus ergiebt sich durch Summation über k:

$$3) \qquad \sigma = r + 2n + \frac{1}{2}(n-1)(r+n-1).$$

Von diesen Konstanten kann aber ein Teil stets gleich gewissen individuellen Zahlwerten angenommen werden. Denn wir dürfen, wie wir gesehen haben, x durch $\alpha x + \beta$ ersetzen und können hierdurch zwei

Konstanten in Fortfall bringen, und wir können aufserdem nach (2) und (3) des vorigen Abschnittes y durch eine Funktion y' einer Schar ersetzen, deren Dimension gleich

4) $$h+1=r+n+1-p+\varrho=r+n+1-p+\left\{\frac{W}{P^{n+r}}\right\}$$

ist. Wir können daher die Konstantenzahl von vornherein durch geeignete Normierungen der Funktionen x und y um $h+3$ vermindern und behalten alsdann nur

5) $$\sigma'=\sigma-h-3=n+p-\varrho-3+\frac{1}{2}(n-1)(r+n-1)$$

Parameter übrig.

Betrachten wir nun umgekehrt irgend eine der sich so ergebenden Gleichungen $F(x,y)=0$, so wird durch sie y als ganze algebraische Funktion von x definiert, und die n Blätter der zugehörigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ hängen in der That stets bei $(x=\infty)$ durch einen einzigen Verzweigungspunkt der Ordnung $n-1$ miteinander zusammen. Konstruieren wir nämlich für $(x=\infty)$ das zugehörige Diagramm (Fig. 35), so ergeben sich für die Punkte $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_n$ die Koordinaten:

$$\mathfrak{A}_0=(0,-r-n),\quad \mathfrak{A}_n=(n,0),$$

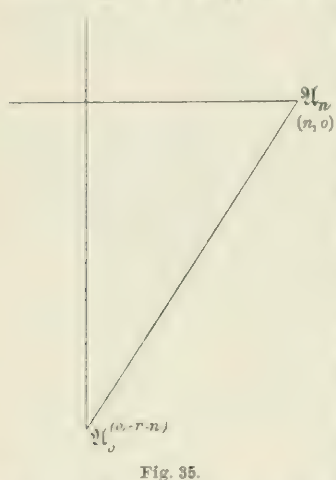


Fig. 35.

weil die Funktionen $a_0(x)$ und $a_n(x)=1$ die Grade $r+n$ und Null haben. Verbindet man aber diese beiden Punkte durch eine Gerade, so fallen die übrigen Punkte $\mathfrak{A}_1,\dots\mathfrak{A}_{n-1}$ sämtlich darüber, denn die Gerade $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_n$ wird von der Ordinatenlinie $x=k$ in einem Punkte getroffen, dessen Ordinate gleich $-\frac{(n-k)(r+n)}{n}$ ist, während die Ordinate des Punktes $\mathfrak{A}_k$ gleich $-\delta_k=-\left[\frac{(n-k)(r+n)}{n}\right]$ ist, und es ist also in der That, da $r+n$ zu n relativ prim ist:

$$-\delta_k>-\frac{(n-k)(r+n)}{n}.$$

Daher erhält man, wie vorher behauptet wurde, für $(x=\infty)$ eine einzige Reihenentwickelung der Form

$$y=\lambda x^{\frac{r+n}{n}}+\cdots,$$

und man hat also, wie es nach (1) des vorigen Paragraphen sein mufs, für x und y die Divisorendarstellungen

6) $$x=\frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{P}_\infty^n},\quad y=\frac{\mathfrak{z}_y}{\mathfrak{P}_\infty^{r+n}}.$$

Somit enthält der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$ den Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz; aufserdem ist aber der Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ auch eine singuläre Stelle des Gebildes, und zwar eine einzweigige Singularität, für welche die reciproken Funktionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ resp. in n^{ter} und $(r+n)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, und folglich enthält nach der Formel (2) auf S. 387 der Divisor $\mathfrak{D}$ der Doppelpunkte den Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ genau in der Potenz $\mathfrak{P}_\infty^{(n-1)(r+n-1)}$.

Machen wir jetzt von der Formel (4) auf S. 382 Gebrauch:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^m\,\mathfrak{n}_y^{n-2}},$$

so ist in unserem Falle $m = r+n$, $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{P}_\infty^n$, $\mathfrak{n}_y = \mathfrak{P}_\infty^{r+n}$, und man kann

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_\infty^{(n-1)(r+n-1)}\mathfrak{D}', \quad \mathfrak{Z}_x = \mathfrak{P}_\infty^{n-1}\mathfrak{Z}'$$

setzen, wo $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{Z}'$ ganze Divisoren sind, welche den Primdivisor $\mathfrak{P}_\infty$ nicht mehr enthalten. Dann ist

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{P}_\infty^{2(n-1)(r+n)}} = \frac{\mathfrak{D}'\,\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{P}_\infty^{(n-1)(r+n)}}.$$

Die Ordnung des ganzen Divisors $\mathfrak{D}'\mathfrak{Z}'$ ist also $(n-1)(r+n)$; würden wir nun den σ' Konstanten unserer Gleichung keine weiteren Bedingungen auferlegen, so hätte die Kurve keine Doppelpunkte im Endlichen; es wäre also $\mathfrak{D}' = 1$ und $\mathfrak{Z}'$ ein ganzer Divisor der Ordnung $(n-1)(r+n)$, und die Kurve erhielte das Geschlecht

$$\frac{1}{2}(n-1)(r+n+1) - (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(r+n-1).$$

Da aber das Geschlecht die gegebene Zahl p sein soll, so mufs $\mathfrak{Z}_x$ die Ordnung $w = 2p-2+2n$, also $\mathfrak{Z}'$ nur die Ordnung $2p+n-1$ haben. Folglich mufs $\mathfrak{D}'$ die Ordnung

$$(n-1)(r+n) - (2p+n-1) = (n-1)(r+n-1) - 2p$$

besitzen, die Kurve also aufser der Singularität im Unendlichen noch

$$\delta = \frac{1}{2}(n-1)(r+n-1) - p$$

weitere Doppelpunkte im Endlichen erhalten.

Erteilt man aber der Kurve diese δ Doppelpunkte, so erhält sie in der That das Geschlecht p; die Konstantenzahl reduziert sich aber hierdurch um δ, und die obige Gleichung enthält also alsdann nur noch

$$\sigma' - \delta = 2p - 3 + n - \varrho \tag{7}$$

wesentliche Konstanten. Wir haben so folgenden Satz gewonnen:

Es sei für ein algebraisches Gebilde vom Geschlechte p der zu einem Weierstrafs-Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ gehörige additive Modul $\mathfrak{M}$

der Ordnungszahlen bekannt und n die kleinste dieser Ordnungszahlen, $r + n$ aber die nächste, welche zu n relativ prim ist, und es stehe $r + n$ an $(h + 1)^{\text{ter}}$ Stelle des Moduls, so dafs

4a) $$h = r + n - p + \varrho = r + n - p + \left\{\frac{W}{p^{n+r}}\right\}$$

ist. Dann läfst sich das algebraische Gebilde in eine Normalform bringen, in welcher

7) $$2p - 3 + n - \varrho = p - 3 + 2n + r - h$$

wesentliche Konstanten auftreten.

Diese Zahl ist um $\varrho + 2$ kleiner als die Zahl der im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$.

Wir wollen jetzt diesen Satz in einer Reihe von Fällen zur Anwendung bringen. Besitzt das algebraische Gebilde keinerlei Besonderheit, ist also der Körper ein ordinärer, so ist, wie wir auf S. 494 festgestellt haben, für jeden Weierstrafs-Punkt der zugehörige additive Modul das System der Zahlen

$$0, \quad p, \quad p+2, \quad p+3, \quad p+4, \ldots$$

Also ist $n = p$, und wenn $p + r$ die kleinste zu p relativ prime Zahl des Systems ist, so ist die Stellenzahl $h = r$, also $\varrho = 0$. Folglich ist in diesem Falle die Zahl der Konstanten gleich $3p - 3$; ferner ist, wenn wir eine derartige Normalgleichung aufstellen, der Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ wirklich ein Weierstrafs-Punkt, weil das Geschlecht p und die Ordnung der Funktion x ebenfalls nur p ist. Das Gebilde genügt also bei unbestimmten Koeffizienten allen vorher gestellten Forderungen, und da die Funktionen x und y durch invariante Eigenschaften definiert sind, so können Gleichungen einer Klasse stets auf dieselbe Normalform gebracht werden. Wir erhalten somit aufs neue den Riemannschen Satz:

Wenn $p > 1$ ist, so ist für einen ordinären algebraischen Körper die Zahl der Moduln gleich $3p - 3$.

Anders liegt die Sache, wenn der Zahlenmodul $\mathfrak{M}$ besondere Eigenschaften hat. Ist z. B. für einen Weierstrafs-Punkt, wie vorher, p die kleinste vorhandene Ordnungszahl, lautet aber der Modul $\mathfrak{M}$:

$$0, \quad p, \quad p+1, \quad p+2, \ldots p+g-1, \quad p+g+1, \quad p+g+2, \ldots,$$

so dafs die Ordnungszahl $p + g > p + 1$ fehlt, so ist $n = p$, $r = 1$, also $h = 2$, und $\varrho = 1$, also ergiebt sich dann als Zahl der Moduln nur $3p - 4$.

Noch anders gestaltet sich diese Anzahl, wenn wir andere singuläre Vorkommnisse für die Weierstrafs-Punkte voraussetzen. Ist z. B. das

Gebilde ein hyperelliptisches, so ist für jeden der Weierstraſs-Punkte der Modul $\mathfrak{M}$ folgender:

$$0, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \ldots 2p, \quad 2p+1, \quad 2p+2, \quad 2p+3, \ldots,$$

also ist $n = 2$, $n + r = 2p + 1$, und $h = p + 1$, also $\varrho = 0$. Folglich ergiebt sich die Zahl der Moduln in Übereinstimmung mit dem Ergebnis des § 1 der vorigen Vorlesung gleich $2p - 1$. Die Normalgleichung der hyperelliptischen Gebilde, die man so erhält, wird, wie man leicht sieht, von der Form

8) $$y^2 = G(x),$$

wo x eine Funktion $(2p+1)^{\text{ten}}$ Grades ist; sie unterscheidet sich von der früheren nur dadurch, daſs einer der $2p + 2$ Verzweigungspunkte ins Unendliche verlegt ist.

Betrachten wir jetzt noch ein Gebilde, für welches ein Weierstraſs-Punkt mit der kleinsten Ordnungszahl drei vorhanden ist. Der Modul $\mathfrak{M}$ läſst sich dann, wie wir auf S. 495 sahen, in drei Klassen auflösen:

$$\begin{array}{llll} 0, & 3, & 6, & 9, \quad 12, \ldots \\ 3\mu_1 + 1, & 3\mu_1 + 4, & 3\mu_1 + 7, \ldots & \\ 3\mu_2 + 2, & 3\mu_2 + 5, & 3\mu_2 + 8, \ldots, & \end{array}$$

und es ist $p = \mu_1 + \mu_2$; diese beiden Zahlen sind aber nach den dortigen Gleichungen (4a) und (4b) an die Bedingungen gebunden, daſs

$$2\mu_1 \geqq \mu_2, \quad 2\mu_2 + 1 \geqq \mu_1$$

ist. Ist nun erstens

$$\mu_1 \leqq \mu_2,$$

so ist

$$n = 3, \quad n + r = 3\mu_1 + 1, \quad h = \mu_1 + 1,$$

also

$$\varrho = p - 2\mu_1 = \mu_2 - \mu_1.$$

Die Zahl der Moduln ist also

$$2p - (\mu_2 - \mu_1) = 3\mu_1 + \mu_2.$$

Ist aber zweitens

$$\mu_1 > \mu_2,$$

so ist

$$n = 3, \quad n + r = 3\mu_2 + 2, \quad h = \mu_2 + 1,$$

also

$$\varrho = p - 2\mu_2 - 1 = \mu_1 - \mu_2 - 1.$$

Die Zahl der Moduln ist somit

$$2p + 1 - (\mu_1 - \mu_2) = \mu_1 + 3\mu_2 + 1.$$

Wie man sieht, ergiebt die hier angewendete Methode ebenfalls mit ziemlicher Einfachheit die Anzahl der Invarianten eines ordinären Körpers von gegebenem Geschlechte p, und sie gestattet überdies, besser als das Verfahren der vorigen Vorlesung, die Normalgleichungen ohne übermäfsige Rechnung herzustellen, worauf wir aber hier im einzelnen nicht weiter eingehen. Hingegen scheint es nicht, dafs die Analyse spezieller Körper auf Grund der besonderen Eigentümlichkeiten für die Weierstrafs-Punkte besonders wertvolle Resultate ergiebt. Der Grund hierfür dürfte darin liegen, dafs die Untersuchung an eine zu wenig allgemeine und charakteristische Eigenschaft des Körpers anknüpft. Wir wollen daher im folgenden noch ein anderes Verfahren zur Aufstellung spezieller Klassen algebraischer Gebilde darlegen, welches für die Erkenntnis der charakteristischen Merkmale nicht ordinärer Körper besser geeignet zu sein scheint.

§ 3.

Da in einem Körper von positivem Geschlecht keine Funktionen erster Ordnung vorhanden sind, so liegt es nahe, die Funktionen niedrigster Ordnung, welche überhaupt existieren, zur Aufstellung der Normalgleichung zu verwenden (vgl. S. 247). Ist μ die Ordnung einer solchen Funktion x und A die Klasse des Zählers und Nenners von x, so besitzt dieselbe nach dem Satze auf S. 531 die Dimension zwei. Wir wollen zunächst die Frage entscheiden, wie grofs diese kleinste Ordnungszahl für einen Körper des Geschlechtes p höchstens werden kann und für einen ordinären Körper auch wirklich wird.

Da die Dimensionszahl

$$\{A\} = 2$$

ist, so können wir von einem ganzen Divisor

$$\mathfrak{A} = c\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{\mu-1}\,\mathfrak{P}_\mu$$

der Klasse A einen Primfaktor, z. B. $\mathfrak{P}_\mu$, von vornherein als willkürlich, aber fest gegeben annehmen, wodurch $\mathfrak{A}$ bis auf die Konstante c bestimmt sind. Ferner ist, wenn $B = \frac{W}{A}$ die Ergänzungsklasse von A bedeutet, nach dem Riemann-Rochschen Satze

$$\{B\} - \frac{1}{2}(2p - 2 - \mu) = \{A\} - \frac{\mu}{2},$$

also ist

$$\{B\} = \left\{\frac{W}{A}\right\} = p + 1 - \mu,$$

und ebenso grofs ist die Anzahl der linear unabhängigen Differentialteiler, welche Multipla von $\mathfrak{A}$ sind; die Zahl ist also um Eins gröfser,

als sie bei allgemeiner Auswahl des Divisors $\mathfrak{A}$ ausfallen würde (vgl. S. 318).

Wir bilden nun die Schar der Differentialteiler erster Gattung

$$\mathfrak{W}_1, \quad \mathfrak{W}_2, \ldots \mathfrak{W}_{p-1}, \quad \mathfrak{W}_p$$

und nehmen dieselbe, was (S. 487) statthaft ist, sogleich so normiert an, dafs die ersten $p-1$ Divisoren, nicht aber $\mathfrak{W}_p$ den gegebenen Faktor $\mathfrak{P}_\mu$ besitzen; die zugehörigen Differentiale seien

$$dw_1 = \varphi_1\, dz, \quad dw_2 = \varphi_2\, dz, \ldots dw_{p-1} = \varphi_{p-1}\, dz, \quad dw_p = \varphi_p\, dz,$$

wobei die Variable z so gewählt sein möge, dafs der zu dz gehörige Divisor für jeden der μ Primfaktoren von $\mathfrak{A}$ die Ordnungszahl Null hat. Da nun $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{p-1}$ bereits im Punkte $\mathfrak{P}_\mu$ verschwinden, so erhalten wir die durch $\mathfrak{A}$ teilbaren Divisoren der Klasse W durch Auflösung der $\mu-1$ linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
x_1\varphi_1(\mathfrak{P}_1) \quad + x_2\varphi_2(\mathfrak{P}_1) \quad + \cdots + x_{p-1}\varphi_{p-1}(\mathfrak{P}_1) = 0 \\
x_1\varphi_1(\mathfrak{P}_2) \quad + x_2\varphi_2(\mathfrak{P}_2) \quad + \cdots + x_{p-1}\varphi_{p-1}(\mathfrak{P}_2) = 0 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
x_1\varphi_1(\mathfrak{P}_{\mu-1}) + x_2\varphi_2(\mathfrak{P}_{\mu-1}) + \cdots + x_{p-1}\varphi_{p-1}(\mathfrak{P}_{\mu-1}) = 0.
\end{array}$$

Wären diese Gleichungen voneinander unabhängig, so gäbe es in W $(p-1)-(\mu-1) = p-\mu$ Multipla von $\mathfrak{A}$; da aber die Zahl dieser Differentialteiler um Eins gröfser sein soll, so mufs eine dieser Gleichungen eine Folge der übrigen sein; es mufs also der Rang der Matrix

$$\left\{\begin{array}{llllll}
\varphi_1(\mathfrak{P}_1), & \varphi_2(\mathfrak{P}_1), & \ldots \varphi_{\mu-2}(\mathfrak{P}_1), & \varphi_{\mu-1}(\mathfrak{P}_1), & \ldots \varphi_{p-1}(\mathfrak{P}_1) \\
\varphi_1(\mathfrak{P}_2), & \varphi_2(\mathfrak{P}_2), & \ldots \varphi_{\mu-2}(\mathfrak{P}_2), & \varphi_{\mu-1}(\mathfrak{P}_2), & \ldots \varphi_{p-1}(\mathfrak{P}_2) \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\varphi_1(\mathfrak{P}_{\mu-2}), & \varphi_2(\mathfrak{P}_{\mu-2}), & \ldots \varphi_{\mu-2}(\mathfrak{P}_{\mu-2}), & \varphi_{\mu-1}(\mathfrak{P}_{\mu-2}), & \ldots \varphi_{p-1}(\mathfrak{P}_{\mu-2}) \\
\varphi_1(\mathfrak{P}_{\mu-1}), & \varphi_2(\mathfrak{P}_{\mu-1}), & \ldots \varphi_{\mu-2}(\mathfrak{P}_{\mu-1}), & \varphi_{\mu-1}(\mathfrak{P}_{\mu-1}), & \ldots \varphi_{p-1}(\mathfrak{P}_{\mu-1})
\end{array}\right\}$$

genau gleich $\mu-2$ sein. Ist aber diese Bedingung für ein Punktsystem $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_{\mu-1}$ wirklich erfüllt, so besitzt umgekehrt die Klasse A des Divisors $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{\mu-1}\,\mathfrak{P}_\mu$ die Dimension zwei.

Nun mag in obiger Matrix die erste Determinante $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\Delta = |\varphi_g(\mathfrak{P}_h)| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots \mu-2)$$

von Null verschieden sein, und die aus ihr durch Ränderung hervorgehenden Determinanten $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mögen der Reihe nach mit $\Delta_{\mu-1}, \Delta_\mu, \ldots \Delta_{p-1}$ bezeichnet werden. Dann bilden nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie die $(p-\mu+1)$ Gleichungen

$$\Delta_{\mu-1} = 0, \quad \Delta_\mu = 0, \ldots \Delta_{p-1} = 0$$

zusammen mit der Ungleichung $\Delta \neq 0$ auch ein notwendiges und hinreichendes System von Bedingungen für die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_{\mu-1}$.

Es darf aber, wenigstens im allgemeinen, die Anzahl der Bedingungsgleichungen nicht gröfser als die Zahl der zu bestimmenden Punkte sein, und es mufs daher

$$p - \mu + 1 \leq \mu - 1,$$

also

$$\mu - 1 \geq \frac{p}{2}$$

sein. Daher finden wir für μ die ganze Zahl

$$\mu = \frac{p}{2} + 1 \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{p+3}{2},$$

je nachdem p gerade oder ungerade ist, und es ist diesen beiden Fällen entsprechend

$$p = 2\mu - 2 \quad \text{oder} \quad p = 2\mu - 3.$$

Im ersten Falle wird die Anzahl der Bedingungsgleichungen derjenigen der zu bestimmenden Punkte gleich, und es ergiebt sich alsdann nur eine endliche Anzahl von Klassen A der Dimension zwei; im zweiten ist die Zahl der Gleichungen um Eins gröfser als die der Unbekannten, und es giebt also einfach unendlich viele Divisorenklassen der gesuchten Beschaffenheit.

Stellen wir die Tabelle für p und μ auf:

$$\frac{p = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots}{\mu = 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ \ldots},$$

so finden wir das Resultat an den vollständig behandelten Fällen $p = 1$ bis $p = 4$ bestätigt; denn es ergeben sich für $p = 1$ und $p = 2$ unendlich viele, resp. eine einzige Klasse von Funktionen zweiter Ordnung, und ebenso für $p = 3$ und $p = 4$ unendlich viele, resp. eine endliche Anzahl Klassen von Funktionen dritter Ordnung.

Aber es bleibt zu beachten, dafs die erhaltene Bestimmung der Zahl μ nur „im allgemeinen", also bei ordinären Körpern gilt. Denn wir haben gesehen, dafs es für beliebig grofses Geschlecht Funktionen zweiter Ordnung geben kann, wenn nämlich der Körper hyperelliptisch ist; bei solcher Annahme ändert sich auch die Zahl der Moduln, und die Normalgleichung mufs durch eine andere ersetzt werden. Wir wollen jetzt noch einen Schritt weiter in dieser Untersuchung spezieller Körper gehen, indem wir für Körper beliebigen Geschlechtes den Fall diskutieren, dafs keine Funktionen zweiter, wohl aber solche dritter Ordnung existieren. Hierbei können wir jetzt $p \geq 5$ voraussetzen, da die Fälle $p = 3$ oder 4 in der neunundzwanzigsten Vorlesung behandelt sind.

§ 4.

Wenn in einem Körper K vom Geschlechte $p > 4$ eine Divisorenklasse A der Ordnung drei und der Dimension zwei vorhanden ist,

so ist sie stets die einzige Klasse dieser Beschaffenheit. Denn giebt es in einem Körper zwei verschiedene solche Klassen:

$$A = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') \quad \text{und} \quad B = (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'),$$

und bildet man die Funktionen

$$x = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} \quad \text{und} \quad y = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'},$$

so besteht zwischen diesen eine Gleichung:

$$F(x, y) = 0,$$

welche in jeder der beiden Variabeln vom dritten Grade ist. Diese Gleichung kann nicht reduktibel sein, denn sonst wäre die Funktion auf der linken Seite notwendig die dritte Potenz eines in x und y linearen Ausdruckes; folglich müfste y eine lineare Funktion von x sein:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

und die Klassen A und B wären also dieselben; das widerspricht aber der Annahme. Daher ist der Körper $K(x, y)$ mit dem gegebenen identisch, und wenn wir durch die Formel (6) auf S. 385

$$p = (m-1)(n-1) - d$$

das Geschlecht bestimmen, so erhalten wir, weil d nicht negativ sein kann und $m = n = 3$ ist, als Folge unserer Voraussetzung:

$$p \leqq 4.$$

Bei $p = 4$ giebt es nun, wie wir sahen, wirklich im allgemeinen noch zwei Klassen der Ordnung drei und der Dimension zwei; für $p > 4$ kann es aber in der That nur noch eine solche geben.

Bestimmen wir also vermöge der so eindeutig charakterisierten Divisorenklasse A eine Funktion dritter Ordnung

$$x = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}, \tag{1}$$

so sind alle anderen derselben Ordnung in der Formel enthalten:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

und eine derartige lineare Transformation entspricht nur einer Veränderung der Grunddivisoren der Klasse A. Die Ordnung des Verzweigungsteilers $\mathfrak{Z}_x$ ist

$$w = 2p + 4,$$

es giebt also in der Klasse A im allgemeinen w ganze Divisoren, welche durch Quadrate teilbar sind. Wählt man zwei solche als Zähler und Nenner von x':

$$\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{A}' = \mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2, \quad \gamma\mathfrak{A} + \delta\mathfrak{A}' = \mathfrak{P}_1'^2\mathfrak{P}_2',$$

so kann man hierdurch x' bis auf einen konstanten Faktor bestimmen. Wir wollen aber von solcher Normierung der Variabeln x vorläufig absehen und den Nenner $\mathfrak{A}'$ als aus drei verschiedenen Primteilern bestehend annehmen:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{P}_\infty^{(1)} \mathfrak{P}_\infty^{(2)} \mathfrak{P}_\infty^{(3)}.$$

Da uns für die Konstruktion der zweiten Funktion y des Körpers K keine weitere ausgezeichnete Divisorenklasse zur Verfügung steht, so bilden wir sie am besten mit Hilfe der Potenzen von A. Betrachten wir die Klasse A^ν, so finden sich in ihr stets die $\nu + 1$ ganzen Divisoren

$$\mathfrak{A}^\nu, \quad \mathfrak{A}^{\nu-1}\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A}^{\nu-2}\mathfrak{A}'^2, \ldots \mathfrak{A}'^\nu,$$

und diese sind voneinander linear unabhängig, weil binäre Formen in Linearfaktoren zerlegbar sind und daher eine homogene Relation ν^{ten} Grades zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ nicht bestehen kann, wenn nicht auch eine lineare vorhanden ist; das letztere ist aber ausgeschlossen. Die obigen $\nu + 1$ Divisoren bilden aber bei hinreichend grofsem ν noch kein Fundamentalsystem der Klasse A^ν; denn dann ergiebt sich für ihre Dimension

$$\{A^\nu\} = 3\nu - p + 1,$$

und diese Zahl ist für $\nu > \frac{p}{2}$ gröfser als $\nu + 1$. Es sei nun r der kleinste Exponent, für welchen

$$\{A^r\} > r + 1$$

ist; dann giebt es in der Klasse A^r mindestens $r + 2$ linear unabhängige ganze Divisoren

$$\mathfrak{A}^r, \quad \mathfrak{A}^{r-1}\mathfrak{A}', \ldots \mathfrak{A}'^r, \quad \mathfrak{A}_r, \tag{2}$$

und wenn wir alsdann die Funktion

$$y = \frac{\mathfrak{A}_r}{\mathfrak{A}'^r} \tag{3}$$

bilden, so können wir leicht zeigen, dafs der Körper $K(x, y)$ mit dem gegebenen identisch ist.

In der That besteht zwischen x und y eine bestimmte Gleichung vom dritten Grade in y:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \\ &= y^3 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0, \end{aligned}$$

worin die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 ganz sind, weil y eine ganze Funktion von x ist. Diese Gleichung ist irreduktibel; denn sonst wäre notwendig $F(x, y)$ die dritte Potenz eines in y linearen Ausdruckes

$$y - g(x);$$

es müfste also y eine ganze Funktion r^{ten} Grades von x von der Form

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_r x^r$$

sein, und wenn man hier für x und y die Divisorendarstellungen (1) und (3) einsetzt, so erhielte man eine lineare Relation zwischen den Divisoren der Reihe (2), was der Annahme widerspricht.

Um jetzt die Grade der Koeffizienten a_2, a_1, a_0 zu bestimmen, denken wir uns die Reihenentwickelungen der Funktion y für die Stelle $(x = \infty)$ aufgestellt. Da der Nenner $\mathfrak{A}'$ aus drei verschiedenen Primteilern bestehen sollte und die drei Blätter der Riemannschen Fläche also im Unendlichen unverzweigt sind, so erhalten wir drei konjugierte Reihen, welche nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreiten und von der Form sind:

$$y_1 = e_1 x^r + \cdots, \quad y_2 = e_2 x^r + \cdots, \quad y_3 = e_3 x^r + \cdots$$

Bildet man mit ihrer Hilfe die Funktionen $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$, so ergeben sich ihre Gradzahlen resp. gleich r, $2r$, $3r$, wobei aber die höchsten Koeffizienten nicht unbedingt von Null verschieden sein müssen.

Nun kann man ferner, ohne etwas wesentlich zu verändern, zu y eine beliebige ganze Funktion r^{ten} Grades hinzufügen und hierdurch erreichen, dafs der Koeffizient

$$a_2(x) = -S(y)$$

in Fortfall kommt. Die Normalgleichung kann also jetzt in der Form angenommen werden:

$$y^3 + a(x)y + b(x) = 0, \tag{4}$$

worin a und b ganze Funktionen von den Graden $2r$, resp. $3r$ sind.

Der vorher definierte Exponent r, der für diese Untersuchung von wesentlichster Bedeutung ist, kann noch auf anderem Wege bestimmt und erklärt werden. Fragen wir nämlich allgemein nach der Dimension einer Potenz A^ν, so ist diese Aufgabe nach § 4 der siebzehnten Vorlesung identisch mit der Bestimmung der vollständigen Schar der Funktionen mit dem Nenner $\mathfrak{A}'^{\nu}$, und wenn ν alle Werte durchläuft, so erhalten wir also die Gesamtheit aller ganzen Funktionen von x, d. i. das Ideal $I(1)$ des Körpers $K(x, y)$. Stellen wir nun nach den Regeln der vierzehnten Vorlesung ein Fundamentalsystem für dieses Ideal auf:

$$\xi^{(1)}, \quad \xi^{(2)}, \quad \xi^{(3)},$$

und nehmen dasselbe als normal für die Stelle $(x = \infty)$ an, so ist (vgl. S. 299) $\xi^{(1)} = 1$, und die Ordnungszahlen von $\xi^{(2)}$ und $\xi^{(3)}$ sind negativ und mögen daher mit $-\varrho_2$ und $-\varrho_3$ bezeichnet und nach der Gröfse geordnet sein.

Bilden wir nun die Schar der Funktionen mit dem Nenner $\mathfrak{A}'^{\nu}$, so haben wir drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem

$$1)\ \nu < \varrho_2, \quad 2)\ \varrho_2 \leqq \nu < \varrho_3, \quad 3)\ \nu \geqq \varrho_3$$

ist.

I. Ist $\nu < \varrho_2$, so ergiebt sich für jene Schar einfach das Fundamentalsystem

$$1, \quad x, \quad x^2, \dots x^{\nu},$$

es ist also

$$\{A^{\nu}\} = \nu + 1.$$

II. Ist $\varrho_2 \leqq \nu < \varrho_3$, so erhalten wir als Fundamentalsystem der Schar

$$1,\ x,\ x^2, , \dots x^{\nu}; \quad \xi^{(2)},\ x\xi^{(2)}, \dots x^{\nu-\varrho_2}\xi^{(2)},$$

folglich

$$\{A^{\nu}\} = 2(\nu + 1) - \varrho_2.$$

III. Ist $\nu \geqq \varrho_3$, so wird das Fundamentalsystem

$$1,\ x,\ x^2, \dots x^{\nu}; \quad \xi^{(2)},\ x\xi^{(2)}, \dots x^{\nu-\varrho_2}\xi^{(2)}; \quad \xi^{(3)},\ x\xi^{(3)}, \dots x^{\nu-\varrho_3}\xi^{(3)},$$

also

$$\{A^{\nu}\} = 3(\nu + 1) - \varrho_2 - \varrho_3.$$

Hieraus folgt, dafs der kleinste Exponent ν, für den

$$\{A^{\nu}\} > \nu + 1$$

ist, gleich ϱ_2, also die Zahl $r = \varrho_2$ ist; man kann daher auch die zweite Funktion $\xi^{(2)}$ des Fundamentalsystems einfach gleich y annehmen. Ferner ergiebt sich, da im dritten Falle die Dimension gleich $3\nu - p + 1$ sein mufs, für das Geschlecht p die Formel

$$p = \varrho_2 + \varrho_3 - 2,$$

oder, wenn wir jetzt ϱ_3 durch $r + s$ ersetzen:

$$5) \qquad p = 2r + s - 2.$$

Hierbei ist s nicht negativ, weil $\varrho_3 \geqq \varrho_2$ ist, und es ist ferner $s \leqq r$. Denn die Funktion y^2 hat den Nenner $\mathfrak{A}'^{2r}$, und hier würde, falls $s > r$ wäre, der Exponent $2r$ kleiner als $\varrho_3 = r + s$ sein; folglich ergäbe sich nach II) für die Funktion y^2 die Darstellung

$$y^2 = g_{2r}(x) + g_r(x)y,$$

worin die Indices die Grade der ganzen Funktionen $g(x)$ angeben. Eine solche Darstellung widerspricht aber der Irreduktibilität der Gleichung $F(x, y) = 0$, und es ist also in der That

$$6) \qquad 0 \leqq s \leqq r.$$

Hieraus ergiebt sich noch für den Exponenten r eine obere und eine untere Grenze:

$$\frac{p+2}{3} \leq r \leq \frac{p+2}{2},$$

wodurch die Anzahl der möglichen Werte von r auf ein ziemlich kleines Intervall von der Gröfse $\frac{p+2}{6}$ eingeschränkt wird; für $p=5$ kann z. B. nur $r=3$, für $p=6$ oder 7 nur $r=3$ oder 4 sein. Stets aber ist die Anzahl der Kombinationen (r, s), welche bei gegebenem Geschlecht der Gleichung (5) und der Ungleichung (6) genügen, eine endliche.

§ 5.

Wir denken uns jetzt zu gegebenem p eine mögliche Zahlenkombination (r, s) berechnet und fragen, welche Bedingungen die Koeffizienten a und b der Gleichung (4) des vorigen Abschnittes

$$1)\qquad \begin{gathered} y^3 + a(x)y + b(x) = 0 \\ a(x) = \lambda x^{2r} + \cdots, \quad b(x) = \mu x^{3r} + \cdots \end{gathered}$$

erfüllen müssen, damit das Geschlecht des Gebildes gleich p wird. Die Lösung dieser Aufgabe, nämlich die Bildung der Normalgleichung für diejenigen Körper des Geschlechtes p, welche auf dreiblättrige Flächen bezogen werden können, wollen wir unter der Einschränkung durchführen, dafs wir bei Bestimmung der Singularitäten des Gebildes die einfachsten unter den zulässigen Annahmen machen.

Die Diskriminante der Gleichung

$$D = -(y_1 - y_2)^2 (y_1 - y_3)^2 (y_2 - y_3)^2 = 4a^3 + 27b^2$$

ist vom Grade $6r$. Da aber die Zahl der Verzweigungspunkte nur

$$w = 2(p+2) = 2(2r+s)$$

ist, so mufs D nach dem Satze auf S. 395 aufser der Körperdiskriminante noch einen quadratischen Faktor X^2 enthalten, wo X vom Grade

$$2)\qquad \tau = 3r - \frac{w}{2} = r - s$$

ist. Der Divisor der Doppelpunkte ist also nach Ausscheidung der Primdivisoren $\mathfrak{P}_\infty$ von der Ordnung $2(r-s)$, und das Gebilde mufs also, wenn wir der Forderung in einfachster Weise genügen wollen, $r-s$ Doppelpunkte im Endlichen erhalten.

Dieses wichtige Resultat kann auch auf anderem Wege abgeleitet und überdies als hinreichende Bedingung erwiesen werden. Die drei Entwickelungen für $(x=\infty)$ lauteten

$$3)\qquad y_1 = e_1 x^r + \cdots, \quad y_2 = e_2 x^r + \cdots, \quad y_3 = e_3 x^r + \cdots,$$

wobei wir die Koeffizienten e_1, e_2, e_3 jetzt als verschieden annehmen können. Umgekehrt aber ergiebt die Anwendung des Diagramms

auf eine Gleichung der Form (1), daſs das erste Glied einer Reihenentwickelung für $(x = \infty)$ gleich cx^r ist, wo c der kubischen Gleichung

$$c^3 + \lambda c + \mu = 0$$

genügt, deren drei Wurzeln c_1, c_2, c_3 verschieden ausfallen, wenn nur $4\lambda^3 + 27\mu^2 \neq 0$ ist.

Zufolge dieser Gleichungen (3) besitzt aber das Gebilde bei $(x = \infty, y = \infty)$ eine bestimmte Singularität, denn bilden wir die Divisorengleichung (S. 382)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^m \mathfrak{n}_y^{n-2}},$$

so ist in unserem Falle $n = 3$, $m = 3r$, $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{n}_y = \mathfrak{A}'^r$, also

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{A}'^{4r}}.$$

Andererseits wird $\frac{\partial F}{\partial y}$ in jedem der drei Punkte $\mathfrak{P}_\infty^{(i)}$ in der $(2r)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich und besitzt also in der reduzierten Form den Nenner $\mathfrak{A}'^{2r}$; da aber alle Verzweigungspunkte ins Endliche fallen, so muſs $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{A}'^{2r}$ teilbar sein, und wir können daher setzen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}'^{2r}\mathfrak{D}_1, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{D}_1$ den Divisor der endlichen Doppelpunkte bedeutet. Als seine Ordnung ergiebt sich dann genau wie vorher $2\tau = 6r - w = 2(r - s)$.

Wir wollen jetzt die τ Doppelpunkte

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \ldots (\alpha_\tau, \beta_\tau)$$

als gegeben annehmen, so daſs die vorher eingeführte ganze Funktion

$$X(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_\tau)$$

bekannt ist. Um dann das allgemeinste Gebilde dieser Art wirklich zu konstruieren und damit die Herstellung der Normalgleichung zu vollenden, haben wir nur die Bedingung dafür festzustellen, daſs jeder Punkt (α_h, β_h) ein Doppelpunkt ist.

Da die Summe der drei konjugierten Funktionen y_1, y_2, y_3 verschwindet, so erhalten wir bei $(x = \alpha_h)$ drei Reihenentwickelungen der Form

$$\begin{aligned} y_1 &= \quad\beta_h + \gamma_h' (x - \alpha_h) + \cdots \\ y_2 &= \quad\beta_h + \gamma_h'' (x - \alpha_h) + \cdots \quad (\gamma_h' + \gamma_h'' + \gamma_h''' = 0). \\ y_3 &= -2\beta_h + \gamma_h''' (x - \alpha_h) + \cdots \end{aligned}$$

Folglich ist, wenn man nur bis zur ersten Potenz von $(x-\alpha_h)$ geht:

$$F(x,y) \equiv \big(y-\beta_h-\gamma_h'(x-\alpha_h)\big)\big(y-\beta_h-\gamma_h''(x-\alpha_h)\big)\big(y+2\beta_h-\gamma_h'''(x-\alpha_h)\big)$$
$$\big(\text{mod. } (x-\alpha_h)^2\big)$$

oder

$$5)\quad F(x,y) \equiv (y-\beta_h)^2(y+2\beta_h)+\lambda_h(x-\alpha_h)(y-\beta_h)\quad\big(\text{mod. } (x-\alpha_h)^2\big),$$

worin

$$\lambda_h = -\gamma_h'(y+2\beta_h)-\gamma_h''(y+2\beta_h)-\gamma_h'''(y-\beta_h) = 3\gamma_h'''\beta_h$$

eine Konstante ist. Diese kann aber beliebig gewählt werden, denn umgekehrt zeigt die Anwendung des Diagramms oder auch schon die Darlegungen auf S. 373, dafs das Gebilde, falls eine Kongruenz der Form (5) besteht, bei $(x=\alpha_h,\ y=\beta_h)$ einen Doppelpunkt erhält.

Durch die Kongruenz (5) werden nun, wenn die 3τ Gröfsen $\alpha_h, \beta_h, \lambda_h$ willkürlich gegeben sind, die ganzen Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ bis auf Vielfache von $X^2(x)$ bestimmt. In der That kann man zunächst die Relation (5) durch Vergleichung der einzelnen Potenzen von y in zwei Kongruenzensysteme für die Koeffizienten $a(x)$ und $b(x)$ auflösen:

$$5\text{a})\quad \begin{aligned} a(x) &\equiv -3\beta_h^2+\lambda_h(x-\alpha_h) &&\big(\text{mod. } (x-\alpha_h)^2\big)\\ b(x) &\equiv +2\beta_h^3-\lambda_h\beta_h(x-\alpha_h) &&\big(\text{mod. } (x-\alpha_h)^2\big). \end{aligned}$$

Zufolge der ersten Kongruenz ist nun $a(\alpha_h) = -3\beta_h^2$, also hat man nach der Lagrangeschen Interpolationsformel

$$a(x) \equiv -\sum_{h=1}^{\tau}\frac{3\beta_h^2}{X'(\alpha_h)}\,\frac{X(x)}{x-\alpha_h}\quad\big(\text{mod. } X(x)\big),$$

oder es ist, wenn man die Summe kurz durch $a_0(x)$ bezeichnet:

$$a(x) = a_0(x) + X(x)\,G(x),$$

wo $G(x)$ eine ganze Funktion bedeutet. Für diese ergiebt sich aber

$$G(\alpha_h) = \left(\frac{a(x)-a_0(x)}{X(x)}\right)_{x=\alpha_h} = \frac{a'(\alpha_h)-a_0'(\alpha_h)}{X'(\alpha_h)}$$

oder

$$G(\alpha_h) = \frac{\lambda_h - a_0'(\alpha_h)}{X'(\alpha_h)},$$

wodurch wiederum $G(x)$ bis auf ein Vielfaches von $X(x)$ bestimmt ist. Bestimmt man ebenso $b(x)$, so erhält man schliefslich:

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0(x) + a_1(x)\,X(x) + a_2(x)\,X(x)^2\\ b(x) &= b_0(x) + b_1(x)\,X(x) + b_2(x)\,X(x)^2, \end{aligned}$$

worin a_0, a_1, b_0, b_1 bestimmte Funktionen des Grades $\tau - 1$, a_2 und b_2 aber willkürliche ganze Funktionen des Grades $2r - 2\tau$, resp. $3r - 2\tau$ sind. Die Zahl der in der Gleichung (1) auftretenden Konstanten ist somit:

$$3\tau + (2r - 2\tau + 1) + (3r - 2\tau + 1) = 4r + s + 2.$$

Es bleibt nun noch übrig, zu bestimmen, wie viele dieser Konstanten sich durch Normierung der Variabeln x und y beseitigen lassen. Da die Klasse A eindeutig bestimmt ist, so kann die Variable x nur noch durch eine lineare gebrochene Funktion

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

ersetzt werden. Mag man nun die auf S. 553 angegebene Normierung wählen oder irgend eine andere, immer kann man auf diese Weise drei Konstanten der Normalgleichung in Fortfall bringen. Etwas weniger einfach liegen die Verhältnisse für die Funktion y, da wir hier zwei verschiedene Fälle unterscheiden müssen, je nachdem die Zahl s positiv oder Null ist.

Ist s positiv, so ist y bis auf einen konstanten Faktor durch die beiden Eigenschaften völlig bestimmt, dafs ihr Nenner gleich $\mathfrak{A}'^r$ und ihre Spur gleich Null ist. Denn in diesem Falle ist in der auf S. 555 gewählten Bezeichnung $\varrho_3 > \varrho_2$, also

$$\{A^r\} = r + 2,$$

und jede Funktion mit dem Nenner $\mathfrak{A}'^r$ ist in der Form enthalten:

$$my + g_r(x),$$

wo $g_r(x)$ eine ganze Funktion r^{ten} Grades ist; soll also ihre Spur verschwinden, so mufs $g_r(x) = 0$ sein. Daher kann man in der Normalgleichung nur noch y durch my ersetzen und die in ihr auftretenden $4r + s + 2$ Konstanten im ganzen um vier vermindern.

Ist aber $s = 0$, so ist y durch die obigen beiden Forderungen nicht bis auf eine Konstante festgelegt. Denn in der auf S. 556 durchgeführten Untersuchung fällt, weil $\varrho_3 = \varrho_2$ ist, die zweite Eventualität gänzlich aus und es ist

$$\{A^r\} = r + 3.$$

Die sämtlichen Funktionen mit dem Nenner $\mathfrak{A}'^r$ sind in der Formel enthalten:

$$\eta = my + m'y' + g_r(x),$$

wo $y' = \xi^{(3)}$ die dritte Funktion des obigen Fundamentalsystems ist, für welche ebenfalls $S(y') = 0$ angenommen werden kann. Soll also die Spur von η verschwinden, so mufs

$$\eta = my + m'y'$$

sein, und man kann also durch eine derartige Abänderung der abhängigen Variabeln noch zwei Konstanten in Fortfall bringen. Hierdurch verringert sich die Konstantenzahl in diesem Falle im ganzen um fünf. Jetzt aber haben wir offenbar alle möglichen Umformungen der Normalgleichung in Betracht gezogen, und wir erhalten somit den beiden unterschiedenen Möglichkeiten entsprechend

$$4r + s - 2 = p + 2r, \quad \text{resp.} \quad 4r - 3 = p + 2r - 1$$

wesentliche Konstanten oder Moduln. Bei geeigneter Normierung erhalten diese Konstanten für zwei algebraische Gebilde derselben Klasse gleiche Werte.

Wir erhalten somit folgenden Satz, in dem wir das Hauptresultat der Untersuchung zusammenfassen:

Wenn in einem Körper vom Geschlechte $p > 4$ keine Funktionen zweiter, wohl aber solche der dritten Ordnung existieren, so giebt es eine und nur eine Divisorenklasse A der Ordnung drei und der Dimension zwei und eine bestimmte Potenz von A mit möglichst niedrigem Exponenten r, deren Dimension gröfser als $r + 1$ ist. Setzt man dann

$$p = 2r + s - 2,$$

so ist

$$r \geqq s \geqq 0$$

und die Klasse des algebraischen Gebildes ist durch

$$p + 2r, \quad \text{resp.} \quad p + 2r - 1$$

Moduln oder Invarianten charakterisiert, je nachdem s positiv oder Null ist.

Es ist bemerkenswert, dafs bei den hier untersuchten algebraischen Gebilden, welche die speziellsten nächst den hyperelliptischen sind, die Zahl der Moduln nicht mehr blofs vom Geschlechte p, sondern noch von einer zweiten Invariante des Körpers, eben dem Exponenten r abhängt. Körper mit ungleichem r sind offenbar niemals ineinander transformierbar. Will man bei gegebenem Geschlechte die Zahl der Moduln möglichst grofs erhalten, so mufs man innerhalb der zulässigen Grenzen r möglichst grofs, also s möglichst klein annehmen. Zu diesem Zwecke hat man, da $p \equiv s \pmod{2}$ ist, $s = 0$ oder $= 1$ zu setzen, je nachdem p gerade oder ungerade wird. Dann wird $r = \frac{p}{2} + 1$, resp. $= \frac{p+1}{2}$, und die Zahl der Moduln wird in beiden Fällen gleich $2p + 1$. Wenn $s > 1$ ist, wird die Zahl der Moduln $< 2p + 1$.

Bei der Aufstellung der Normalgleichung haben wir die beiden Annahmen gemacht, dafs die Koeffizienten e_1, e_2, e_3 in (3) voneinander verschieden sind, also die Gleichungsdiskriminante D wirklich den Grad $6r$ besitzt, und dafs die Kurve im Endlichen nur gewöhnliche Doppelpunkte zu Singularitäten hat. Nur die zweite dieser Annahmen bedeutet eine wirkliche Einschränkung des Problems, denn die erste Forderung kann, wenn sie für eine Gleichung der Form (1) nicht von vornherein erfüllt ist, stets durch Ausführung der birationalen Transformation:

$$6)\qquad y' = \frac{y}{(\gamma x + \delta)^r}, \quad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

realisiert werden. Bei einer solchen Transformation tritt nämlich überall an die Stelle von $\mathfrak{A}' = \mathfrak{n}_x$ der Divisor $\mathfrak{B}' = \mathfrak{n}_{x'} = \mathfrak{z}_{\gamma x + \delta}$; wählt man also γ und δ so, dafs die Gleichung (1) für $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ drei verschiedene Wurzeln hat, so fallen auch die Anfangskoeffizienten in den Reihenentwickelungen von y' nach Potenzen von $\frac{1}{x'}$ verschieden aus. Durch die Transformation (6) wird in dem Divisor (4) nur die Potenz $\mathfrak{A}'^{2r}$ in $\mathfrak{B}'^{2r}$ verwandelt; der Divisor $\mathfrak{D}_1$ der endlichen Doppelpunkte bleibt bei ihr unverändert.

Zweiunddreifsigste Vorlesung.

Die Periodizitätseigenschaften der Abelschen Integrale. — Ziel und Plan der folgenden Untersuchung. — Funktionen mit einer Unendlichkeitsstelle und Integrale erster und zweiter Gattung. — Ihre Ordnungszahlen. — Algebraische Normierung der Fundamentalintegrale mit keiner oder einer Unstetigkeitsstelle. — Allgemeine Integrale zweiter Gattung. — Irreduktible Systeme und Fundamentalsysteme für die allgemeinen Integrale zweiter Gattung.

§ 1.

Wir kehren jetzt zu der Untersuchung der Periodizitätseigenschaften der Abelschen Integrale zurück, die wir in der einundzwanzigsten und zweiundzwanzigsten Vorlesung in Angriff genommen haben, und wollen nunmehr die damals erlangten Ergebnisse noch einmal vermöge einer ganz anderen und viel tiefer eindringenden Methode ableiten und sodann weiterführen.

Die damalige Herleitung hatte zum Fundamente die Kenntnis der Zusammenhangsverhältnisse und die Zerschneidung der Riemannschen Fläche. So einfach und folgenreich aber auch die a. a. O. auseinandergesetzten Hilfssätze der Analysis situs sind, so bringen diese doch ein dem Gegenstande fremdartiges Element in die Untersuchung hinein, so dafs an dieser Stelle der systematische Aufbau der Theorie der Abelschen Integrale nicht lückenlos und vollendet erscheint und einige der gewonnenen Resultate den Charakter des Unvollständigen oder auch Zufälligen erhalten. Es liegt dies daran, dafs die hier wesentlichen Eigenschaften der Riemannschen Fläche nur durch geometrische Theoreme erschlossen und dafs der Fundamentalbegriff „Ordnung des Zusammenhanges“ rein logisch durch den Hauptsatz 3 der Analysis situs auf S. 327 gewonnen worden ist. Hingegen fehlt an dieser Stelle das analytische Gerüst, durch welches es möglich wird, die Zusammenhangseigenschaften der Riemannschen Fläche auf Eigenschaften von Rechnungsausdrücken zu stützen und hierdurch eine unmittelbare Verbindung zwischen der Ordnungszahl des Zusammenhanges und der Zahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung herzustellen.

Aus diesem Grunde entsteht das Bedürfnis, neben dem vorher eingeschlagenen Wege auch durch direkte algebraische Methoden Ein-

blick in die Periodizität der Abelschen Integrale und die Zusammenhangsverhältnisse der Riemannschen Fläche zu gewinnen, oder — was auf ganz dasselbe hinauskommt — es erwächst uns die Aufgabe, diejenigen algebraischen Thatsachen festzustellen, welche den früher bewiesenen Sätzen der Analysis situs entsprechen und sie völlig zu ersetzen imstande sind. Wir werden zeigen, dafs das in der That möglich ist. Wir werden nämlich nach einigen in dieser Vorlesung gegebenen Vorbereitungen in den folgenden zuerst den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei Integralen dritter Gattung als rein algebraischen Satz erweisen, aus ihm sodann alle Periodeneigenschaften der Abelschen Integrale ableiten und hierdurch nun umgekehrt ein Verständnis der der Riemannschen Fläche eigentümlichen Zusammenhangsverhältnisse gewinnen. Bei dieser Anordnung des systematischen Aufbaus fallen die vorher grundlegenden geometrischen Sätze des § 2 der einundzwanzigsten Vorlesung ganz aus der Betrachtung aus.

Diesen Zielen entsprechend wollen wir, während wir früher die Integrale von vornherein durch ihre Periodeneigenschaften normiert haben, jetzt zuvörderst eine andere, algebraische Normierung der Integrale erster und zweiter Gattung zu Grunde legen und im Zusammenhange hiermit einige Vorbereitungssätze entwickeln, welche auch an und für sich von Interesse sind.

§ 2.

Zur Vereinfachung der folgenden Untersuchung gehen wir bei der Aufstellung der Integrale erster und zweiter Gattung sogleich von denjenigen Funktionen des Körpers aus, welche nur in einem übrigens beliebigen Punkte der Riemannschen Fläche unendlich werden. Es sei

$$z = \frac{\mathfrak{z}_z}{\mathfrak{P}_\infty^n}$$

eine derartige Funktion und ihr Pol $\mathfrak{P}_\infty$ von der n^{ten} Ordnung, so können wir nach den Darlegungen der sechzehnten Vorlesung z als unabhängige Variable für eine den Körper bestimmende Gleichung $F(u, z) = 0$ wählen und alle weiteren Betrachtungen auf diese Gleichung beziehen. Der Körper $K(z, u)$ ist alsdann, wie schon auf S. 540 flg. ausgeführt wurde, in Beziehung auf u vom n^{ten} Grade, und an der Stelle $(z = \infty)$ ergeben sich n konjugierte Reihenentwickelungen, welche nach ganzen Potenzen von $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ fortschreiten und alle aus einer

von ihnen abgeleitet werden können, indem man $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ durch $\omega\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ ersetzt, wobei ω eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Die n Blätter der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ hängen also im Unendlichen in einem einzigen Cyklus miteinander zusammen.

Die Gesamtheit derjenigen Funktionen, welche nur im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ unendlich werden, ist ein Ideal, nämlich das zu dem Divisor 1 gehörige Ideal $I(1)$ der ganzen Funktionen des Körpers $K(z, u)$. Stellen wir nun, wie auf S. 220, ein Fundamentalsystem für dieses Ideal auf und bezeichnen es mit einer unbedeutenden, für unsere Untersuchung zweckmäfsigen Modifikation durch

$$1)\qquad \xi^{(0)},\quad \xi^{(1)},\quad \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n-1)},$$

so können alle ganzen Funktionen ξ des Körpers auf eine und nur eine Weise in die Form gesetzt werden:

$$\xi = u_0\,\xi^{(0)} + u_1\,\xi^{(1)} + \cdots + u_{n-1}\,\xi^{(n-1)},$$

wobei $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ ganze rationale Funktionen von z bedeuten. Nehmen wir ferner das Fundamentalsystem als normal für die Stelle $(z=\infty)$ an, so müssen nach dem auf S. 173 bewiesenen Satze die reduzierten Kolonnenteiler des Systems der Konjugierten

$$\text{A)}\qquad \left\{\begin{matrix} \xi_1^{(0)}, & \xi_1^{(1)}, & \xi_1^{(2)}, & \ldots & \xi_1^{(n-1)} \\ \xi_2^{(0)}, & \xi_2^{(1)}, & \xi_2^{(2)}, & \ldots & \xi_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_n^{(0)}, & \xi_n^{(1)}, & \xi_n^{(2)}, & \ldots & \xi_n^{(n-1)}, \end{matrix}\right.$$

abgesehen von ihrer Reihenfolge mit den Potenzen

$$\left(\frac{1}{z}\right)^0, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{n}}, \ldots \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

übereinstimmen. Wir können und wollen nun die n Funktionen $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n-1)}$ in einer solchen Anordnung annehmen, dafs der Teiler von $\xi^{(h)}$ für die Stelle $(z=\infty)$ gleich

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{-\mu_h-\frac{h}{n}}$$

ist, wo μ_h ganzzahlig ist. Unter den n Zahlen

$$\mu_0, \quad \mu_1, \quad \mu_2, \ldots \mu_{n-1}$$

ist alsdann die erste μ_0 stets gleich Null, weil

$$\xi^{(0)} = 1$$

ist, während die übrigen Null oder positiv sind (vgl. S. 299), weil ja alle Elemente des Fundamentalsystems ganze Funktionen von z sind.

Bilden wir sodann zu dem Systeme (A) das komplementäre

$$\text{B)} \quad \begin{cases} \eta_1^{(0)}, & \eta_1^{(1)}, & \eta_1^{(2)}, & \ldots \eta_1^{(n-1)} \\ \eta_2^{(0)}, & \eta_2^{(1)}, & \eta_2^{(2)}, & \ldots \eta_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_n^{(0)}, & \eta_n^{(1)}, & \eta_n^{(2)}, & \ldots \eta_n^{(n-1)}, \end{cases}$$

so sind die Teiler der n Funktionen

$$\text{2)} \qquad \eta^{(0)}, \quad \eta^{(1)}, \quad \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n-1)}$$

an der Stelle $(z = \infty)$ der Reihe nach

$$\left(\frac{1}{z}\right)^0, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\mu_1 + \frac{1}{n}}, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\mu_2 + \frac{2}{n}}, \ldots \left(\frac{1}{z}\right)^{\mu_{n-1} + \frac{n-1}{n}}.$$

Nach einem früher bewiesenen Satze bilden alsdann die n Funktionen der Reihe (2) ebenfalls ein Fundamentalsystem für ein Ideal, welches nach dem Theoreme V auf S. 231 und der zu ihm gehörigen Anmerkung zu bestimmen ist. Der zur Variabeln z gehörige Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_z$ enthält nämlich den Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ genau in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und wir können daher zunächst

$$\mathfrak{Z}_z = \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{P}_\infty^{n-1}$$

setzen, wo $\mathfrak{Z}_0$ das Produkt aller der Potenzen $\mathfrak{P}^{a-1}$ ist, welche den im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten $\mathfrak{P}$ entsprechen. Da nun die Funktionen $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n-1)}$ ein Fundamentalsystem für das Ideal $I(1)$ sind und man bei der Bildung des komplementären Systems von denjenigen Primteilern abzusehen hat, welche unendlich fernen Verzweigungspunkten entsprechen, so sind die Funktionen (2) ein Fundamentalsystem für das Ideal $I\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_0}\right)$.

Bezeichnen wir ferner die Ordnung des Divisors $\mathfrak{Z}_0$ mit

$$w_0 = w_z - n + 1,$$

so ist nach den Ausführungen auf S. 214 die Summe aller positiven Ordnungszahlen der Determinante $|\xi_i^{(k)}|$ des ersten Fundamentalsystems gleich $\frac{w_0}{2}$; andererseits ergiebt sich aus den vorher angegebenen Kolonnenteilern für $(z = \infty)$ die Summe der negativen Ordnungszahlen gleich

$$-\left(\mu_1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\mu_2 + \frac{2}{n}\right) - \cdots - \left(\mu_{n-1} + \frac{n-1}{n}\right)$$
$$= -(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1}) - \frac{n-1}{2},$$

und da die Summe aller Ordnungszahlen Null ist, so erhält man die Relation

$$3) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1} = \frac{w_z}{2} - n + 1 = p.$$

Die Summe der ganzen Zahlen μ ist also gleich dem Geschlechte des Körpers.

Wir bestimmen jetzt das Verhalten der Funktionen des ersten Ideals im Unendlichen. Da in dem Fundamentalsysteme (1) das Element $\xi^{(h)}$ im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ in der Ordnung $\mu_h n + h$ unendlich wird, so sind die Ordnungen des Unendlichwerdens der Funktionen

$$\xi^{(h)}, \quad z\xi^{(h)}, \quad z^2\xi^{(h)}, \ldots z^{\nu_h}\xi^{(h)}, \ldots$$

der Reihe nach gleich

$$4) \quad \mu_h n + h, \quad (\mu_h + 1)n + h, \quad (\mu_h + 2)n + h, \ldots (\mu_h + \nu_h)n + h, \ldots,$$

also lauter verschiedene positive Zahlen, welche $\equiv h \pmod{n}$ sind. Bilden wir also diese Reihen für $h = 0, 1, 2, \ldots n-1$, so erhalten wir das System der vorhandenen Ordnungszahlen für die sämtlichen Funktionen des Ideals $I(1)$, und es fehlen in jeder Reihe kongruenter Zahlen genau μ_h, nämlich diejenigen, welche kleiner als die erste auftretende Ordnungszahl und positiv sind. Das System der fehlenden Ordnungszahlen besteht also aus den Elementen

$$5) \qquad h + n\gamma_h \quad (h = 1, 2, \ldots n-1;\ \gamma_h = 0, 1, \ldots \mu_h - 1)$$

oder

$$5a) \qquad \begin{cases} 1, & 1+n, \quad 1+2n, \ldots 1 + (\mu_1 - 1)n \\ 2, & 2+n, \quad 2+2n, \ldots 2 + (\mu_2 - 1)n \\ 3, & 3+n, \quad 3+2n, \ldots 3 + (\mu_3 - 1)n \\ \ldots & \ldots \\ n-1, & 2n-1, \quad 3n-1, \ldots \mu_{n-1}n - 1, \end{cases}$$

und ihre Anzahl ist gleich

$$p = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{n-1}.$$

Wir erhalten hiernach in genauer Übereinstimmung mit dem in der achtundzwanzigsten Vorlesung gewonnenen Resultate noch einmal den Satz*), dafs die Funktionen, welche nur in einem Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ der Riemannschen Fläche unendlich werden, alle Ordnungen besitzen können

*) Auch die Tabelle (4) steht in genauer Übereinstimmung mit der, welche in (2a) und (2b) auf S. 495 für das System der vorhandenen Ordnungszahlen gegeben wurde; ein sachlicher Unterschied besteht nur insofern, als hier n nicht als die kleinste vorhandene Ordnungszahl vorausgesetzt zu werden brauchte.

mit Ausnahme von p Zahlen, und dafs p gleich dem Geschlechte des Körpers, also unabhängig von der Auswahl des Punktes $\mathfrak{P}_\infty$ ist. Wir wollen uns nun ebenso wie auf S. 492 die p in der Tabelle (5) auftretenden Zahlen nach der Gröfse geordnet denken und in dieser natürlichen Reihenfolge mit

5b) $$\varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \varrho_3, \ldots \varrho_p$$

bezeichnen, so dafs die Tabellen (5a) und (5b) aus denselben Elementen bestehen.

Wir wollen jetzt mit Hilfe des Ideals $I\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_0}\right)$ die Integrale erster und zweiter Gattung des Körpers aufstellen. Da dem Differentiale dz der Divisor

$$\frac{\mathfrak{Z}_z}{\mathfrak{n}_z^2} = \frac{\mathfrak{Z}_0 \mathfrak{P}_\infty^{n-1}}{\mathfrak{P}_\infty^{2n}} = \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{P}_\infty^{n+1}}$$

zugeordnet ist, so besitzt der Teiler eines Differentials

$$d\omega = \eta\, dz$$

dann und nur dann eine Potenz $\mathfrak{P}_\infty^\varrho$ als Nenner, wenn die Funktion η dem Ideale $I\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_0}\right)$ angehört. Hat η in $\mathfrak{P}_\infty$ die Ordnungszahl λ, so hat der Differentialteiler $\mathfrak{w}_\omega$ von $d\omega$ die Ordnungszahl $\lambda - n - 1$, das Integral

$$\omega = \int \eta\, dz$$

also nach dem Satze auf S. 296 die Ordnungszahl $\lambda - n$; hierbei brauchen wir den besonderen Fall $\lambda = n$, der auf Logarithmen führen würde, nicht erst zu berücksichtigen, da ein Integral mit einer einzigen Unstetigkeitsstelle $\mathfrak{P}_\infty$ nicht logarithmisch unendlich werden kann. Ist also λ positiv und gröfser als n, so ist das Integral von der ersten Gattung und wird in $\mathfrak{P}_\infty$ in $(\lambda - n)^{\text{ter}}$ Ordnung Null, vorausgesetzt dass man diesen Punkt als untere Grenze des Integrals annimmt und hierdurch das konstante Glied der Reihenentwickelung bei $(z = \infty)$ zum Fortfall bringt; ist aber $\lambda < n$, so ist es von der zweiten Gattung und wird in $\mathfrak{P}_\infty$ in $(n - \lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich.

Bilden wir zuvörderst die Integrale erster Gattung, so haben wir, im wesentlichen ebenso wie auf S. 300, alle diejenigen Funktionen $z^{\alpha_h} \eta^{(h)}$ zu bestimmen, für welche α_h nicht negativ und die Ordnungszahl in $\mathfrak{P}_\infty$

$$\lambda = n\mu_h + h - n\alpha_h$$

gröfser als n ist. Da $\mu_0 = 0$ ist, so scheidet der Index $h = 0$ aus, und für die übrigen Werte von h erhält man die Bedingung

$$\alpha_h \leqq \mu_h - 1;$$

ist diese aber erfüllt, so verschwindet das Integral

$$\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} z^{\alpha_h} \eta^{(h)} dz$$

in $\mathfrak{P}_\infty$ in der Ordnung

$$\lambda - n = n(\mu_h - 1 - \alpha_h) + h.$$

Daher erhalten wir die folgenden p Integrale erster Gattung:

$$7)\quad \begin{cases} \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} z^{\mu_1 - 1} \eta^{(1)} dz, & \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} z^{\mu_1 - 2} \eta^{(1)} dz, & \ldots \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} \eta^{(1)} dz \\ \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} z^{\mu_2 - 1} \eta^{(2)} dz, & \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} z^{\mu_2 - 2} \eta^{(2)} dz, & \ldots \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} \eta^{(2)} dz \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} z^{\mu_{n-1} - 1} \eta^{(n-1)} dz, & \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} z^{\mu_{n-1} - 2} \eta^{(n-1)} dz, & \ldots \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} \eta^{(n-1)} dz, \end{cases}$$

wobei die h^{te} Reihe dieser Integrale in Fortfall kommt, falls etwa die Zahl $\mu_h = 0$ ist. Die Ordnungszahlen dieser Integrale im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ sind auch der Reihenfolge nach gerade die p Zahlen, welche in der Tabelle (5a) enthalten sind; und wir gelangen daher zu folgendem Theoreme, durch welches der Satz auf S. 492 bestätigt und vervollständigt wird:

> Stellt man die sämtlichen Funktionen des Körpers auf, welche nur in einem beliebig gegebenen Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ unendlich werden, so treten nicht sämtliche positive Zahlen als Ordnungen dieser Funktionen auf, sondern es fehlen so viele, als es verschiedene Integrale erster Gattung giebt. Bezeichnet man diese fehlenden Ordnungszahlen nach der Gröfse geordnet mit
>
> $$\varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \varrho_3, \cdots \varrho_p,$$
>
> so kann man die p Integrale erster Gattung
>
> $$w_1, \quad w_2, \quad w_3, \ldots w_p$$
>
> stets so normieren, dafs w_i in $\mathfrak{P}_\infty$ die Ordnungszahl ϱ_i besitzt.

Die Integrale der Tabelle (7) müssen somit bei Einführung dieser Bezeichnung ganz ebenso umgeordnet werden, wie ihre Ordnungszahlen beim Übergange von der Tabelle (5a) zu (5b).

Während wir also in der zweiundzwanzigsten Vorlesung die Integrale erster Gattung durch ihre Perioden bestimmt haben, legen wir hier eine algebraische Normierung dieser Integrale zu Grunde.

Jene Normierung setzt die Zerschneidung der Riemannschen Fläche bereits als gegeben voraus und fällt also verschieden je nach der Art der Ausführung derselben aus; die jetzige hingegen setzt keine Kenntnis der Zusammenhangsverhältnisse der Riemannschen Fläche voraus, dafür bezieht sie aber die Integrale auf eine bestimmte Variable z des Körpers. Sie kann daher als Normierung in Beziehung auf die unabhängige Variable z bezeichnet werden und ist von der Auswahl derselben abhängig.

Übrigens sind die Integrale w_i nur insoweit bestimmt, dafs das erste Glied der Reihenentwickelung im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ gegeben ist, und es kann daher zu dem Integrale w_i noch eine lineare Kombination der folgenden Integrale $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots w_p$ hinzugefügt werden. Diese Unbestimmtheit kann dann, wenn es zweckmäfsig sein sollte, z. B. durch die Festsetzung gehoben werden, dafs in der Reihenentwickelung des Integrals w_i im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ von den in der Tabelle (5) enthaltenen Zahlen nur die Zahl ϱ_i in den Exponenten vorkommen, die gröfseren Exponenten $\varrho_{i+1}, \ldots \varrho_p$ aber fortfallen sollen, denn dies ist durch Subtraktion geeigneter Multipla von $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots w_p$ stets und nur auf eine Weise erreichbar; hierdurch ist dann das Integral w_i eindeutig bestimmt.

Wenden wir uns jetzt zur Aufstellung der sämtlichen Integrale zweiter Gattung mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}_\infty$, so haben wir in dem Produkte $z^{\alpha_h}\eta^{(h)}$ den Exponenten $\alpha_h \geqq \mu_h$ zu wählen und setzen daher

$$\alpha_h = \mu_h + \beta_h \qquad (\beta_h = 0, 1, 2, \ldots).$$

Der Integrand besitzt also in $\mathfrak{P}_\infty$ die Ordnungszahl

$$\lambda = -n\beta_h + h,$$

und das zugehörige Integral

$$\int z^{\mu_h+\beta_h}\eta^{(h)}dz \tag{8}$$

wird in der Ordnung

$$n - \lambda = n\beta_h + (n-h)$$

unendlich. Durch Vergleichung mit der Reihe (4) ergiebt sich also, dafs wir für

$$\beta_h < \mu_{n-h}$$

diejenigen Integrale zweiter Gattung erhalten, deren Ordnungszahlen in der Tabelle (5) enthalten sind und welche daher auf algebraische Funktionen nicht zurückgeführt werden können. Nehmen wir hingegen

$$\beta_h \geqq \mu_{n-h},$$

so besitzt das Integral (8) in $\mathfrak{P}_\infty$ dieselbe Ordnung des Unendlichwerdens wie die Funktion

$$z^{\beta_h-\mu_{n-h}}\xi^{(n-h)};$$

die letzteren Integrale können also durch geeignete Funktionen des Ideals $I(1)$ ersetzt werden, während die ersteren die eigentlichen Integrale zweiter Gattung sind.

Wir erhalten somit die folgenden p eigentlichen Integrale zweiter Gattung:

$$9)\left\{\begin{array}{lll}\int z^{\mu_{n-1}}\eta^{(n-1)}dz, & \int z^{\mu_{n-1}+1}\eta^{(n-1)}dz, \dots & \int z^{\mu_{n-1}+\mu_1-1}\eta^{(n-1)}dz \\ \int z^{\mu_{n-2}}\eta^{(n-2)}dz, & \int z^{\mu_{n-2}+1}\eta^{(n-2)}dz, \dots & \int z^{\mu_{n-2}+\mu_2-1}\eta^{(n-2)}dz \\ \dots & \dots & \dots \\ \int z^{\mu_1}\eta^{(1)}dz, & \int z^{\mu_1+1}\eta^{(1)}dz, \dots & \int z^{\mu_1+\mu_{n-1}-1}\eta^{(1)}dz,\end{array}\right.$$

deren Ordnungszahlen in $\mathfrak{P}_\infty$ wieder auch der Reihenfolge nach die Zahlen der Tabelle (5) sind und welche also, wenn man von ihrer Reihenfolge absieht, mit den Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_p$ übereinstimmen. Wir bezeichnen diese Integrale von nun ab in passender Anordnung mit

$$t_1, \quad t_2, \dots t_p$$

und setzen analog wie bei den Integralen erster Gattung fest, dafs t_i dasjenige Integral zweiter Gattung sein soll, welches in $\mathfrak{P}_\infty$ in der Ordnung ϱ_i unendlich wird. Durch diese Festsetzung werden die beiden Integrale erster resp. zweiter Gattung

$$10)\ w_i=\int z^{\mu_h-1-\gamma_h}\eta^{(h)}dz \quad \text{und} \quad t_i=\int z^{\mu_{n-h}+\gamma_h}\eta^{(n-h)}dz \quad (0\leq\gamma_h<\mu_h)$$

einander zugeordnet, welche beide in der Ordnung

$$10\,\text{a})\qquad \varrho_i=n\gamma_h+h$$

Null, resp. unendlich werden; das Produkt $w_i t_i$ besitzt also im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ einen endlichen von Null verschiedenen Wert.

Die übrigen Integrale zweiter Gattung sind hingegen, wie bereits bewiesen wurde, durch Funktionen des Körpers ersetzbar, welche in derselben Ordnung in $\mathfrak{P}_\infty$ unendlich werden. Man kann daher jedes beliebige Integral zweiter Gattung mit dem Pole $\mathfrak{P}_\infty$, indem man den Hauptteil der Reihenentwickelung in der Umgebung von $\mathfrak{P}_\infty$ successive durch Subtraktion entweder eines Vielfachen von t_i oder einer Funktion des Ideals $I(1)$ in Fortfall bringt, auf ein Integral erster Gattung,

also auf eine Summe der Form $\Sigma c_i w_i$ reduzieren. Jedes derartige Integral läfst sich also in die Normalform

$$c_1 t_1 + \cdots + c_p t_p + c_{p+1} w_1 + \cdots + c_{2p} w_p + v_0 \xi^{(0)} + v_1 \xi^{(1)} \cdots + v_{n-1} \xi^{(n-1)}$$

setzen, wo $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ ganze rationale Funktionen von z bedeuten, und wir erhalten somit den folgenden Satz, den wir bald noch erweitern werden:

> Jedes Integral zweiter Gattung mit dem Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{P}_\infty$ kann durch Subtraktion einer linearen Verbindung der $2p$ Hauptintegrale
>
> $$t_1, \quad t_2, \ldots t_p, \quad w_1, \quad w_2, \ldots w_p$$
>
> auf eine ganze Funktion des Körpers $K(z, u)$ reduziert werden.

Überblicken wir jetzt noch einmal das System der Integrale und Funktionen, welche nur in $\mathfrak{P}_\infty$ einen Pol haben, so ist es klar, dafs wir auch diese in eindeutiger Weise durch ihre Reihenentwickelung im Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ normieren können. Haben wir zunächst eine Funktion des Körpers mit dem r-fachen Pole $\mathfrak{P}_\infty$, so können wir offenbar in der Reihenentwickelung für $(z = \infty)$ den Koeffizienten von $\left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{r}{n}}$ gleich Eins annehmen und durch Hinzufügung von Funktionen niedrigerer Ordnung alle übrigen Glieder des Hauptteils fortschaffen mit Ausnahme derjenigen, deren Exponenten Zahlen der Tabelle (5) sind, weil diesen Ordnungszahlen nicht Funktionen, sondern Integrale entsprechen. Da die Funktionen

$$\xi^{(0)}, \quad \xi^{(1)}, \quad \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n-1)}$$

des Fundamentalsystems in dieser Klasse mit enthalten sind, so können wir auch diese so normiert annehmen, dafs ihr Hauptteil den oben aufgestellten Bedingungen genügt, und hierdurch das Fundamentalsystem eindeutig bestimmen.

Wollen wir alsdann die eigentlichen Integrale t_i normieren, so können wir ihren Hauptteil

$$c_{\varrho_i} z^{\frac{\varrho_i}{n}} + c_{\varrho_i - 1} z^{\frac{\varrho_i - 1}{n}} + \cdots + c_1 z^{\frac{1}{n}}$$

willkürlich annehmen, wodurch sie erst bis auf Integrale erster Gattung bestimmt werden. Die für unsere Zwecke geeignetste Normierung der Fundamentalintegrale zweiter Gattung behalten wir uns noch vor.

§ 3.

Nicht blofs die Integrale mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}_\infty$, sondern überhaupt alle Integrale, welche aus dem Körper $K(z, u)$ hervorgehen

und nur algebraische Unstetigkeiten besitzen, können als Summe einer Funktion des Körpers und einer linearen Verbindung der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots t_p, w_1, w_2, \ldots w_p$ dargestellt werden. In der That, ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger von $\mathfrak{P}_\infty$ verschiedener Punkt der Riemannschen Fläche, so besitzen die Klassen, welche durch die Divisoren

$$\mathfrak{P}_\infty^r, \quad \mathfrak{P}_\infty^r \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}_\infty^r \mathfrak{P}^2, \quad \mathfrak{P}_\infty^r \mathfrak{P}^3, \ldots$$

bestimmt sind, wenn $r > 2(p-1)$ ist, der Reihe nach folgende Dimensionszahlen

$$r-p+1, \quad r-p+2, \quad r-p+3, \quad r-p+4, \ldots$$

Da nämlich die Ordnung aller dieser Klassen $> 2p-2$ ist, so sind ihre Ergänzungsklassen von negativer Ordnung, und folglich ergiebt der Riemann-Rochsche Satz, wenn P_∞ und P die Klassen von $\mathfrak{P}_\infty$ und $\mathfrak{P}$ bedeuten:

$$1) \qquad \{P^r P^s\} = r - p + s + 1.$$

Ist also s eine beliebige positive Zahl, so giebt es auch stets Funktionen des Körpers mit dem Nenner $\mathfrak{P}_\infty^r \mathfrak{P}^s$, für welche die Ordnungszahl in $\mathfrak{P}$ auch wirklich genau gleich $-s$ ist; denn würden Zähler und Nenner dieser sämtlichen Funktionen den gemeinsamen Teiler $\mathfrak{P}$ haben, so würden die Dimensionen der aufeinanderfolgenden Klassen $P_\infty^r P^{s-1}$ und $P_\infty^r P^s$ gleich sein müssen, was der obigen Formel (1) widerspricht. Besitzt also ein Abelsches Integral t außer bei $\mathfrak{P}_\infty$ noch Pole von beliebig hoher Ordnung bei $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_h$, so können wir die von den letzteren herrührenden Unstetigkeiten successive fortschaffen, indem wir algebraische Funktionen mit dem Nenner $\mathfrak{P}_\infty^r \mathfrak{P}_i^{s_i}$ abziehen. Wir behalten dann ein Integral mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}_\infty$ übrig und können auf dieses den zuletzt bewiesenen Satz anwenden. Das Integral t ist also in folgender Form darstellbar:

$$t = c_1 t_1 + \cdots + c_p t_p + c_{p+1} w_1 + \cdots + c_{2p} w_p + \varphi(z, u),$$

wo $\varphi(z, u)$ eine Funktion des Körpers bezeichnet.

Diese Darstellung ist überdies trotz der Willkür, welche dem vorher beschriebenen Verfahren anhaftet, eindeutig bestimmt. Denn gäbe es noch eine zweite

$$t = \overline{c}_1 t_1 + \cdots + \overline{c}_p t_p + \overline{c}_{p+1} w_1 + \cdots + \overline{c}_{2p} w_p + \overline{\varphi}(z, u),$$

so wäre die Differenz

$$(\overline{c}_1 - c_1) t_1 + \cdots + (\overline{c}_p - c_p) t_p + (\overline{c}_{p+1} - c_{p+1}) w_1 + \cdots + (\overline{c}_{2p} - c_{2p}) w_p$$

eine Funktion des Körpers; eine lineare Verbindung der $2p$ Fundamentalintegrale gehört aber, wie wir gesehen haben, niemals dem Körper an, es sei denn, dafs alle Koeffizienten Null sind; dann aber ist $\bar{c}_h = c_h$ und $\bar{\varphi}(z, u) = \varphi(z, u)$. Wir erhalten also folgenden Satz:

> Jedes Integral mit nur polaren Unstetigkeiten ist auf eine und nur eine Weise als Summe einer Funktion des Körpers und einer linearen homogenen Verbindung der $2p$ Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung
>
> $$2)\qquad t_1,\quad t_2, \ldots t_p,\quad w_1,\quad w_2, \ldots w_p$$
>
> darstellbar. Man bezeichnet daher die Reihe (2) als ein Fundamentalsystem für die allgemeinen Integrale zweiter Gattung.

Dieser Satz ist für die Folge sehr wichtig. Er giebt unmittelbaren und vollständigen Aufschlufs darüber, in welcher Art der Funktionenbereich erweitert wird, wenn wir, ebenso wie in § 3 der zweiundzwanzigsten Vorlesung, zu den in dem Körper $K(z, u)$ enthaltenen Funktionen noch die Integrale mit nur algebraischen Unstetigkeiten hinzunehmen; es tritt nämlich nur noch eine mit beliebigen Koeffizienten gebildete lineare homogene Verbindung von $2p$ dem Körper K nicht angehörigen und darum transcendenten Funktionen als Zusatzgröfse hinzu. Führen wir jetzt und in der Folge für die Integrale erster Gattung, wenn sie gleichmäfsig mit denen der zweiten Gattung auftreten, die Bezeichnung ein:

$$2\text{a})\qquad t_{p+1} = w_1,\quad t_{p+2} = w_2, \ldots t_{2p} = w_p,$$

so hat das System der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, \ldots t_p, t_{p+1}, \ldots t_{2p}$ die charakteristische Eigenschaft, dafs eine lineare homogene Funktion von ihnen niemals eine Funktion des Körpers sein kann.

Es soll nun allgemein ein System von beliebig vielen Integralen mit nur polaren Unstetigkeiten ein irreduktibles System von Integralen zweiter Gattung genannt werden, wenn keine lineare Verbindung von ihnen gleich einer Funktion des Körpers ist; hierbei ist die Bezeichnung „zweiter Gattung“ in der auch schon früher angewendeten allgemeineren Bedeutung des Wortes gebraucht. Sind aber $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\sigma$ σ beliebige Integrale zweiter Gattung, so bestehen die Gleichungen

$$3)\qquad \begin{aligned} \tau_1 &= c_{11} t_1 + \cdots + c_{1,2p} t_{2p} + \varphi_1(z, u) \\ \tau_2 &= c_{21} t_1 + \cdots + c_{2,2p} t_{2p} + \varphi_2(z, u) \\ &\vdots \\ \tau_\sigma &= c_{\sigma,1} t_1 + \cdots + c_{\sigma,2p} t_{2p} + \varphi_\sigma(z, u), \end{aligned}$$

worin die Koeffizienten c und die Funktionen φ eindeutig bestimmt sind. Ein derartiges System ist daher reduktibel oder irreduktibel, je nachdem die $2p$ linearen homogenen Gleichungen

$$c_{1h}x_1 + c_{2h}x_2 + \cdots + c_{\sigma h}x_\sigma = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots 2p)$$

eine eigentliche Lösung $x_1, x_2, \ldots x_\sigma$ besitzen oder nicht; denn dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs das Integral

$$\tau = x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + \cdots + x_\sigma\tau_\sigma$$

eine Funktion des Körpers ist. Das System ist also auch reduktibel oder irreduktibel, je nachdem der Rang der Matrix

$$(c_{\alpha h}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots \sigma \\ h = 1, 2, \ldots 2p \end{pmatrix}$$

kleiner als σ oder gleich σ ist, und der letztere Fall kann nur eintreten, wenn $\sigma \leqq 2p$ ist. Ist nun $\sigma < 2p$, so wird durch die linearen Funktionen von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\sigma$, auch wenn das System irreduktibel ist, noch nicht die Gesamtheit der Integrale zweiter Gattung erschöpft; besteht aber das irreduktible System aus $\sigma = 2p$ Elementen, so lassen sich auch umgekehrt $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$, also auch alle Integrale zweiter Gattung, bis auf Gröſsen des Körpers als lineare Funktionen von $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{2p}$ darstellen, wie sich unmittelbar durch Auflösung des Gleichungssystems (3) ergiebt. Ein solches irreduktibles System von möglichst vielen Integralen ist also auch ein Fundamentalsystem für die Integrale zweiter Gattung, und es gilt der Satz:

> Jedes System von Integralen mit nur polaren Unstetigkeiten bildet dann und nur dann ein Fundamentalsystem für die allgemeinen Integrale zweiter Gattung, wenn es irreduktibel und die Anzahl seiner Elemente möglichst groſs, nämlich gleich $2p$ ist.

Demzufolge läſst sich ein Fundamentalsystem für die allgemeinen Integrale zweiter Gattung in mannigfachster Weise herstellen, und jedes derartige System kann für die nachfolgenden Untersuchungen benutzt werden. Ist z. B.

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\nu_1}\mathfrak{P}_2^{\nu_2}\ldots\mathfrak{P}_h^{\nu_h}$$

ein beliebiger ganzer Divisor der Ordnung p, dessen Klasse Q die Dimension eins hat (vgl. S. 318), so giebt es genau $2p$ linear unabhängige Integrale, für welche der Nenner des dem Integrale zugehörigen Divisors gleich $\mathfrak{Q}$ oder einem Teiler von $\mathfrak{Q}$ ist, und diese bilden ein Fundamentalsystem. Denn nach den Ausführungen des § 3 der zwanzigsten Vorlesung giebt es p verschiedene Elementarintegrale

zweiter Gattung, welche die gegebenen Pole besitzen, nämlich diejenigen, für welche die Nenner der zugehörigen Differentialteiler die folgenden sind:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1^2, \quad \mathfrak{P}_1^3, \dots \mathfrak{P}_1^{\nu_1+1} \\ \mathfrak{P}_2^2, \quad \mathfrak{P}_2^3, \dots \mathfrak{P}_2^{\nu_2+1} \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{P}_h^2, \quad \mathfrak{P}_h^3, \dots \mathfrak{P}_h^{\nu_h+1} \end{array}$$

und diese bilden mit den p Integralen erster Gattung zusammen ein Fundamentalsystem, weil $\{Q\} = 1$ ist und es also keine eigentliche Funktion des Körpers mit dem Nenner $\mathfrak{Q}$ giebt. Für die Ziele, welche wir hier im Auge haben, erweist sich aber das oben eingeführte Fundamentalsystem $t_1, t_2, \dots t_{2p}$ als besonders zweckmäfsig.

Durch die Ausführungen dieser Vorlesung haben wir auf algebraischem Wege eine vollständige Beherrschung des Gebietes der Integrale erster und zweiter Gattung gewonnen; wir gehen nunmehr in der folgenden zur Aufstellung und Untersuchung derjenigen von dritter Gattung über.

Dreiunddreifsigste Vorlesung.

Das Integral dritter Gattung mit zwei beliebigen Unstetigkeitsstellen. — Durch Differentiation nach einem Parameter erhält man das Integral zweiter Gattung mit einem beliebigen Pole erster Ordnung. — Differentiale zweiter Gattung, welche Vertauschung von Parameter und Argument gestatten. — Durchführung der Rechnung für den Vertauschungssatz beim hyperelliptischen Gebilde.

§ 1.

Da die beiden im vorigen Kapitel aufgestellten Fundamentalsysteme $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n-1)}$ und $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n-1)}$ komplementär sind, so gelten die Gleichungen:

$$1) \qquad \xi_i^{(0)}\eta_k^{(0)} + \xi_i^{(1)}\eta_k^{(1)} + \cdots + \xi_i^{(n-1)}\eta_k^{(n-1)} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

worin $\delta_{ik} = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind und $\xi_i^{(h)}, \eta_k^{(h)}$ die i^{te} und die k^{te} der n konjugierten Reihenentwickelungen der Funktionen $\xi^{(h)}$ und $\eta^{(h)}$ für eine beliebige Stelle der unabhängigen Variabeln z bedeuten. Insbesondere ergiebt sich aus den für $k = i$ geltenden Gleichungen

$$2) \qquad \xi^{(0)}\eta^{(0)} + \xi^{(1)}\eta^{(1)} + \cdots + \xi^{(n-1)}\eta^{(n-1)} = 1;$$

denn diese Relation ist für jede beliebige Entwickelung an irgend einer Stelle der Riemannschen Fläche und daher identisch erfüllt.

Es mögen nun die obigen Funktionen in einem beliebigen endlichen Punkte $\mathfrak{P}$, der etwa ein a-blättriger Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ sein möge, folgende Entwickelungen besitzen:

$$3) \left\{\begin{array}{ll|ll}
\xi^{(0)} & = e_0 + e_0'(z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + \cdots & \eta^{(0)} & = f_0(z-\alpha)^{-\frac{a-1}{a}} + f_0'(z-\alpha)^{-\frac{a-2}{a}} + \cdots \\
\xi^{(1)} & = e_1 + e_1'(z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + \cdots & \eta^{(1)} & = f_1(z-\alpha)^{-\frac{a-1}{a}} + f_1'(z-\alpha)^{-\frac{a-2}{a}} + \cdots \\
\vdots & & \vdots & \\
\xi^{(n-1)} & = e_{n-1} + e_{n-1}'(z-\alpha)^{\frac{1}{a}} + \cdots & \eta^{(n-1)} & = f_{n-1}(z-\alpha)^{-\frac{a-1}{a}} + f_{n-1}'(z-\alpha)^{-\frac{a-2}{a}} + \cdots
\end{array}\right.$$

Dann wollen wir die vorher festgestellten Eigenschaften der beiden Fundamentalsysteme zur Untersuchung der den beiden Funktionen

4) $\eta = e_0 \eta^{(0)} + e_1 \eta^{(1)} + \cdots + e_{n-1} \eta^{(n-1)}, \quad \xi = f_0 \xi^{(0)} + f_1 \xi^{(1)} + \cdots + f_{n-1} \xi^{(n-1)}$

zugeordneten Divisoren verwenden und hierauf die wirkliche Aufstellung eines Integrals dritter Gattung mit zwei unbestimmt bleibenden Unstetigkeitspunkten gründen. Dabei sind, wie man sieht, die Funktionen ξ und η in der Weise gebildet, dafs die Elemente des einen Fundamentalsystems mit den Anfangskoeffizienten der Reihenentwickelungen komponiert sind, welche die Funktionen des anderen Fundamentalsystems in dem Punkte $\mathfrak{P}$ besitzen.

Wir bilden zu diesem Zwecke zunächst die zu den Funktionen $\xi^{(h)}$ und $\eta^{(h)}$ gehörigen Divisoren; dann besitzen die Gröfsen $\eta^{(h)}$ den Nenner $\mathfrak{Z}_0$, da sie dem Ideale $I\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_0}\right)$ angehören und im Unendlichen regulär sind, die $\xi^{(h)}$ aber erhalten als gemeinsamen Nenner $\mathfrak{P}_\infty^{\varrho+n}$, wo ϱ höchstens gleich der gröfsten der fehlenden Ordnungszahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ ist, wie dies unmittelbar aus der Tabelle (5a) auf S. 567 hervorgeht. Es ergeben sich somit zunächst für ξ und η die folgenden Divisorendarstellungen:

4a) $$\eta = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{Z}_0}, \quad \xi = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^{\varrho+n}},$$

wo $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ganz sind.

Bei der weiteren Untersuchung der Zähler $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ dieser Funktionen kommt es uns im wesentlichen nur auf das Verhalten im Punkte $\mathfrak{P}$ und seinen konjugierten Punkten an. Es mögen nun an der Stelle $(z = \alpha)$ etwa wieder, wie wir schon früher oft angenommen haben, drei Punkte $\mathfrak{B}_a, \mathfrak{B}_b, \mathfrak{B}_c$ der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ übereinander liegen, von denen der erste mit $\mathfrak{P}$ identisch sein soll. Dann ist

$$z - \alpha = \frac{\mathfrak{B}_a^a \mathfrak{B}_b^b \mathfrak{B}_c^c}{\mathfrak{P}_\infty^n},$$

und es hat $\mathfrak{Z}_0$ in diesen Punkten resp. die Ordnungszahlen $a-1$, $b-1$, $c-1$ und ist somit genau durch das Produkt $\mathfrak{B}_a^{a-1}\mathfrak{B}_b^{b-1}\mathfrak{B}_c^{c-1}$ teilbar.

Wir wollen annehmen, dafs von den n konjugierten Reihenentwickelungen der Funktion $\xi^{(h)}$ die ersten a: $\xi_1^{(h)}, \xi_2^{(h)}, \ldots \xi_a^{(h)}$ zum Punkte $\mathfrak{B}_a$, die folgenden b: $\xi_{a+1}^{(h)}, \ldots \xi_{a+b}^{(h)}$ zum Punkte $\mathfrak{B}_b$, schliefslich die letzten c: $\xi_{a+b+1}^{(h)}, \ldots \xi_n^{(h)}$ zum Punkte $\mathfrak{B}_c$ gehören. Addieren wir nun die a in dem Systeme (1) enthaltenen Gleichungen

$$
5)\quad \begin{cases} \xi_1^{(0)}\eta_1^{(0)} + \xi_1^{(1)}\eta_1^{(1)} + \cdots + \xi_1^{(n-1)}\eta_1^{(n-1)} = 1 \\ \xi_2^{(0)}\eta_1^{(0)} + \xi_2^{(1)}\eta_1^{(1)} + \cdots + \xi_2^{(n-1)}\eta_1^{(n-1)} = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \xi_a^{(0)}\eta_1^{(0)} + \xi_a^{(1)}\eta_1^{(1)} + \cdots + \xi_a^{(n-1)}\eta_1^{(n-1)} = 0, \end{cases}
$$

so enthält eine Summe $\xi_1^{(h)} + \xi_2^{(h)} + \cdots + \xi_a^{(h)}$ nur ganze Potenzen mit nicht negativen Exponenten, und es ist also

$$
6)\quad \xi_1^{(h)} + \xi_2^{(h)} + \cdots + \xi_a^{(h)} = a e_h \\ + \text{positiven ganzen Potenzen von } z - \alpha.
$$

Folglich ist, da $(z-\alpha)\eta_l^{(h)}$ in $\mathfrak{B}_a$ eine positive Ordnungszahl hat:

$$
\eta = e_0\eta^{(0)} + e_1\eta^{(1)} + \cdots + e_{n-1}\eta^{(n-1)} = \frac{1}{a} \\ + \text{positiven Potenzen von } (z-\alpha)^{\frac{1}{a}};
$$

in der Reihenentwickelung der Funktion η in der Umgebung von $\mathfrak{B}_a$ fällt somit der ganze Hauptteil fort und der erste Koeffizient wird $\frac{1}{a}$, bestimmt man also den zu η gehörigen Divisor nach der auf S. 153 gegebenen Vorschrift auch hinsichtlich seines Proportionalitätsfaktors e und wählt den dort beliebig angenommenen Punkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ gleich $\mathfrak{P} = \mathfrak{B}_a$, so ist $e = \frac{1}{a}$. Addieren wir ebenso die Gleichungen

$$
7)\quad \begin{cases} \xi_r^{(0)}\eta_{a+1}^{(0)} + \xi_r^{(1)}\eta_{a+1}^{(1)} + \cdots + \xi_r^{(n-1)}\eta_{a+1}^{(n-1)} = 0 \\ \xi_r^{(0)}\eta_{a+b+1}^{(0)} + \xi_r^{(1)}\eta_{a+b+1}^{(1)} + \cdots + \xi_r^{(n-1)}\eta_{a+b+1}^{(n-1)} = 0 \end{cases}
$$

für $r = 1, 2, \ldots a$, so finden wir in gleicher Weise, daſs η durch $\mathfrak{B}_b$ und $\mathfrak{B}_c$ teilbar ist. Die Summe $e_0\eta^{(0)} + e_1\eta^{(1)} + \cdots + e_{n-1}\eta^{(n-1)}$ hat also in $\mathfrak{B}_b$ und $\mathfrak{B}_c$ eine positive, in $\mathfrak{B}_a$ wenigstens eine nicht negative Ordnungszahl, obgleich die Funktionen $\eta^{(h)}$ selbst in diesen Punkten zum Teil unendlich werden, und es ist somit, wenn man auch die multiplikative Konstante berücksichtigt:

$$
\eta = \frac{1}{a}\,\frac{\mathfrak{B}_a^{a-1}\mathfrak{B}_b^b\mathfrak{B}_c^c\bar{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{Z}_0},
$$

folglich

$$
8)\quad \frac{\eta}{z-\alpha} = \frac{1}{a}\,\frac{\bar{\mathfrak{H}}\mathfrak{P}_\infty^n}{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}_0},
$$

wo $\bar{\mathfrak{H}}$ einen ganzen Divisor bedeutet und $\mathfrak{B}_a$ wieder durch $\mathfrak{P}$ ersetzt ist.

In ähnlicher Weise läſst sich auch die Funktion ξ untersuchen. Wir bilden die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\xi_1^{(0)}\eta_1^{(0)} + \xi_1^{(1)}\eta_1^{(1)} + \cdots + \xi_1^{(n-1)}\eta_1^{(n-1)} = 1\\
&\xi_1^{(0)}\eta_2^{(0)} + \xi_1^{(1)}\eta_2^{(1)} + \cdots + \xi_1^{(n-1)}\eta_2^{(n-1)} = 0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\xi_1^{(0)}\eta_a^{(0)} + \xi_1^{(1)}\eta_a^{(1)} + \cdots + \xi_1^{(n-1)}\eta_a^{(n-1)} = 0
\end{aligned}$$

und addieren sie, nachdem sie der Reihe nach mit

$$\omega^0,\quad \omega^{-1},\quad \omega^{-2},\ldots \omega^{-(a-1)}$$

multipliziert sind, wobei $\omega = e^{\frac{2\pi i}{a}}$ eine primitive a^{te} Einheitswurzel bedeutet. In jeder der hier auftretenden Summen

$$\sigma^{(h)} = \eta_1^{(h)} + \omega^{-1}\eta_2^{(h)} + \cdots + \omega^{-(a-1)}\eta_a^{(h)} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

bleiben nun zufolge der bekannten Gleichung

$$1 + \omega^r + \omega^{2r} + \cdots + \omega^{(a-1)r} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } r \not\equiv 0 \pmod{a},\\ a, \text{ wenn } r \equiv 0 \pmod{a},\end{cases}$$

nur diejenigen Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{a}}$ zurück, deren Exponenten $\equiv 1 \pmod{a}$ sind, und es ist also

$$\sigma^{(h)} \equiv a f_h (z-\alpha)^{-\frac{a-1}{a}} \quad \left(\text{mod. } (z-\alpha)^{\frac{1}{a}}\right).$$

Folglich ergiebt sich durch jene Addition für die Entwickelung in der Umgebung von $\mathfrak{B}_a$

$$\xi = f_0\xi_1^{(0)} + f_1\xi_1^{(1)} + \cdots + f_{n-1}\xi_1^{(n-1)} \equiv \frac{1}{a}(z-\alpha)^{\frac{a-1}{a}} \quad (\text{mod. } z-\alpha),$$

und es ist somit ξ durch $\mathfrak{B}_a^{a-1}$ teilbar und besitzt den Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{a}$.

Ganz ebenso findet man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\xi_{a+1}^{(0)}\eta_r^{(0)} + \xi_{a+1}^{(1)}\eta_r^{(1)} + \cdots + \xi_{a+1}^{(n-1)}\eta_r^{(n-1)} = 0\\
&\xi_{a+b+1}^{(0)}\eta_r^{(0)} + \xi_{a+b+1}^{(1)}\eta_r^{(1)} + \cdots + \xi_{a+b+1}^{(n-1)}\eta_r^{(n-1)} = 0
\end{aligned} \qquad (r = 1, 2, \ldots a)$$

durch Multiplikation mit $\omega^0, \omega^{-1}, \ldots \omega^{-(a-1)}$ und Addition, dafs die Summe ξ durch $\mathfrak{B}_b^b$ und $\mathfrak{B}_c^c$ teilbar ist. Daher erhält man die Divisorenzerlegung

$$\xi = f_0\xi^{(0)} + f_1\xi^{(1)} + \cdots + f_{n-1}\xi^{(n-1)} = \frac{1}{a}\,\frac{\mathfrak{B}_a^{a-1}\mathfrak{B}_b^b\mathfrak{B}_c^c\overline{\mathfrak{G}}}{\mathfrak{P}_\infty^{\varrho+n}},$$

also

$$\text{9)}\qquad \frac{f_0\xi^{(0)} + f_1\xi^{(1)} + \cdots + f_{n-1}\xi^{(n-1)}}{z-\alpha} = \frac{1}{a}\,\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\infty^{\varrho}},$$

wo $\overline{\mathfrak{G}}$ ein ganzer Divisor ist. Wir erhalten so das folgende, für unser nächstes Ziel und die ganze weitere Untersuchung grundlegende Resultat:

Wenn die Elemente $\xi^{(h)}$ und $\eta^{(h)}$ der beiden im vorigen Kapitel konstruierten Fundamentalsysteme für die Ideale $I(1)$ und $I\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}_0}\right)$ in einem beliebigen endlichen Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$, in welchem $z = \alpha$ ist, die Werte

$$\xi^{(0)}(\mathfrak{P}) = e_0, \ldots \xi^{(n-1)}(\mathfrak{P}) = e_{n-1}$$

$$\left(\eta^{(0)}(z-\alpha)^{\frac{a-1}{a}}\right)_{\mathfrak{P}} = f_0, \ldots \left(\eta^{(n-1)}(z-\alpha)^{\frac{a-1}{a}}\right)_{\mathfrak{P}} = f_{n-1}$$

erhalten, so ergeben sich für die aus ihnen komponierten Funktionen

$$\frac{\eta}{z-\alpha} = \frac{e_0\eta^{(0)} + e_1\eta^{(1)} + \cdots + e_{n-1}\eta^{(n-1)}}{z-\alpha},$$

$$\frac{\xi}{z-\alpha} = \frac{f_0\xi^{(0)} + f_1\xi^{(1)} + \cdots + f_{n-1}\xi^{(n-1)}}{z-\alpha}$$

die Divisorendarstellungen

$$\text{8)} \qquad \frac{\eta}{z-\alpha} = \frac{1}{a}\,\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{P}_\infty^n}{\mathfrak{P}\mathfrak{Z}_0}$$

$$\text{9)} \qquad \frac{\xi}{z-\alpha} = \frac{1}{a}\,\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\infty^0},$$

wo $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ganze Divisoren bedeuten und die Proportionalitätsfaktoren in Beziehung auf $\mathfrak{P}$ bestimmt sind. Von den Primdivisoren des Zählers von $z - \alpha$ heben sich also alle bis auf die erste Potenz von $\mathfrak{P}$ heraus.

Vermöge dieses Hilfssatzes können wir jetzt in der That mit Leichtigkeit die Elementarintegrale dritter Gattung mit zwei beliebigen logarithmischen Stellen bilden. Multiplizieren wir nämlich die Funktion $\frac{\eta}{z-\alpha}$ mit dem Differentiale

$$dz \sim \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{P}_\infty^{n+1}},$$

so ist

$$\frac{\eta\,dz}{z-\alpha} \sim \frac{1}{a}\,\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\infty}.$$

Dieses Differential hat also die beiden einfachen Unstetigkeitspunkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_\infty$, und da $\mathfrak{P}$ als a-blättriger Verzweigungspunkt angenommen wurde, so ist (s. S. 289) das zugehörige Residuum gleich $+1$, das Residuum des Punktes $\mathfrak{P}_\infty$ also -1. Es gilt also der Satz:

Das Integral

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_\infty\mathfrak{P}} = \int \frac{e_0\eta^{(0)} + e_1\eta^{(1)} + \cdots + e_{n-1}\eta^{(n-1)}}{z-\alpha}\,dz$$

ist ein Elementarintegral dritter Gattung mit den logarithmischen Stellen $\mathfrak{P}_\infty$ und $\mathfrak{P}$ und den zugehörigen Residuen -1 und $+1$.

Durch Subtraktion zweier derartiger Integrale erhält man den etwas allgemeineren Satz:

Das Integral

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = \int \left(\frac{e_0^{(2)}\eta^{(0)} + e_1^{(2)}\eta^{(1)} + \cdots + e_{n-1}^{(2)}\eta^{(n-1)}}{z - \alpha^{(2)}} - \frac{e_0^{(1)}\eta^{(0)} + e_1^{(1)}\eta^{(1)} + \cdots + e_{n-1}^{(1)}\eta^{(n-1)}}{z - \alpha^{(1)}} \right) dz$$

ist ein Elementarintegral dritter Gattung mit den logarithmischen Stellen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und den zugehörigen Residuen -1 und $+1$.

§ 2.

Da die Zahlen $e_0, e_1, \ldots e_{n-1}$ die Werte der Funktionen

$$\xi^{(0)}, \quad \xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n-1)}$$

für den im Endlichen gelegenen, aber sonst beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ sind, so werden wir durch die vorangehenden Betrachtungen darauf geführt, eine von zwei verschiedenen Punkten der Riemannschen Fläche abhängige algebraische Funktion in ihrer beiderseitigen Abhängigkeit zu untersuchen. Wir bezeichnen die beiden verschiedenen Wertsysteme der Variabeln durch u, z resp. $\bar{u}, \bar{z}$, die beiden entsprechenden Punkte durch $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$, und unterscheiden durchweg die Funktionen des Körpers und die zugehörigen Divisoren, je nachdem sie von dem einen oder dem anderen Wertsysteme abhängen, durch gewöhnliche oder überstrichene Buchstaben. Dann handelt es sich bei allen folgenden Betrachtungen um Eigenschaften der Funktion

$$1) \qquad \theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = \frac{\overline{\xi^{(0)}}\eta^{(0)} + \overline{\xi^{(1)}}\eta^{(1)} + \cdots + \overline{\xi^{(n-1)}}\eta^{(n-1)}}{z - \bar{z}}$$

und der mit ihr im Zusammenhang stehenden Differentiale und Integrale. Diese Funktion θ, welche sich als fundamental für unser Problem erweist, ist in rationaler Weise von jedem der beiden Variabelnsysteme (z, u) und $(\bar{z}, \bar{u})$ abhängig und somit eine Gröfse des Körpers $K(z, u; \bar{z}, \bar{u})$, und sie ist, wenn man dem einen Systeme, z. B. (z, u), feste Werte beilegt, ein Element des zu dem anderen gehörigen Körpers $K(\bar{z}, \bar{u})$. Mit Benutzung derselben kann man z. B. auch das vorher aufgestellte Integral dritter Gattung in einer der beiden folgenden Formen darstellen:

$$2) \qquad \tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = \int dz \left(\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1)\right) = \int dz \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})}{d\bar{z}}\, d\bar{z},$$

wobei in dem Doppelintegrale die Differentiation nach der zweiten Variabeln $\bar{z}$ ausgeführt werden mufs. Hieraus schon ergiebt sich die Notwendigkeit, die Gröfse θ nicht blofs, wie das bisher geschehen ist, in ihrer Abhängigkeit von $\mathfrak{P} = (u, z)$, sondern auch als Funktion des Parameters $\overline{\mathfrak{P}} = (\bar{u}, \bar{z})$ der Untersuchung zu unterwerfen. Diese Untersuchung beruht aber auf den beiden im vorigen Abschnitte erhaltenen Ergebnissen:

I. Wenn wir den Punkt $\overline{\mathfrak{P}}$ fixieren und mit dem im Endlichen gelegenen, aber sonst willkürlichen Punkt $\mathfrak{B}$ zusammenfallen lassen, so ist

$$\text{3)} \qquad \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}) = \frac{1}{a} \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{P}_\infty^n}{\mathfrak{B}\mathfrak{Z}_0}.$$

II. Wenn wir andererseits den Punkt $\mathfrak{P}$ fixieren, indem wir ihn mit $\mathfrak{B}$ zusammenfallen lassen, so können in ihm allerdings die Funktionen $\eta^{(h)}$ unendlich werden, wenn $\mathfrak{B}$ Verzweigungspunkt ist; die Differentiale $\eta^{(h)} dz$ bleiben aber stets in $\mathfrak{B}$ regulär, weil diese nur in $\mathfrak{P}_\infty$ einen Pol besitzen, und es verhält sich daselbst

$$\text{4)} \qquad \eta^{(0)} dz : \eta^{(1)} dz : \cdots : \eta^{(n-1)} dz = f_0 : f_1 : \cdots : f_{n-1}.$$

Gehen wir jetzt von dieser Proportion zu einer Gleichung über, so ist es bei der folgenden und allen ähnlichen Betrachtungen am zweckmäfsigsten, einem Abelschen Differentiale wie $\eta\, dz$ für einen bestimmten Punkt $\mathfrak{B}$, der kein Pol ist, geradezu einen Wert beizulegen, ebenso wie die Funktionen in einem Punkte, in dem sie regulär sind, einen bestimmten endlichen Zahlenwert erhalten. Allerdings sind die Werte der Differentiale in einem Punkte $\mathfrak{B}$ unendlich klein und überdies nicht blofs von $\mathfrak{B}$ selbst, sondern auch von dem Nachbarpunkte abhängig, zu dem man fortschreitet. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, brauchen wir nur eine geeignete Einheit für die Werte der Differentiale zu Grunde zu legen. Diese Einheit ist nun hier nicht eine Zahl, sondern ebenfalls ein Differential, und zwar wählen wir naturgemäfs das Differential einer Funktion π, welche in dem betreffenden endlichen Punkte $\mathfrak{B}$ die Ordnungszahl Eins und den Koeffizienten Eins hat, so dafs die Reihenentwickelung gilt:

$$\pi = (z - \alpha)^{\frac{1}{a}} + \cdots.$$

Dann hat der Differentialteiler von $d\pi$ daselbst die Ordnungszahl Null, weil $\mathfrak{B}$ weder in $\mathfrak{Z}_\pi$ noch in $\mathfrak{n}_\pi$ vorkommt; und wenn man zwei verschiedene derartige Funktionen π und π' annimmt, so ist im Punkte $\mathfrak{B}$

$$\frac{d\pi'}{d\pi} = 1 \quad \text{oder} \quad d\pi' = d\pi;$$

es ist also gleichgiltig, welche der unendlich vielen Funktionen π man bei der Wahl der Einheit zu Grunde legt.

Hat nun der Differentialteiler von $\eta\, dz$ in $\mathfrak{B}$ eine nicht negative Ordnungszahl, so ist $\frac{\eta\, dz}{d\pi}$ in $\mathfrak{B}$ endlich und erhält daselbst einen bestimmten endlichen Wert c. Dann ist im Punkte $\mathfrak{B}$:

$$\eta\, dz = c\, d\pi,$$

also ist $c\, d\pi$ der Wert des Differentials $\eta\, dz$ im Punkte $\mathfrak{B}$. Für die Funktion $\eta^{(h)}$ hat man z. B.:

$$\eta^{(h)} dz = \frac{f_h\, dz}{(z-\alpha)^{\frac{a-1}{a}}} + \cdots$$

$$d\pi = \frac{1}{a}(z-\alpha)^{\frac{1}{a}-1} dz + \cdots,$$

also ist im Punkte $\mathfrak{B}$:

$$\eta^{(h)} dz = a f_h\, d\pi;$$

somit ist der unendlich kleine Proportionalitätsfaktor, mit welchem f_h multipliziert werden mufs, damit die Proportion (4) in eine Gleichung übergeht, gleich $a\, d\pi$. Folglich ist für $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{B}$:

$$\theta(\mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{P}})\, dz = -\, a\, d\pi \frac{f_0\, \overline{\xi^{(0)}} + \cdots + f_{n-1}\, \overline{\xi^{(n-1)}}}{\overline{z} - \alpha},$$

also auf Grund der Formel (9) auf S. 581

$$5) \qquad \theta(\mathfrak{B}, \overline{\mathfrak{P}})\, dz = -\, d\pi\, \frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\overline{\mathfrak{B}}\, \overline{\mathfrak{P}}_\infty^{\varrho}},$$

wobei durch den Faktor $-d\pi$ der erste Koeffizient in der Reihenentwickelung an der Stelle $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{B}}$ bestimmt wird.

Wir wollen zuvörderst zeigen, dafs wir mit Hilfe der Funktion θ auch ein Integral zweiter Gattung mit einem beliebigen endlichen Pole bilden können; da das Integral zweiter Gattung aus dem der dritten hervorgeht, wenn die beiden Primdivisoren im Nenner des zugehörigen Differentialteilers zusammenfallen, so geschieht dies durch Herstellung eines Grenzüberganges, nämlich durch Differentiation des Integrals (2) nach einem der beiden Parameter. Es sei, wie vorher, $\mathfrak{B}$ ein beliebiger, aber fester und endlicher Punkt der Riemannschen Fläche, $\overline{\mathfrak{P}}$ aber ein beliebiger und veränderungsfähiger Punkt seiner Umgebung $\mathfrak{U}$. Bei der gewählten Bezeichnung hat man zu beachten, dafs die Unterscheidung zwischen gewöhnlichen und überstrichenen deutschen Buchstaben bei Punkten nur so lange notwendig ist, als sie veränderlich

bleiben, daſs sie aber für feste Punkte überflüssig ist; ebenso unterscheidet man zwischen den Funktionen z und $\bar{z}$, aber der Wert in $\mathfrak{B}$ ist für beide gleich der Zahl α.

Nun ist nach dem früheren

$$\tilde{\omega} = \int \left(\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{B})\right) dz$$

ein Integral mit den logarithmischen Stellen $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$, das Integral ist also (s. S. 289) durch $\lg \mathfrak{B}$ und $\lg \overline{\mathfrak{P}}$ teilbar und besitzt hier die Residuen -1 und $+1$. Diese Thatsache können wir in einer etwas anderen Form aussprechen, wenn wir die vorher gebildete Funktion π zu Hilfe nehmen, welche in $\mathfrak{B}$ die Ordnungszahl Eins hat. Bilden wir nämlich die ebenfalls von $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ abhängige Gröſse

$$\lg \frac{\pi(\mathfrak{P}) - \pi(\overline{\mathfrak{P}})}{\pi(\mathfrak{P})} = \lg \frac{\pi - \bar{\pi}}{\pi},$$

so wird dieselbe als Funktion von $\mathfrak{P}$ ebenfalls bei $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ logarithmisch und zwar mit den Residuen -1 und $+1$ unendlich, die Differenz

$$\psi = \tilde{\omega} - \lg \frac{\pi - \bar{\pi}}{\pi} \tag{6}$$

verhält sich also in $\mathfrak{B}$ und seiner Umgebung $\mathfrak{U}$ regulär. Die gleiche Eigenschaft besitzt diese Differenz, wenn man sie als Funktion von $\overline{\mathfrak{P}}$ betrachtet; denn fixiert man $\mathfrak{P}$ irgendwie innerhalb $\mathfrak{U}$, so wird in diesem Gebiete das Integral sowohl wie der Logarithmus eben nur, wenn $\overline{\mathfrak{P}}$ mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt, und dann in gleicher Weise unendlich.

Daher ist ψ durchaus regulär, wenn $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ innerhalb der Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{B}$ verbleiben, und kann in eine nach ganzen positiven Potenzen von π und $\bar{\pi}$ fortschreitende Reihe entwickelt werden; dasselbe gilt also auch noch von dem Differentialquotienten dieser Funktion nach $\bar{\pi}$:

$$\frac{d\tilde{\omega}}{d\bar{\pi}} + \frac{1}{\pi - \bar{\pi}}, \tag{7}$$

da eine Potenzreihe Glied für Glied differenziert werden kann und alsdann wieder ein reguläres Funktionenelement liefert. Läſst man also nach der Differentiation $\overline{\mathfrak{P}}$ mit $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, so ist

$$\left(\frac{d\tilde{\omega}}{d\bar{\pi}}\right)_{\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{B}} + \frac{1}{\pi}$$

als Funktion von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{B}$ und seiner Umgebung $\mathfrak{U}$ regulär.

Läſst man andererseits $\overline{\mathfrak{P}}$ in der Umgebung von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{P}$ aber auſserhalb dieses Gebietes sich bewegen, so ist für diesen Bereich $\tilde{\omega}$

selbst durchaus regulär und kann daher in eine Reihe nach Potenzen von $\bar{\pi}$ entwickelt werden, deren Koeffizienten Funktionen von $\mathfrak{P}$ und aufserhalb $\mathfrak{U}$ regulär sind; folglich ist auch der Differentialquotient

$$\left(\frac{d\,\tilde{\omega}}{d\,\bar{\pi}}\right)_{\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{B}},$$

in welchem wir wieder nach der Differentiation $\bar{\mathfrak{P}}$ haben in $\mathfrak{B}$ hineinrücken lassen, aufserhalb dieses Gebietes regulär, und da er innerhalb desselben nur in $\mathfrak{B}$ und dann wie $-\frac{1}{\pi}$ unstetig wird, so ist er ein Elementarintegral zweiter Gattung mit dem Pole $\mathfrak{B}$. Wir gewinnen daher den folgenden, bald noch näher zu erörternden Satz:

Ist $\mathfrak{B}$ ein beliebiger endlicher Punkt der Riemannschen Fläche und $\pi = \pi(\mathfrak{P})$ eine Funktion, welche in ihm die Ordnungszahl Eins und den Koeffizienten Eins hat, $\bar{\pi} = \pi(\bar{\mathfrak{P}})$ dieselbe Funktion des überstrichenen Argumentes, so ergiebt die Differentiation des Integrales dritter Gattung

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_\infty \bar{\mathfrak{P}}} = \int \frac{\bar{\xi}^{(0)} \eta^{(0)} + \bar{\xi}^{(1)} \eta^{(1)} + \cdots + \bar{\xi}^{(n-1)} \eta^{(n-1)}}{z - \bar{z}}\, dz$$

nach $\bar{\pi}$ für $\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{B}$ ein Elementarintegral zweiter Gattung mit dem Pole $\mathfrak{B}$, welches in $\mathfrak{B}$ wie $-\frac{1}{\pi}$ unendlich wird, es ist also

$$\text{8a)} \qquad \left(\frac{d\,\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_\infty \bar{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{P})}{d\bar{\pi}}\right)_{\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{B}} = t_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{P}).$$

Geht man daher nach den auf S. 584 gegebenen Vorschriften vom Differentialquotienten zum Differential über, so ist

$$\text{8)} \quad t_{\bar{\mathfrak{P}}} = \bar{d}\,\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_\infty \bar{\mathfrak{P}}} = \int \frac{d}{d\,\bar{z}} \left(\frac{\bar{\xi}^{(0)} \eta^{(0)} + \bar{\xi}^{(1)} \eta^{(1)} + \cdots + \bar{\xi}^{(n-1)} \eta^{(n-1)}}{z - \bar{z}} \right) d\bar{z}\, dz$$

ebenfalls ein Elementarintegral zweiter Gattung mit dem Pole $\bar{\mathfrak{P}}$.

Dieser Satz tritt in der algebraischen Untersuchung der Abelschen Integrale an die Stelle desjenigen auf S. 357, welcher ebenfalls ein Integral zweiter Gattung aus einem der dritten durch Differentiation nach einem Parameter bilden lehrte. Ein Unterschied besteht nur insofern, als wir damals ein transcendent, jetzt ein algebraisch normiertes Integral dritter Gattung nach dem Parameter differenziiert haben; wir haben also jetzt auch von keiner Periodizitätseigenschaft des Integrals dritter Gattung Gebrauch machen müssen, und daher ist der jetzige Satz von elementarerem Charakter als der frühere.

Ferner haben wir jetzt, um die volle Allgemeinheit der Untersuchung aufrecht zu erhalten, nicht den Differentialquotienten nach $\bar{z}$, sondern das Differential nach dem Parameter $\mathfrak{P}$ gebildet; wir konnten aber auch vom Differential zum Differentialquotienten übergehen, wodurch ja das Integral blofs mit einer Konstanten multipliziert wird, dann aber haben wir eine erst durch den Unstetigkeitspunkt des Integrales bestimmte Funktion π eingeführt. Nehmen wir statt dessen, wie damals den Differentialquotienten nach der bestimmten Variabeln $\bar{z}$, d. h. dividieren wir das obige Integral $t_{\bar{\mathfrak{P}}}$ in (8) durch $d\bar{z}$, so wird dasselbe für alle diejenigen Punkte unbrauchbar, für welche der dem Differentiale dz zugehörige Divisor positive Ordnungszahlen erhält, der Integrand also unendlich wird. Demgemäfs haben wir auch bei der entsprechenden Untersuchung (s. S. 354) voraussetzen müssen, dafs $\mathfrak{B}$ kein Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche ist, d. h. dafs der Differentialteiler von dz daselbst die Ordnungszahl Null hat. Diese Einschränkung macht bei vollständiger Untersuchung stets eine grofse Zahl unbequemer Unterscheidungen nötig, sobald man den Differentialquotienten des Integrals $\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_\infty \bar{\mathfrak{P}}}$ nach einer bestimmten Variabeln $\bar{z}$ bildet; sie kommt aber ganz in Fortfall, wenn man durchweg blofs mit den Differentialen operiert, weil dann der Integrand durchweg ein reguläres Verhalten zeigt, oder auch, wenn man den Differentialquotienten nicht nach einer bestimmten Variabeln $\bar{z}$, sondern nach einer geeigneten $\bar{\pi}$ bildet. Wenn wir schliefslich zwischen diesen beiden Möglichkeiten, die Untersuchung in uneingeschränkter Allgemeinheit weiterzuführen, uns zu entscheiden haben, so geben wir der ersten den Vorzug, weil die dauernde Benutzung der Hilfsvariabeln π für die Folge überflüssig und sogar schädlich wäre.

Aus den angegebenen Gründen ist die jetzige elementare und völlig allgemeine Ableitung des Integrals zweiter Gattung aus dem der dritten der früheren vorzuziehen.

§ 3.

Wir sind jetzt imstande, den wesentlichsten Fortschritt der Untersuchung zu vollziehen: wir differenziieren die Funktion θ nach dem Parameter und weisen nach, dafs die Differenz der beiden Derivierten, welche durch Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ auseinander hervorgehen, nur noch feste, aber keine veränderlichen Unendlichkeitsstellen mehr besitzt.

Bezeichnen wir mit π dieselbe Funktion wie im vorigen Abschnitte und beschränken $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ auf die Umgebung des Nullpunktes $\mathfrak{B}$ von π, so war gezeigt worden, dafs die Differenz (7)

$$\frac{d\bar{\omega}(\mathfrak{P},\bar{\mathfrak{P}})}{d\pi}+\frac{1}{\pi-\bar{\pi}},$$

welche durch Differentiation der Funktion ψ in (6) noch $\bar{\pi}$ erhalten wurde, sich ebenso wie ψ selbst regulär verhält, wenn man $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ zusammenfallen läfst. Dasselbe ist auch noch der Fall, wenn man diesen Ausdruck noch einmal nach π differenziert, und es ist also auch, da

$$\frac{d\bar{\omega}(\mathfrak{P},\bar{\mathfrak{P}})}{d\pi}=\theta(\mathfrak{P},\bar{\mathfrak{P}})\frac{dz}{d\pi}$$

ist,

$$1)\qquad \frac{d\theta(\mathfrak{P},\bar{\mathfrak{P}})}{d\bar{\pi}}\frac{dz}{d\pi}-\frac{1}{(\pi-\bar{\pi})^2}$$

regulär, wenn $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ innerhalb der Umgebung von $\mathfrak{B}$ zusammenrücken. Die gleiche Eigenschaft besitzt natürlich diejenige Differenz, welche aus der vorigen hervorgeht, wenn man durchweg gestrichene und ungestrichene Variabeln vertauscht, nämlich

$$2)\qquad \frac{d\theta(\bar{\mathfrak{P}},\mathfrak{P})}{d\pi}\frac{d\bar{z}}{d\bar{\pi}}-\frac{1}{(\pi-\bar{\pi})^2}.$$

Subtrahiert man also (1) und (2) voneinander, so fällt das Zusatzglied fort und es folgt, dafs auch die Differenz

$$3)\qquad \frac{d\theta(\mathfrak{P},\bar{\mathfrak{P}})}{d\bar{\pi}}\frac{dz}{d\pi}-\frac{d\theta(\bar{\mathfrak{P}},\mathfrak{P})}{d\pi}\frac{d\bar{z}}{d\bar{\pi}}$$

bei Koincidenz von $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ regulär bleibt. Gehen wir dann schliefslich durch Multiplikation mit $d\pi\, d\bar{\pi}$ von den Differentialquotienten zu den Differentialen über, und machen uns hierdurch von der eingeführten Hilfsfunktion π unabhängig, so hat sich uns ergeben, dafs das von zwei Variabeln abhängige Differential

$$4)\qquad \mathsf{H}=\frac{d\theta(\mathfrak{P},\bar{\mathfrak{P}})}{d\bar{z}}dz\,d\bar{z}-\frac{d\theta(\bar{\mathfrak{P}},\mathfrak{P})}{dz}dz\,d\bar{z},$$

regulär ist, wenn wir den einen Punkt, z. B. $\mathfrak{P}$ festhalten und den anderen veränderlich bleibenden $\bar{\mathfrak{P}}$ mit ihm zusammenrücken lassen; das Differential besitzt also, wenn wir $\mathfrak{P}=\mathfrak{B}$ annehmen, keinen Pol an der Stelle $\bar{\mathfrak{P}}=\mathfrak{B}$.

Wir wollen jetzt noch die festen Pole des Differentiales H bestimmen. Setzen wir wieder $\mathfrak{P}=\mathfrak{B}$ und betrachten $\bar{\mathfrak{P}}$ als veränderlich, so besitzt nach Gleichung (5) auf S. 584 $\theta(\mathfrak{B},\bar{\mathfrak{P}})\,dz$ den Nenner $\mathfrak{B}\,\bar{\mathfrak{P}}_\infty^\varrho$; bilden wir dann das Differential dieses Ausdruckes nach $\bar{z}$, so ist dies der Minuendus von H, und der Nenner des zugehörigen Differentialteilers ist nach den allgemeinen Regeln auf S. 293 gleich $\mathfrak{B}^2\,\bar{\mathfrak{P}}_\infty^{\varrho+1}$.

Andererseits ist der Subtrahend, für $\mathfrak{P}=\mathfrak{B}$ in seiner Abhängigkeit von $\bar{\mathfrak{P}}$ betrachtet, nach dem Satze des vorigen Paragraphen gerade

das Differential des Elementarintegrales zweiter Gattung mit dem Pole $\overline{\mathfrak{B}}$; der Nenner des zugehörigen Differentialteilers ist also nur $\overline{\mathfrak{B}}^2$ und enthält keine Potenz von $\overline{\mathfrak{P}}_\infty$. Bei der Subtraktion beider Ausdrücke hebt sich nun, wie im vorigen Absatze bewiesen wurde, der Nenner $\overline{\mathfrak{B}}^2$ fort, und der Differentialteiler von H enthält also nur eine Potenz von $\overline{\mathfrak{P}}_\infty$ in diesem Nenner, welche allein von dem Minuendus von H herrührt.

Es geht somit aus diesen Betrachtungen hervor, dafs die Differenz H, wenn man den Punkt $\mathfrak{P}$ irgendwie im Endlichen fixiert und H als Funktion von $\overline{\mathfrak{P}}$ betrachtet, nur noch die eine feste Unendlichkeitsstelle $\overline{\mathfrak{P}}_\infty$ besitzt, während sich die im Punkte $\mathfrak{P}$ einstellenden Unstetigkeiten der beiden Teile der Differenz gegenseitig kompensieren. Ganz das Gleiche gilt natürlich wegen der Symmetrie dieses Ausdruckes, wenn man umgekehrt $\overline{\mathfrak{P}}$ fixiert und $\mathfrak{P}$ in seiner Veränderlichkeit erhält. Wir erhalten somit folgendes Fundamentaltheorem, welches die Quelle des Satzes von der Vertauschung von Parameter und Argument ist:

Die Differenz

$$4)\qquad \mathsf{H} = \frac{d\theta(\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}})}{d\bar{z}}\,dz\,d\bar{z} - \frac{d\theta(\overline{\mathfrak{P}},\mathfrak{P})}{dz}\,dz\,d\bar{z}$$

ist in Bezug auf jedes der beiden Variabelnsysteme ein Differential zweiter Gattung mit dem einzigen Pole $\mathfrak{P}_\infty$ resp. $\overline{\mathfrak{P}}_\infty$. Dabei besitzt in Beziehung auf den Punkt $\mathfrak{P}$ nur der Subtrahend bei $\mathfrak{P}_\infty$, in Beziehung auf den Punkt $\overline{\mathfrak{P}}$ nur der Minuend bei $\overline{\mathfrak{P}}_\infty$ eine negative Ordnungszahl.

Es ist also auch H in Bezug auf jedes der beiden Variabelnsysteme nach den Regeln der vorigen Vorlesung als Differential zweiter Gattung darstellbar. Bildet man aber für das zugehörige Integral den Hauptteil der Reihenentwickelungen in der Umgebung der unendlich fernen Stelle, so hat man, soweit die Abhängigkeit von $\mathfrak{P}$ in Betracht kommt, nur den Subtrahenden, in Bezug auf $\overline{\mathfrak{P}}$ aber nur den Minuenden zu berücksichtigen.

§ 4.

Es bleibt nun noch übrig, die Differenz H mit Hilfe des früher entwickelten vollständigen Systems von Differentialen erster und zweiter Gattung wirklich darzustellen und zu diesem Zwecke die Hauptteile der Reihenentwickelungen in der Umgebung der unendlich fernen Stelle zu bilden.

Bei dieser Untersuchung wollen wir, wenn wir z. B. eine in dem Körper $K(z, u)$ enthaltene Funktion $\varphi(\mathfrak{P})$ in der Umgebung von $\mathfrak{P}_\infty$ entwickeln:

$$\varphi(\mathfrak{P}) = \alpha_{-m}\left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{m}{n}} + \alpha_{-(m-1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{m-1}{n}} + \cdots + \alpha_{-1}\left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$+ \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}} + \cdots,$$

den Hauptteil dieser Reihe kurz durch

$$[\varphi] = \alpha_{-m}\left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{m}{n}} + \cdots + \alpha_{-1}\left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

darstellen. Ebenso bezeichnen wir den Hauptteil einer Funktion $\varphi(\overline{\mathfrak{P}})$ des Körpers $K(\bar{z}, \bar{u})$ durch $[\bar{\varphi}]$. Dann ist es evident, dafs bei Einführung dieses Zeichens

$$[\varphi + \psi] = [\varphi] + [\psi]$$

und für konstantes c

$$[c\varphi] = c[\varphi]$$

ist.

Unterwerfen wir nun zunächst die Abhängigkeit obiger Differenz von dem gestrichenen Argument $\overline{\mathfrak{P}}$ der Untersuchung, so haben wir in dem Ausdrucke

$$\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = \frac{\overline{\xi^{(0)}}\eta^{(0)} + \overline{\xi^{(1)}}\eta^{(1)} + \cdots + \overline{\xi^{(n-1)}}\eta^{(n-1)}}{z - \bar{z}}$$

z, u als konstant, $\bar{z}, \bar{u}$ als veränderlich anzusehen und in der Umgebung von $(\bar{z} = \infty)$ zu entwickeln. Da aber daselbst $\overline{\xi^{(h)}}$ in der Ordnung $(\mu_h n + h)$ unendlich wird, so ist

$$\text{1)} \qquad \overline{\xi^{(h)}} = \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{-\mu_h - \frac{h}{n}} + \beta_h\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{-\mu_h - \frac{h-1}{n}} + \cdots,$$

und ferner ist

$$-\frac{1}{z - \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}} + \frac{z}{\bar{z}^2} + \frac{z^2}{\bar{z}^3} + \cdots.$$

Bilden wir also das Produkt $\dfrac{\overline{\xi^{(h)}}}{z - \bar{z}}$ und dessen Hauptteil, so ist

$$-\left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{z - \bar{z}}\right] = \left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\bar{z}}\right] + z\left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\bar{z}^2}\right] + z^2\left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\bar{z}^3}\right] + \cdots + z^{\mu_h - 1}\left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\bar{z}^{\mu_h}}\right];$$

denn alle folgenden Glieder liefern keinen Hauptteil mehr, weil $\dfrac{\overline{\xi^{(h)}}}{\bar{z}^{\mu_h + 1}}$ in $\overline{\mathfrak{P}}_\infty$ bereits eine positive Ordnungszahl erhält; für $h = 0$ fällt also der Hauptteil ganz fort, da die Funktion daselbst regulär ist. Multipliziert man diese Gleichung mit $\eta^{(h)}dz$, welches in Beziehung auf $\overline{\mathfrak{P}}$

konstant ist, und summiert alsdann über h von 0 bis $n-1$, so ergiebt sich, da $\mu_0 = 0$ ist,

$$-[\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})\,dz] = -\left[\frac{\sum\limits_{0}^{n-1}{}_h\, \overline{\xi^{(h)}}\,\eta^{(h)}}{z - \overline{z}}\,dz\right] =$$

$$\sum_{1}^{n-1}{}_h \left\{\eta^{(h)}dz \cdot \left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\overline{z}}\right] + z\eta^{(h)}dz \cdot \left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\overline{z}^2}\right] + \cdots + z^{\mu_h - 1}\eta^{(h)}dz \cdot \left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\overline{z}^{\mu_h}}\right]\right\},$$

oder kürzer

$$2) \qquad -[\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})\,dz] = \sum_{1}^{n-1}{}_h \sum_{0}^{\mu_h - 1}{}_{\gamma_h} z^{\mu_h - 1 - \gamma_h}\,\eta^{(h)}dz \left[\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\overline{z}^{\mu_h - \gamma_h}}\right].$$

Nun wird aber die Funktion

$$\frac{\overline{\xi^{(h)}}}{\overline{z}^{\mu_h - \gamma_h}} = \overline{\varphi}_{h, \gamma_h}$$

in $\mathfrak{P}_\infty$ in der Ordnung

$$(\mu_h n + h) - n(\mu_h - \gamma_h) = \gamma_h n + h$$

unendlich; diese Zahl ist aber nach (10a) auf S. 571 ein bestimmtes Element ϱ_i der Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$, und man erhält, wenn man h und γ_h alle in der obigen Doppelsumme auftretenden Werte annehmen läſst, jede dieser Zahlen und jede nur einmal. Bei Festhaltung der damals eingeführten Bezeichnungen ergiebt sich also, daſs die Funktion φ_{h,γ_h} in $\mathfrak{P}_\infty$ in derselben Ordnung unendlich wird wie das zur Zahl ϱ_i gehörige Integral t_i; wir können somit auch φ_{h,γ_h} geradezu durch t_i ersetzen, wenn wir nämlich die Festsetzung treffen, daſs der Hauptteil von t_i mit dem von φ_{h,γ_h} identisch, also

$$[t_i] = [\varphi_{h,\gamma_h}]$$

sein soll; hierdurch ist t_i erst, abgesehen von einem Integral erster Gattung, bestimmt. Es ist aber in der obigen Summe $[\overline{\varphi}_{h,\gamma_h}]$ mit dem Differentiale

$$z^{\mu_h - 1 - \gamma_h}\,\eta^{(h)}dz = dw_i$$

multipliziert, und es kann also (s. d. Formel (10) auf S. 571) das allgemeine Glied der Summe (2) durch

$$dw_i(\mathfrak{P})\,t_i(\overline{\mathfrak{P}})$$

ersetzt werden, wobei der Index i durch die Gleichung $\varrho_i = \gamma_h n + h$ bestimmt ist. Dann tritt an die Stelle der obigen Summe die andere

$$\sum_{i=1}^{p} dw_i(\mathfrak{P})\, t_i(\overline{\mathfrak{P}}),$$

und wir gelangen daher zu folgendem Satze:

Das Differential

$$\text{I)}\ \theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})\, dz + dw_1(\mathfrak{P})\, t_1(\overline{\mathfrak{P}}) + dw_2(\mathfrak{P})\, t_2(\overline{\mathfrak{P}}) + \cdots + dw_p(\mathfrak{P})\, t_p(\overline{\mathfrak{P}})$$

wird, als Funktion von $\overline{\mathfrak{P}}$ betrachtet, bei $(\bar{z} = \infty)$ nicht mehr unendlich. Gleiches gilt daher auch von dem Differentiale dieses Ausdrucks in Bezug auf $\overline{\mathfrak{P}}$:

$$\text{II)}\ \Delta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = \frac{d\, \theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})}{d\bar{z}}\, d\bar{z}\, dz + dw_1(\mathfrak{P})\, dt_1(\overline{\mathfrak{P}}) + \cdots + dw_p(\mathfrak{P})\, dt_p(\overline{\mathfrak{P}}).$$

In Beziehung auf $\mathfrak{P}$ ist (I) ein Differential dritter Gattung mit den logarithmischen Stellen $\mathfrak{P}_\infty, \overline{\mathfrak{P}}$, (II) ein Differential zweiter Gattung mit dem Pole erster Ordnung $\overline{\mathfrak{P}}$.

Der letzte Teil des Satzes folgt daraus, dafs wir zu dem Differentiale $\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})\, dz$, resp. $\frac{d}{d\bar{z}} \theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})\, dz\, d\bar{z}$, welches nach dem Früheren von der dritten, resp. zweiten Gattung ist, nur eine Summe hinzugefügt haben, welche in Bezug auf $\mathfrak{P}$ ein Differential erster Gattung ist und daher die Unstetigkeitseigenschaften des Differentials nicht verändert.

Vertauschen wir nun in dem Differentiale (II) die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ und subtrahieren den so erhaltenen Ausdruck

$$\text{IIa)}\ \Delta(\overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P}) = \frac{d\theta(\overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P})}{dz}\, dz\, d\bar{z} + dw_1(\overline{\mathfrak{P}})\, dt_1(\mathfrak{P}) + \cdots + dw_p(\overline{\mathfrak{P}})\, dt_p(\mathfrak{P})$$

von dem ersten, so ist die Differenz nach dem Satze auf S. 589 für alle endlichen Punkte regulär und wird nach dem letzten auch in $\mathfrak{P}_\infty$ und $\overline{\mathfrak{P}}_\infty$ nicht mehr unendlich; diese Differenz ist also in Beziehung auf jede der beiden Variabeln ein Differential erster Gattung. Daher ist sie eine bilineare Form der Differentiale

$$dw_1(\mathfrak{P}),\quad dw_2(\mathfrak{P}),\ \ldots\ dw_p(\mathfrak{P})$$

und

$$dw_1(\overline{\mathfrak{P}}),\quad dw_2(\overline{\mathfrak{P}}),\ \ldots\ dw_p(\overline{\mathfrak{P}}),$$

d. h. es ist

$$\Delta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) - \Delta(\overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P}) = \sum_{i,k=1}^{p} a_{ik}\, dw_i(\mathfrak{P})\, dw_k(\overline{\mathfrak{P}}),$$

wobei die Koeffizienten a_{ik} Konstanten sind. Da ferner die linke Seite der Gleichung bei Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}$ das Zeichen wechselt, so gilt das gleiche von der rechten, und folglich ist $a_{ik} = -a_{ki}$. Die Bilinearform $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ ist daher eine sogenannte alternierende Form.

Wir können jetzt schliefslich die Fundamentalintegrale zweiter Gattung $t_1, t_2, \ldots t_p$ durch Hinzufügung von Integralen erster Gattung noch so verändern, dafs die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende Bilinearform ganz fortfällt. Ersetzen wir nämlich

$$t_i(\mathfrak{P}) \quad \text{durch} \quad t_i(\mathfrak{P}) + c_{i1} w_1(\mathfrak{P}) + c_{i2} w_2(\mathfrak{P}) + \cdots + c_{ip} w_p(\mathfrak{P}),$$

so tritt an die Stelle von

$$\Delta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})}{dz} dz\, d\bar{z} + \sum_{i=1}^{p} dw_i(\mathfrak{P})\, dt_i(\mathfrak{P})$$

der Differentialausdruck

$$D(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})}{dz} dz\, d\bar{z} + \sum_{i=1}^{p} dw_i(\mathfrak{P}) \left\{ dt_i(\mathfrak{P}) + \sum_{k=1}^{p} c_{ik}\, dw_k(\overline{\mathfrak{P}}) \right\},$$

und es ist

$$D(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - D(\overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P}) = \Delta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) - \Delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) + \sum_{i,k} (c_{ik} - c_{ki})\, dw_i(\mathfrak{P})\, dw_k(\overline{\mathfrak{P}}).$$

Folglich wird

$$D(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - D(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 0,$$

wenn die p^2 Konstanten c_{ik} so bestimmt werden, dafs

$$c_{ik} - c_{ki} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots p)$$

ist. Dies aber ist stets und sogar auf unendlich viele Arten zu erreichen; denn fügt man zu den obigen Gleichungen, welche nur $\frac{1}{2} p(p-1)$ Gleichungen repräsentieren, weil $a_{ik} = -a_{ki}$ ist, noch $\frac{1}{2} p(p+1)$ weitere:

$$c_{ik} + c_{ki} = s_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots p)$$

hinzu, so ist $s_{ik} = s_{ki}$, und man erhält

$$c_{ik} = \frac{1}{2}(s_{ik} - a_{ik}).$$

Hierbei kann das symmetrische System s_{ik} ganz beliebig gewählt werden; die Integrale zweiter Gattung werden also durch die angegebene Normierung noch nicht völlig bestimmt. Wir haben so den folgenden Satz gewonnen, den wir als den Vertauschungssatz der Differentiale bezeichnen:

> Bei passender algebraischer Normierung der Integrale erster und zweiter Gattung in Beziehung auf die Variable z bleibt der Differentialausdruck

$$D(\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{P}}) = \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{P}})}{dz} d\bar{z}\, dz + dw_1(\mathfrak{P})\, dt_1(\bar{\mathfrak{P}}) + \cdots + dw_p(\mathfrak{P})\, dt_p(\bar{\mathfrak{P}})$$

bei Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ ungeändert. Das gleiche gilt auch von jedem Ausdrucke, der aus dem vorigen durch Hinzufügung einer symmetrischen Bilinearform der Differentiale erster Gattung

$$\Sigma s_{ik}\, dw_i(\mathfrak{P})\, dw_k(\bar{\mathfrak{P}}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots p)$$

erhalten wird.

Aus diesem Theoreme ergiebt sich, wie wir im nächsten Kapitel zeigen wollen, der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei Integralen dritter Gattung samt allen seinen Konsequenzen. In der obigen Form ist er zunächst eine rein algebraische Identität, durch welche festgestellt wird, dafs eine dem Körper $K(z, u \mid \bar{z}, \bar{u})$ angehörige Gröfse bei Vertauschung der Argumentpaare ungeändert bleibt. Wir wollen diese Gleichung an dem Beispiele der hyperelliptischen Körper durch Rechnung bestätigen.

§ 5.

Ein hyperelliptisches Gebilde vom Geschlechte p können wir nach S. 549 in der Form

$$u^2 = g(z) \tag{1}$$

annehmen, worin die ganze Funktion

$$g(z) = c_{2p+1} z^{2p+1} + c_{2p} z^{2p} + \cdots + c_1 z + c_0 \quad (c_{2p+1} \neq 0) \tag{2}$$

von ungeradem Grade ist. Alsdann ist der unendlich ferne Punkt Verzweigungspunkt, und da also die beiden Blätter im Unendlichen zusammenhängen, so ist

$$z = \frac{\mathfrak{z}_z}{\mathfrak{P}_\infty^2}$$

eine solche Variable, wie wir sie der ganzen vorhergehenden Entwickelung zu Grunde gelegt haben.

Die Elemente des Fundamentalsystems für die ganzen Funktionen sind

$$\xi^{(0)} = 1, \quad \xi^{(1)} = u,$$

also die des reciproken Systems

$$\eta^{(0)} = \frac{1}{2}, \quad \eta^{(1)} = \frac{1}{2u};$$

denn die Zusammensetzung der aus den Konjugierten gebildeten Systeme

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2u} & -\frac{1}{2u} \end{pmatrix}$$

ergiebt das Einheitssystem.

Da ferner $\mu_1 = p$ ist, so erhalten wir bei Anwendung der Sätze des § 2 der vorigen Vorlesung folgende beiden Systeme von Fundamentalintegralen erster und zweiter Gattung:

$$
1)\quad \begin{aligned}
w_1 &= \int \frac{z^{p-1}\,dz}{2u}, \quad w_2 = \int \frac{z^{p-2}\,dz}{2u}, \cdots\; w_p = \int \frac{dz}{2u},\\
\tau_1 &= \int \frac{z^{p}\,dz}{2u}, \quad \tau_2 = \int \frac{z^{p+1}\,dz}{2u}, \cdots\; \tau_p = \int \frac{z^{2p-1}\,dz}{2u},
\end{aligned}
$$

für welche die zugehörigen Ordnungen des Null- und Unendlichwerdens die folgenden sind:

$$\varrho_1 = 1, \quad \varrho_2 = 3, \quad \varrho_3 = 5, \ldots \varrho_p = 2p - 1.$$

Die Integrale erster Gattung behalten wir in der Folge bei, die der zweiten treten nur provisorisch auf und sollen später durch ein anderes Fundamentalsystem $t_1, t_2, \ldots t_p$ mit gleichen Eigenschaften ersetzt werden.

Die Funktion θ erhält hier die Form

$$\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = \frac{\overline{\xi^{(0)}}\eta^{(0)} + \overline{\xi^{(1)}}\eta^{(1)}}{z - \bar{z}} = \frac{1}{2}\,\frac{1 + \dfrac{\bar{u}}{u}}{z - \bar{z}} = \frac{1}{2u}\,\frac{u + \bar{u}}{z - \bar{z}},$$

und diese Funktion ist nach $\bar{z}$ zu differenzieren. Man hat also die Differenz zu bilden:

$$\Delta = dz\,d\bar{z}\left(\frac{1}{2u}\,\frac{d}{d\bar{z}}\left(\frac{u + \bar{u}}{z - \bar{z}}\right) - \frac{1}{2\bar{u}}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{\bar{u} + u}{\bar{z} - z}\right)\right) = dz\,d\bar{z}\cdot K.$$

Wertet man diese Differenz hier direkt aus, so findet man

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\bar{u} + u}{\bar{z} - z}\right) = \frac{\bar{u} + u}{(\bar{z} - z)^2} + \frac{g'(z)}{2(\bar{z} - z)\,u}$$

$$\frac{d}{d\bar{z}}\left(\frac{u + \bar{u}}{z - \bar{z}}\right) = \frac{u + \bar{u}}{(z - \bar{z})^2} + \frac{g'(\bar{z})}{2(z - \bar{z})\,\bar{u}},$$

also

$$K = \frac{g(\bar{z}) - g(z) - \frac{1}{2}\left(g'(\bar{z}) + g'(z)\right)\left(\bar{z} - z\right)}{2\,(\bar{z} - z)^2\,u\,\bar{u}},$$

wo nun der Zähler eine ganze Funktion von z und $\bar{z}$ ist, welche durch $(\bar{z} - z)^2$ teilbar sein mufs, weil $K\,dz\,d\bar{z}$ in Beziehung auf beide Variabelnsysteme ein Differential zweiter Gattung ist. In der That ergiebt sich, wenn zunächst r eine beliebige positive ganze Zahl ist und wir $g(z) = z^r$ annehmen:

$$\frac{\bar z^r - z^r - \frac{1}{2} r (\bar z^{r-1} + z^{r-1})(\bar z - z)}{(\bar z - z)^2}$$

$$= \frac{(\bar z^{r-1} + \bar z^{r-2} z + \cdots + z^{r-1}) - \frac{r}{2}(\bar z^{r-1} + z^{r-1})}{\bar z - z}$$

$$= \left(1 - \frac{r}{2}\right) \bar z^{r-2} + \left(2 - \frac{r}{2}\right) \bar z^{r-3} z + \left(3 - \frac{r}{2}\right) \bar z^{r-4} z + \cdots + \left(r - 1 - \frac{r}{2}\right) z^{r-2}$$

$$= \sum_{h=1}^{r-1} \left(h - \frac{r}{2}\right) \bar z^{r-1-h} z^{h-1};$$

diese Summe kann man auch in der Form schreiben:

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{\beta - \alpha}{2} \bar z^\alpha z^\beta,$$

wobei die Zahlen α und β nicht negativ und der Bedingung $\alpha + \beta = r - 2$ unterworfen sind; für $r = 0, 1$ und 2 wird die Summe gleich Null.

Da nun

$$g(z) = \sum_{r=0}^{2p+1} c_r z^r$$

ist, so folgt jetzt

$$\frac{g(\bar z) - g(z) - \frac{1}{2}\left(g'(\bar z) + g'(z)\right)\left(\bar z - z\right)}{(\bar z - z)^2} = \sum_{\alpha \beta} \frac{\beta - \alpha}{2} c_{\alpha + \beta + 2} \bar z^\alpha z^\beta,$$

in welcher die Zahlen $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots$ nur noch der einen Bedingung unterliegen, dafs $r \leqq 2p + 1$, also

$$\alpha + \beta \leqq 2p - 1$$

ist. Somit ergiebt sich in der That

$$\Delta = \sum_{\alpha, \beta} (\beta - \alpha) c_{\alpha + \beta + 2} \frac{\bar z^\alpha d\bar z}{2u} \frac{z^\beta dz}{2u},$$

wo unter dem Summenzeichen nur noch Differentiale erster und zweiter Gattung stehen. Hierbei sind, wie es sein mufs, niemals zwei Differentiale zweiter Gattung miteinander multipliziert; denn da $\alpha + \beta < 2p - 1$ ist, so kann nicht zugleich $\alpha \geqq p, \beta \geqq p$ sein; man kann also wirklich Δ als bilinearen Ausdruck darstellen, in welchem immer ein Differential der zweiten Gattung mit einem solchen der ersten oder aber zwei Differentiale der ersten Gattung miteinander multipliziert sind.

Wir zerlegen demgemäfs obige Summe in folgende drei Teile:

$$\left.\begin{aligned} &\sum(\beta-\alpha)c_{\alpha+\beta+2}\frac{\bar z^\alpha d\bar z}{2u}\,\frac{z^\beta dz}{2u} \quad (\alpha \geqq p) \\ +&\sum(\beta-\alpha)c_{\alpha+\beta+2}\frac{\bar z^\alpha d\bar z}{2u}\,\frac{z^\beta dz}{2u} \quad (\beta \geqq p) \\ +&\sum(\beta-\alpha)c_{\alpha+\beta+2}\frac{\bar z^\alpha d\bar z}{2u}\,\frac{z^\beta dz}{2u} \quad (\alpha, \beta < p) \end{aligned}\right\} (\alpha+\beta \leqq 2p-1),$$

von denen der erste die Glieder mit Differentialen zweiter Gattung in Beziehung auf $\bar{\mathfrak{P}}$, der zweite die Glieder mit ebensolchen Differentialen in Beziehung auf $\mathfrak{P}$, der dritte die alternierende Bilinearform der Differentiale erster Gattung enthält. Es ist also in der ersten Summe das Differential

$$dw_i(\mathfrak{P}) = \frac{z^{p-i}dz}{2u} \qquad (i = 1, 2, \cdots p)$$

multipliziert mit

$$\sum_{\alpha=p}^{p+i-1}(p-i-\alpha)c_{p-i+\alpha+2}\frac{\bar z^\alpha d\bar z}{2u} = -(2i-1)c_{2p+1}d\tau_i(\bar{\mathfrak{P}}) - (2i-2)c_{2p}d\tau_{i-1}(\bar{\mathfrak{P}}) - \cdots - ic_{2p-i+2}d\tau_1(\bar{\mathfrak{P}}),$$

während die zweite Summe aus der ersten, abgesehen vom Zeichen, durch Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ entsteht. Ferner kann man die dritte Summe noch weiter in die Differenz der beiden auseinander durch Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ hervorgehenden Teile zerlegen:

$$\sum_{\alpha>\beta}(\beta-\alpha)c_{\alpha+\beta+2}\frac{\bar z^\alpha d\bar z}{2u}\,\frac{z^\beta dz}{2u} \text{ und } \sum_{\alpha<\beta}(\alpha-\beta)c_{\alpha+\beta+2}\frac{\bar z^\alpha d\bar z}{2u}\,\frac{z^\beta dz}{2u},$$

und hier ist in dem ersten Bestandteile $dw_i(\mathfrak{P})$ multipliziert mit

$$\sum_{\alpha=p-i+1}^{p-1}(p-i-\alpha)c_{p-i+\alpha+2}\frac{\bar z^\alpha d\bar z}{2u} = -(i-1)c_{2p-i+1}dw_1(\bar{\mathfrak{P}}) - \cdots - c_{2(p-i)+3}dw_{i-1}(\bar{\mathfrak{P}}).$$

Ersetzt man also jetzt $\tau_i(\mathfrak{P})$ durch das Integral

$$\begin{aligned} \text{2)}\quad t_i(\mathfrak{P}) &= (2i-1)c_{2p+1}\tau_i(\mathfrak{P}) + (2i-2)c_{2p}\tau_{i-1}(\mathfrak{P}) + \cdots + ic_{2p-i+2}\tau_1(\mathfrak{P}) \\ &\quad + (i-1)c_{2p-i+1}w_1(\mathfrak{P}) + (i-2)c_{2p-i}w_2(\mathfrak{P}) + \cdots + c_{2p-2i+3}w_{i-1}(\mathfrak{P}) \\ &= \int\frac{dz}{2u}\Big((2i-1)c_{2p+1}z^{p+i-1} + (2i-2)c_{2p}z^{p+i-2} + \cdots + ic_{2p-i+2}z^p \\ &\quad + (i-1)c_{2p-i+1}z^{p-1} + (i-2)c_{2p-i}z^{p-2} + \cdots + c_{2p-2i+3}z^{p-i+1}\Big) \end{aligned}$$

oder

$$\text{2a)}\qquad t_i(\mathfrak{P}) = \int\frac{dz}{2u}\sum_{h=1}^{2i-1}(2i-h)c_{2p+2-h}z^{p+i-h},$$

welches in $\mathfrak{P}_x$ dieselbe Ordnungszahl besitzt, wie $\tau_i(\mathfrak{P})$, weil der erste Koeffizient c_{2p+1} der Funktion $g(z)$ von Null verschieden ist, so gilt der Vertauschungssatz für hyperelliptische Differentiale in folgender Form:

Der Differentialausdruck

$$D(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = \frac{1}{2u} \frac{d}{dz} \left(\frac{u + \bar{u}}{z - \bar{z}} \right) dz\, d\bar{z} + \sum_{i=1}^{p} dt_i(\mathfrak{P})\, dw_i(\mathfrak{P}),$$

in welchem die Integrale erster und zweiter Gattung $w_i(\mathfrak{P})$ und $t_i(\mathfrak{P})$ durch die Formeln (1) und (2a) erklärt sind, bleibt bei Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}$ ungeändert.

Vierunddreifsigste Vorlesung.

Aufstellung sämtlicher Differentiale zweiter Gattung, welche Vertauschung von Parameter und Argument gestatten. — Der Vertauschungssatz für die Integrale dritter Gattung. — Der Vertauschungssatz für die Integrale zweiter Gattung. — Der Vertauschungssatz für Integrationswege, die sich schneiden. — Charakteristik zweier Wege auf der Riemannschen Fläche. — Charakteristik zweier Periodenwege. — Geschlossene Wege, für welche die Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung verschwinden, zerlegen die Riemannsche Fläche in zwei getrennte Teile.

§ 1.

Wir haben in der vorigen Vorlesung bewiesen, dafs der in § 4 gebildete und erklärte Differentialausdruck

$$1)\quad D(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})}{d\bar{z}}\, d\bar{z}\, dz + dw_1(\mathfrak{P})\, dt_1(\overline{\mathfrak{P}}) + \cdots + dw_p(\mathfrak{P})\, dt_p(\overline{\mathfrak{P}}),$$

welcher in Beziehung auf das Argument $\mathfrak{P}$ ein Differential zweiter Gattung mit dem einzigen und einfachen Pole $\overline{\mathfrak{P}}$ darstellt, die Eigenschaft besitzt, bei Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$, d. i. von Argument und Parameter, ungeändert zu bleiben. Dasselbe ist auch noch der Fall, wenn man zu $D(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})$ eine bilineare Form der Differentiale erster Gattung

$$\Sigma\, s_{ik}\, dw_i(\mathfrak{P})\, dw_k(\overline{\mathfrak{P}}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots p)$$

hinzufügt und die p^2 Konstanten s_{ik} als ein symmetrisches, aber im übrigen beliebiges System wählt. Wir wollen nun aber zunächst zeigen, dafs es aufser den soeben charakterisierten Differentialausdrücken keine anderen Elementardifferentiale zweiter Gattung mit dem unbestimmt bleibenden Pole $\overline{\mathfrak{P}}$ giebt, welche die Eigenschaft der Vertauschbarkeit von Argument und Parameter besitzen.

In der That, jedes derartige Elementarintegral zweiter Gattung ist in der Form darstellbar:

$$D_0(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = D(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) + \Gamma_1(\overline{\mathfrak{P}})\, dw_1(\mathfrak{P}) + \cdots + \Gamma_p(\overline{\mathfrak{P}})\, dw_p(\mathfrak{P}),$$

worin $\Gamma_1, \ldots \Gamma_p$ irgend welche von $\overline{\mathfrak{P}}$ allein abhängige Gröfsen sind. Da nun $D(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = D(\overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P})$ ist, so besitzt die obige Summe dann und nur dann ebenfalls die Eigenschaft der Symmetrie, wenn

$$\Gamma_1(\overline{\mathfrak{P}})\,dw_1(\mathfrak{P})+\cdots+\Gamma_p(\overline{\mathfrak{P}})\,dw_p(\mathfrak{P})=\Gamma_1(\mathfrak{P})\,dw_1(\overline{\mathfrak{P}})+\cdots+\Gamma_p(\mathfrak{P})\,dw_p(\overline{\mathfrak{P}})$$

ist. Fixiert man nun den Punkt $\overline{\mathfrak{P}}$, so gilt eine Proportion der Form

$$dw_1(\overline{\mathfrak{P}}):dw_2(\overline{\mathfrak{P}}):\cdots:dw_p(\overline{\mathfrak{P}})=c_1:c_2:\cdots:c_p,$$

und die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_p$ sind nicht alle Null, weil die Differentialklasse W primitiv ist; dann folgt, dafs auch

$$c_1\Gamma_1(\mathfrak{P})+c_2\Gamma_2(\mathfrak{P})+\cdots+c_p\Gamma_p(\mathfrak{P})$$

ein Differential erster Gattung sein mufs, weil dasselbe für die linke Seite obiger Gleichung gilt. Da nun das System $(c_1, c_2, \ldots c_p)$ einen beliebigen Punkt der Hauptkurve H darstellt, so kann man in mannigfacher Weise p verschiedene derartige lineare Kombinationen der $\Gamma_i(\mathfrak{P})$ so herstellen, dafs die Determinante der Koeffizienten von Null verschieden ist; es mufs daher auch jedes $\Gamma_i(\mathfrak{P})$ selbst ein Differential erster Gattung, also

$$\Gamma_i(\mathfrak{P})=\sum_{k=1}^{p} s_{ik}\,dw_k(\mathfrak{P})$$

sein, und folglich ist die Summe

$$\sum_i \Gamma_i(\overline{\mathfrak{P}})\,dw_i(\mathfrak{P})=\sum_{ik} s_{ik}\,dw_i(\overline{\mathfrak{P}})\,dw_k(\mathfrak{P}).$$

Damit aber diese die Eigenschaft der Vertauschbarkeit von $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ besitze, ist schliefslich erforderlich, dafs $s_{ik}=s_{ki}$ sei, womit unsere Behauptung erwiesen ist. Wir erhalten so den Satz:

Bedeutet (s_{ik}) ein beliebig symmetrisches Konstantensystem von p^2 Elementen, so erhalten wir in dem Ausdrucke

$$D(\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}})+\sum_{ik} s_{ik}\,dw_i(\mathfrak{P})\,dw_k(\overline{\mathfrak{P}}) \qquad (i, k=1, 2, \ldots p)$$

sämtliche Differentiale zweiter Gattung mit dem einzigen und einfachen Pole $\overline{\mathfrak{P}}$, welche die Vertauschung des Argumentes $\mathfrak{P}$ und des Parameters $\overline{\mathfrak{P}}$ gestatten.

§ 2.

Wir gehen jetzt zu der Integralform des Vertauschungssatzes über, indem wir die veränderlichen Punkte $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ auf zwei bestimmten Wegen s und σ fortrücken lassen, von denen der erste s sich von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$, der zweite σ von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ erstrecken möge, und sodann den Differentialausdruck $D(\mathfrak{P},\overline{\mathfrak{P}})$ über diese beiden Wege integrieren. Hierbei wollen wir aber zunächst die Voraussetzung machen, dafs die

Wege s und σ sich nicht schneiden. Alsdann können wir, wenn $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt des Weges s ist, den Punkt $\mathfrak{P}$ auf dem Wege σ von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ fortrücken lassen und zunächst über σ integrieren, ohne dafs dabei die Funktion $\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ jemals unstetig würde; denn diese Funktion wird ja im Endlichen eben nur dann unendlich, wenn $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. Daher läfst sich in dem ersten Gliede der Summe $D(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ die Integration ausführen, denn es ist bei festem $\mathfrak{P}$

$$\int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})}{d\bar{z}}\, d\bar{z} = \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1).$$

Hingegen wäre diese Gleichung ohne die Annahme, dafs die Wege s und σ keinen Punkt gemein haben, für diejenigen Punkte $\mathfrak{P}$ unrichtig, welche Schnittpunkte von s und σ sind.

Nachdem diese erste Integration vollzogen ist, können wir sodann auch in Beziehung auf $\mathfrak{P}$ integrieren, indem wir diesen Punkt auf dem Wege s von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ wandern lassen. Wir erhalten so, wenn wir die Feststellungen des vorigen Kapitels auf S. 594 hinzunehmen, folgenden Fundamentalsatz, den Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter bei den Elementarintegralen dritter Gattung:

Das Elementarintegral dritter Gattung mit den Grenzen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$, denen die Residuen -1 und $+1$ zugehören:

$$1)\qquad \begin{aligned} \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = & \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \left(\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1)\right) dz \\ & + \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} dw_i \cdot \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_i \end{aligned}$$

bleibt ungeändert, wenn man den ersten und zweiten Unstetigkeitspunkt mit der unteren und oberen Grenze vertauscht; es ist also

$$2)\qquad \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2};$$

hierbei sind aber die Integrale so zu erstrecken, dafs sich die Wege $s = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ und $\sigma = \mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$ nicht schneiden. Die gleiche Eigenschaft besitzt auch jedes Elementarintegral dritter

Gattung, welches aus dem vorigen durch Hinzufügung einer Summe

$$\sum_{ik} s_{ik} \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} dw_i \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dw_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots p)$$

entsteht, wenn das Koeffizientensystem (s_{ik}) symmetrisch ist. Außer diesen Integralen giebt es aber keine anderen Elementarintegrale dritter Gattung, welche die Vertauschung der Argumente $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ und der Parameter $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ gestatten.

Der letzte Teil des Satzes ist, wie man sofort sieht, eine unmittelbare Konsequenz desjenigen, welcher am Ende des vorigen Abschnittes ausgesprochen wurde. Denn man kann, wie eben gezeigt, von der in der vorigen Vorlesung bewiesenen Differentialformel

$$D(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = D(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$$

unmittelbar zu der Integralgleichung (2) gelangen und umgekehrt von dieser durch Differentiation zu jener zurückkehren.

Betrachten wir jetzt den Integranden des Integrals $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P})$:

$$\frac{d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}}{dz} = \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1) + \sum_{i=1}^{p} w_i'(\mathfrak{P}) \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_i,$$

so ist derselbe, in seiner Abhängigkeit von $\mathfrak{P}$ aufgefaßt, natürlich eine Funktion des Körpers; fassen wir aber seine Abhängigkeit von einem der beiden Unstetigkeitspunkte, z. B. von $\mathfrak{Q}_2$, ins Auge, so ergiebt sich das bemerkenswerte Resultat, daß er eine t r a n s c e n d e n t e Funktion desselben ist. Denn es hängt zwar $\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2)$ von $\mathfrak{Q}_2$ algebraisch ab, aber jedes der p Integrale $\int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_i$ ist ein Integral zweiter Gattung, welches nicht auf algebraische Funktionen zurückführbar ist, und das gleiche gilt also auch von dem obigen Integranden $\tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P})$. Dieser ist vielmehr in seiner Abhängigkeit von $\mathfrak{Q}_2$ nach den Ergebnissen der zweiunddreißigsten Vorlesung ein eigentliches Integral mit zwei polaren Unstetigkeiten, welche bei $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_\infty$ gelegen sind und von denen die erste die Ordnungszahl Eins besitzt, während die Ordnung der zweiten höher und durch die Zahlenreihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_p$ zu bestimmen ist. Diese Feststellungen bleiben offenbar auch dann bestehen, wenn wir zu obigem Integranden noch irgend einen symmetrischen Ausdruck

$$\sum_{ik} s_{ik} w_i'(\mathfrak{P}) \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dw_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots p)$$

hinzufügen. Daher gilt der Satz:

Ein Elementarintegral dritter Gattung, dessen Integrand algebraisch von seinen Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ abhängt, läfst niemals Vertauschung der Argumente und der Parameter zu; ein Elementarintegral dritter Gattung, welches diese Vertauschung gestattet, besitzt stets einen Integranden, welcher, in seiner Abhängigkeit von den Parametern betrachtet, ein eigentliches Integral zweiter Gattung ist.

Dieser Satz ergab sich bei der analogen Untersuchung auf S. 357 flg. nicht; es blieb damals unentschieden, in welcher Weise der Integrand eines Integrals, welches die Vertauschung gestattet, von seinen Parametern abhängt. Wir sehen hier, dafs wir bei der Bildung eines derartigen Integranden zwar aus dem Kreise der Funktionen des Körpers, nicht aber aus dem Kreise der aus ihnen hervorgehenden Integrale mit polaren Unstetigkeiten heraustreten. Die Verschiedenartigkeit der Abhängigkeit eines derartigen Integranden von Argument und Parameter bildet alsdann die Grundlage für alle weitergehenden Untersuchungen.

Ein ähnlicher Satz, wie der soeben für Integrale dritter Gattung abgeleitete Vertauschungssatz, besteht auch für solche der zweiten Gattung. Wir erhalten ihn entweder, indem wir in der Formel (1) $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ in einen einzigen Punkt $\mathfrak{P}$ zusammenrücken lassen, oder auch, indem wir die Grundgleichung

$$D(\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{P}}) = D(\bar{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P})$$

bei festem $\bar{\mathfrak{P}}$ nur in Beziehung auf $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{P}_1$ bis $\mathfrak{P}_2$ integrieren. In beiden Fällen ergiebt sich die Gleichung

$$\text{3)} \qquad \begin{aligned} &\int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{P}})}{d\bar{z}} d\bar{z}\, dz + \sum_{i=1}^{p} dt_i(\bar{\mathfrak{P}}) \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} dw_i \\ &= d\bar{z}\Big(\theta(\bar{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P}_2) - \theta(\bar{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P}_1)\Big) + \sum_{i=1}^{p} dw_i(\bar{\mathfrak{P}}) \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} dt_i, \end{aligned}$$

welche nur der einen Bedingung unterworfen ist, dafs der Punkt $\bar{\mathfrak{P}}$ nicht auf dem Integrationswege $s = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ gelegen ist. Diese Gleichung findet bei Berücksichtigung der Formel (8) auf S. 586 in folgendem Satze ihren Ausdruck:

Betrachtet man das Integral zweiter Gattung mit dem Unstetigkeitspunkte erster Ordnung $\bar{\mathfrak{P}}$

4)
$$t_{\bar{\mathfrak{P}}} = \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{P}})}{d\bar{z}}\, d\bar{z}\, dz$$

bei festgehaltenen Grenzen und festem Integrationswege in seiner Abhängigkeit von dem Pole $\bar{\mathfrak{P}}$, so ist es in Beziehung auf diesen ein Abelsches Differential mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_\infty$; es ist nämlich

5)
$$t_{\bar{\mathfrak{P}}} = d\bar{z}\left(\theta(\bar{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P}_2) - \theta(\bar{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P}_1)\right) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, dt_i(\bar{\mathfrak{P}}) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i\, dw_i(\bar{\mathfrak{P}}),$$
$$-\alpha_i = \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} dw_i, \quad \beta_i = \int_{\mathfrak{P}_1}^{\mathfrak{P}_2} dt_i,$$

worin der dem ersten Gliede der Summe zugehörige Divisor den Nenner $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$, der zum zweiten Gliede gehörige einen Nenner $\mathfrak{P}_\infty^{\varrho}$ besitzt, während das dritte Glied ein Differential erster Gattung, der zugehörige Divisor also ganz ist.

Dieser Satz tritt in der algebraischen Untersuchung an die Stelle des Satzes (V) auf S. 356 flg.; er kann im weiteren Verlaufe der Entwickelung mit diesem in völlige Übereinstimmung gesetzt werden. Auch hier giebt aber die algebraische Untersuchung ein besseres Resultat als die funktionentheoretische, weil sie unmittelbar Aufschlufs giebt, in welcher Weise ein auf algebraischem Wege gebildetes Elementarintegral zweiter Gattung von seinem Pole abhängt. Eine ebenso vollständige Erkenntnis kann aus dem Satze (V) auf S. 356 nicht oder wenigstens nicht direkt gewonnen werden.

Die Formel (5) kann noch in anderer Weise interpretiert werden, wenn man die auftretenden Integrale als Funktionen ihrer oberen Grenze $\mathfrak{P}_2$ betrachtet. Es wird nämlich alsdann ein Elementarintegral zweiter Gattung mit unbestimmt bleibendem Pole als Summe einer Funktion des Körpers und der $2p$ Fundamentalintegrale

$$\int dw_i, \quad \int dt_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

dargestellt. Die Möglichkeit solcher Darstellung ist durch den Satz auf S. 574 bereits festgestellt, durch die Gleichung (5) wird sie für ein Integral mit unbestimmtem Pole $\bar{\mathfrak{P}}$ ausgeführt; dabei ergiebt sich noch, dafs die Koeffizienten in Beziehung auf $\bar{\mathfrak{P}}$ Differentiale erster und zweiter Gattung sind.

§ 3.

Wir wollen jetzt die für den weiteren Fortgang der Entwickelung entscheidende Erörterung anstellen, in welcher Weise sich der Vertauschungssatz für Integrale dritter Gattung modifiziert, wenn die Integrationswege s und σ sich schneiden.

Zu diesem Zwecke setzen wir, wenn wieder $s = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, $\sigma = \mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$ ist, wie vorher

$$1) \qquad \int\limits_s d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} = \int\limits_s \big(\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1)\big)\,dz + \sum_{i=1}^{p} \int\limits_s dw_i \int\limits_\sigma dt_i$$

und führen für die Differenz der beiden durch die Vertauschung auseinander hervorgehenden Integrale eine kurze Bezeichnung ein:

$$2) \qquad \int\limits_s d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} - \int\limits_\sigma d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = I(s, \sigma);$$

die Differenz ist also in Abhängigkeit von den Wegen s und σ gedacht, durch welche ja die vier Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ als ihre Anfangs- und Endpunkte mitbestimmt sind, während das Umgekehrte natürlich nicht zutrifft. Nach dem früheren Ergebnis ist dann $I(s, \sigma) = 0$, wenn die Wege s und σ sich nicht schneiden; es handelt sich jetzt um die Wertbestimmung dieser Differenz bei beliebigem Verlaufe der beiden Wege.

Nun können wir zunächst für die Differenz $I(s, \sigma)$ einige unmittelbar evidente Beziehungen feststellen. Es ist nämlich

$$3) \qquad I(\sigma, s) = -I(s, \sigma),$$

ferner ist, wenn man den Weg s in zwei Teile $s' = \mathfrak{P}_1\mathfrak{R}$ und $s'' = \mathfrak{R}\mathfrak{P}_2$ zerlegt:

$$4) \qquad I(s' + s'', \sigma) = I(s', \sigma) + I(s'', \sigma),$$

weil nicht blofs $\int\limits_s d\tilde{\omega} = \int\limits_{s'} d\tilde{\omega} + \int\limits_{s''} d\tilde{\omega}$, sondern auch

$$d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2} = d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1\mathfrak{R}} + d\tilde{\omega}_{\mathfrak{R}\mathfrak{P}_2}$$

ist. Ebenso ist, falls $\sigma = \sigma' + \sigma''$ ist:

$$4a) \qquad I(s, \sigma' + \sigma'') = I(s, \sigma') + I(s, \sigma'').$$

Wir wollen nun wieder auf den beiden gerichteten Strecken s und σ das linke und rechte Ufer durch das positive und das negative Zeichen unterscheiden und der Einfachheit halber annehmen, dafs die

beiden Wege sich nur in einem Punkte $\mathfrak{S}$ begegnen (Fig. 36). Wir wollen ferner die Vorstellung in der Weise fixieren, dafs der Weg σ den Weg s vom positiven zum negativen Ufer überschreitet; es ist also in der schon früher angewendeten Terminologie (S. 285) der Übergang von σ über s positiv, der von s über σ negativ. Wir können dabei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit den Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ als einen endlichen und unverzweigten Punkt der Riemannschen Fläche voraussetzen, da wir anderenfalls einen der beiden Wege nur um ein so kleines Stück zu verschieben brauchen, dafs hierdurch der Wert der Integrale nicht geändert wird. Wir wollen dann schliefslich um den Punkt $\mathfrak{S}$ einen

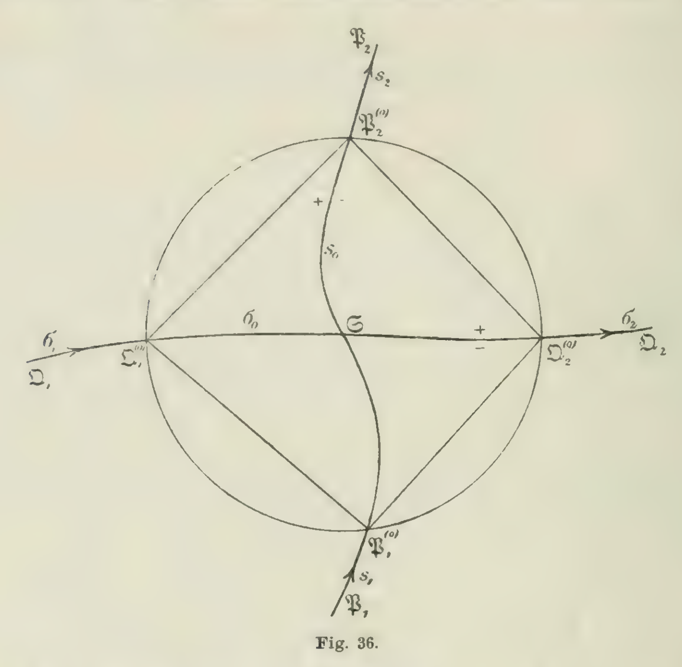


Fig. 36.

kleinen Kreis beschreiben und hierdurch jeden der beiden Wege s und σ in drei Teile s_1, s_0, s_2 resp. $\sigma_1, \sigma_0, \sigma_2$ zerlegen, wobei $s_0 = \mathfrak{P}_1^{(0)}\mathfrak{P}_2^{(0)}$ und $\sigma_0 = \mathfrak{Q}_1^{(0)}\mathfrak{Q}_2^{(0)}$ die Mittelstücke sind.

Wenden wir jetzt auf die Integraldifferenz $I(s, \sigma)$ die Relationen (4) und (4a) an, so zerlegt sie sich in neun ähnlich gebildete Glieder

$$I(s_\alpha, \sigma_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2),$$

von denen aber alle bis auf das eine $I(s_0, \sigma_0)$ verschwinden, weil die zugehörigen Integrationswege keinen Punkt gemein haben. Daher ist einfach

$$5) \qquad I(s, \sigma) = I(s_0, \sigma_0),$$

wobei es uns überdies noch freisteht, durch allmähliche Verkleinerung des Kreises mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{S}$ die Strecken s_0, σ_0 unbegrenzt klein werden zu lassen; es bleibt also nur noch

$$5\text{a)} \qquad I(s_0, \sigma_0) = \int\limits_{s_0} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1^{(0)}\mathfrak{Q}_2^{(0)}} - \int\limits_{\sigma_0} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1^{(0)}\mathfrak{P}_2^{(0)}}$$

zu ermitteln.

Bezeichnen wir nun die Werte der Funktion z in den Punkten $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}, \mathfrak{Q}_1^{(0)}, \mathfrak{Q}_2^{(0)}$ resp. mit p_1, p_2, q_1, q_2, so wird die Integralfunktion $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1^{(0)}\mathfrak{Q}_2^{(0)}}$ in ihren Unstetigkeitsstellen ebenso unendlich wie $\lg\frac{z-q_2}{z-q_1}$, die Funktion $\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1^{(0)}\mathfrak{P}_2^{(0)}}$ aber wie $\lg\frac{z-p_2}{z-p_1}$. Daher können wir folgende Äquivalenzen einführen:

$$\int d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1^{(0)}\mathfrak{Q}_2^{(0)}} \sim \int\left(\frac{dz}{z-q_2} - \frac{dz}{z-q_1}\right) = \int d\lg\frac{z-q_2}{z-q_1}$$

$$\int d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1^{(0)}\mathfrak{P}_2^{(0)}} \sim \int\left(\frac{dz}{z-p_2} - \frac{dz}{z-p_1}\right) = \int d\lg\frac{z-p_2}{z-p_1};$$

hierbei bedeutet die Äquivalenz, dafs die beiden Differentiale unter den Integralzeichen sich nur um eine Differenz unterscheiden, welche für die Umgebung von $\mathfrak{S}$ regulär ist, wie wir im übrigen auch die Punkte $\mathfrak{P}_1^{(0)}, \mathfrak{P}_2^{(0)}, \mathfrak{Q}_1^{(0)}, \mathfrak{Q}_2^{(0)}$ annehmen mögen. Die Differenz beider Integrale bleibt also auch regulär, wenn wir den Kreis um $\mathfrak{S}$ und die Integrationswege s_0 und σ_0 unbegrenzt zusammenschrumpfen lassen, und kommt somit beim Übergang zur Grenze in Fortfall. Folglich erhalten wir bis auf ein Integral, welches bei unendlicher Abnahme des Kreises und der Wege s_0 und σ_0 beliebig klein wird:

$$5\text{b)} \qquad I(s_0, \sigma_0) = \int\limits_{s_0} d\lg\frac{z-q_2}{z-q_1} - \int\limits_{\sigma_0} d\lg\frac{z-p_2}{z-p_1}.$$

Nun ist aber, wenn $\mathfrak{P}$ ein ganz beliebiger Punkt und z der zugehörige Wert auf der ebenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ ist:

$$\lg\frac{z-p_2}{z-p_1} = \lg\frac{\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2^{(0)}}}{\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1^{(0)}}} + i\vartheta,$$

wobei $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1^{(0)}}$ und $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2^{(0)}}$ die positiv gerechneten Abstände der Punkte sind und ϑ den Winkel $\mathfrak{P}_1^{(0)}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2^{(0)}$ bedeutet; dieser Winkel ist das Mafs für die Drehung eines Halbstrahles aus der Lage $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1^{(0)}$ in die Lage $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2^{(0)}$ und mufs bei Bewegung des Punktes $\mathfrak{P}$ stetig verändert werden. Berücksichtigen wir also, dafs die Summe der gegenüberliegenden Winkel des Kreisvierecks $\sphericalangle\,\mathfrak{P}_1^{(0)} + \sphericalangle\,\mathfrak{P}_2^{(0)}$, $\sphericalangle\,\mathfrak{Q}_1^{(0)} + \sphericalangle\,\mathfrak{Q}_2^{(0)}$

je 180^0 betragen, so finden wir für die in (5b) auftretenden Integrale die Gleichungen

$$\int\limits_{s_0} d \lg \frac{z - q_2}{z - q_1} = \lg \frac{\overline{\mathfrak{P}_1^{(0)}\, \mathfrak{Q}_1^{(0)}}}{\overline{\mathfrak{P}_1^{(0)}\, \mathfrak{Q}_2^{(0)}}} \, \frac{\overline{\mathfrak{P}_2^{(0)}\, \mathfrak{Q}_2^{(0)}}}{\overline{\mathfrak{P}_2^{(0)}\, \mathfrak{Q}_1^{(0)}}} - i\pi$$

$$\int\limits_{\sigma_0} d \lg \frac{z - p_2}{z - p_1} = \lg \frac{\overline{\mathfrak{Q}_1^{(0)}\, \mathfrak{P}_1^{(0)}}}{\overline{\mathfrak{Q}_1^{(0)}\, \mathfrak{P}_2^{(0)}}} \, \frac{\overline{\mathfrak{Q}_2^{(0)}\, \mathfrak{P}_2^{(0)}}}{\overline{\mathfrak{Q}_2^{(0)}\, \mathfrak{P}_1^{(0)}}} + i\pi.$$

Da aber in beiden Integralen die reellen Teile gleich sind, so ergiebt sich für die Differenz

$$I(s_0, \sigma_0) = \int\limits_{s_0} d \lg \frac{z - q_2}{z - q_1} - \int\limits_{\sigma_0} d \lg \frac{z - p_2}{z - p_1} = -2\pi i,$$

während dieselbe Differenz offenbar den Wert $+2\pi i$ erhalten würde, falls der Übergang von s über σ vom linken zum rechten Ufer, also in positivem Sinne erfolgen würde.

Wenn also die Kurven s und σ einen Schnittpunkt haben, so ist die Integraldifferenz $I(s, \sigma)$ nicht, wie vorher, gleich Null, sondern, den beiden Fällen entsprechend, die unterschieden werden mufsten, gleich $\pm 2\pi i$. Durch Verallgemeinerung dieser Betrachtung, für den Fall, dafs sich die beiden Kurven in beliebig vielen Punkten schneiden, gelangen wir jetzt zu dem folgenden fundamentalen Satze, durch welchen die Wirkung der Vertauschung von Parameter und Argument bei Integralen dritter Gattung unter Aufhebung aller einschränkenden Voraussetzungen festgestellt wird:

Setzen wir, wie vorher, die Wege $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = s$ und $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 = \sigma$, und

$$\int d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = \int \big(\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1)\big)\, dz + \sum_{i=1}^{p} \int dw_i \cdot \int\limits_{\sigma} dt_i,$$

so ist die Differenz

$$I(s, \sigma) = \int\limits_{s} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} - \int\limits_{\sigma} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2} = 2\pi i (s, \sigma), \tag{6}$$

wobei das Zeichen (s, σ) eine ganze Zahl bedeutet, welche gleich der Anzahl der positiven Übergänge des Weges s über den Weg σ, vermindert um die Anzahl der negativen Übergänge ist; hierbei ist ein Übergang als positiv oder negativ anzusehen, je nachdem er vom linken zum rechten oder vom rechten zum linken Ufer stattfindet.

Die Zahl (s, σ), welche kurz als „die Anzahl der Übergänge von s über σ" bezeichnet werden kann, wenn man das Wort „Anzahl" nicht im absoluten, sondern im relativen Sinne nimmt, soll unter Anlehnung an eine von Kronecker bei einer ähnlichen Untersuchung eingeführte Terminologie die „Charakteristik der beiden Wege s und σ" genannt werden. Aus ihrer Bedeutung sowohl wie aus obiger Fundamentalgleichung geht unmittelbar hervor, dafs

$$(s, \sigma) = -(\sigma, s)$$

ist, woraus

$$(s, s) = 0$$

folgt. Die letzte Formel kann man geometrisch in der Weise verstehen, dafs man linkes und rechtes Ufer von s als nebeneinanderlaufende Wege scheidet; dann geht die Richtigkeit der Formel wenigstens für Wege, die sich nicht schneiden, eben daraus hervor, dafs diese beiden Ufer sich nirgends durchsetzen, der allgemeinere Fall kann aber auf den spezielleren zurückgeführt werden. Ferner ist für die Charakteristik ebenso wie vorher für die Integraldifferenz $I(s, \sigma)$:

$$(s, \sigma' + \sigma'') = (s, \sigma') + (s, \sigma''),$$
$$(s' + s'', \sigma) = (s', \sigma) + (s'', \sigma).$$

Für die Folge liegt die Bedeutung obiger Fundamentalgleichung (3) eben darin, dafs durch sie die ganze Zahl (s, σ), welche eine wechselseitige Beziehung der beiden Wege s und σ repräsentiert, als eine Kombination von Integralen dargestellt werden kann, welche über den einen oder den anderen der beiden Wege erstreckt sind. In dieser Auffassung haben wir jene Gleichung vollständig zu diskutieren und gelangen so zum Verständnis der der Riemannschen Fläche eigentümlichen Zusammenhangsverhältnisse.

§ 4.

Wenn wir in der Gleichung (6) des vorigen Abschnittes die Wege s und σ beide als geschlossen voraussetzen, so stellt (s, σ) die Charakteristik zweier Periodenwege dar, und es kommen auf der linken Seite obiger Gleichung die Integrale dritter Gattung in Fortfall, da z. B. $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2$, also

$$\int \left(\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1)\right) dz = 0$$

ist. Daher nimmt alsdann die Gleichung (6) die folgende Gestalt an:

$$1)\quad \int\limits_{\sigma} dt_1 \int\limits_{s} dw_1 + \cdots + \int\limits_{\sigma} dt_p \int\limits_{s} dw_p - \int\limits_{\sigma} dw_1 \int\limits_{s} dt_1 - \cdots - \int\limits_{\sigma} dw_p \int\limits_{s} dt_p$$
$$= 2\pi i (s, \sigma),$$

oder in leicht verständlicher Abkürzung, wenn z. B.

$$\int_{\sigma} dt_\alpha = t_\alpha^{(\sigma)}$$

gesetzt wird:

$$\text{1a)} \quad t_1^{(\sigma)} w_1^{(s)} + \cdots + t_p^{(\sigma)} w_p^{(s)} - w_1^{(\sigma)} t_1^{(s)} - \cdots - w_p^{(\sigma)} t_p^{(s)} = 2\pi i (s, \sigma).$$

Diese Gleichung giebt eine bilineare Beziehung zwischen den Perioden der $2p$ Fundamentalintegrale

$$t_1, \quad t_2, \ldots t_p, \quad w_1, \quad w_2, \ldots w_p,$$

gebildet für irgend zwei Periodenwege s und σ, und umgekehrt stellt sie die Charakteristik zweier Periodenwege durch die zugehörigen Perioden der Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung dar. Mit ihrer Hilfe soll alsdann im nächsten Kapitel die Gesamtheit aller geschlossenen Wege auf der Riemannschen Fläche untersucht und der Einflufs bestimmt werden, den eine Zerschneidung der Fläche durch geschlossene Kurven auf den Zusammenhang der Fläche ausübt.

Jetzt wollen wir zuvörderst eine besondere Art von geschlossenen Wegen s betrachten, nämlich diejenigen, für welche die $2p$ Perioden

$$t_1^{(s)}, \quad t_2^{(s)}, \ldots t_p^{(s)}, \quad w_1^{(s)}, \quad w_2^{(s)}, \ldots w_p^{(s)}$$

sämtlich gleich Null sind. Nach dem auf S. 574 aufgestellten Satze besitzt alsdann jedes Integral mit blofs polaren Unstetigkeiten, erstreckt über den Weg s, den Wert Null. Denn jedes derartige Integral ist in der Form darstellbar:

$$t = a_1 t_1 + \cdots + a_p t_p + b_1 w_1 + \cdots + b_p w_p + \varphi(z, u),$$

wo φ eine Funktion des Körpers bedeutet; folglich ist die zugehörige Periode

$$t^{(s)} = a_1 t_1^{(s)} + \cdots + a_p t_p^{(s)} + b_1 w_1^{(s)} + \cdots + b_p w_p^{(s)} = 0.$$

Wir stellen nun den geschlossenen Weg s, von dem wir zur Vereinfachung des Folgenden noch weiter annehmen, dafs er sich nicht selbst durchkreuzen möge, mit einem zweiten beliebigen, geschlossenen oder ungeschlossenen Weg σ zusammen und bringen die bewiesenen Formeln zur Anwendung. Ist zunächst σ ein ebenfalls geschlossener, aber sonst beliebiger Weg, so ist nach der Gleichung (1) unter der gegebenen Voraussetzung

$$(s, \sigma) = 0.$$

Hieraus folgt, dafs die Anzahl der positiven Übergänge von σ über s ebenso grofs wie die Zahl der negativen ist; wenn also für einen geschlossenen Weg s die Perioden der Integrale erster und zweiter

Gattung sämtlich verschwinden, so mufs jeder beliebige zweite geschlossene Weg den gegebenen ebenso oft von links nach rechts, wie von rechts nach links überschreiten.

Wenn aber zweitens der Weg $\sigma = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2$ ungeschlossen ist, so ergiebt die Anwendung der Formel (6) auf S. 608, da das Integral $\int_\sigma d\tilde{\omega}_{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2}$ in Fortfall kommt:

$$2) \qquad 2\pi i(s, \sigma) = \int_s d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = \int_s \big(\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1)\big)\, dz.$$

Hier aber ist das Integral in diesem Falle nur von den Punkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$, nicht aber von dem Wege σ abhängig, der von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ führt; das gleiche gilt also auch von der Zahl (s, σ), welche somit, wie auch der Weg σ gewählt werden möge, immer nur von den Endpunkten dieses Weges, nicht aber von seinem Verlaufe abhängig ist. Der Wert der Charakteristik ist also in diesem Falle bei festem s und veränderlichem $\sigma = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2$ nur von der Lage der Punkte $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ bedingt und ist überdies, wie wir nun noch zeigen wollen, stets entweder 0 oder ± 1.

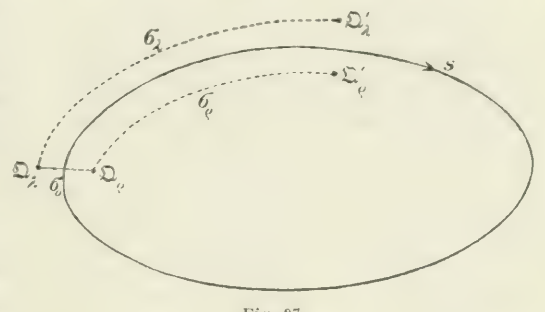


Fig. 37.

Sind nämlich zunächst (Fig. 37) $\mathfrak{Q}_\lambda$ und $\mathfrak{Q}'_\lambda$ zwei Punkte auf dem linken Ufer von s, so ist offenbar, wenn man an diesem $\sigma_\lambda = \mathfrak{Q}_\lambda \mathfrak{Q}'_\lambda$ entlang führt:

$$3) \qquad (s, \mathfrak{Q}_\lambda \mathfrak{Q}'_\lambda) = (s, \sigma_\lambda) = 0,$$

und ebenso ist für zwei Punkte des rechten Ufers

$$3a) \qquad (s, \mathfrak{Q}_\varrho \mathfrak{Q}'_\varrho) = (s, \sigma_\varrho) = 0.$$

Hingegen ist für zwei gegenüberliegende Punkte $\mathfrak{Q}_\lambda$ und $\mathfrak{Q}_\varrho$

$$4) \qquad (s, \mathfrak{Q}_\lambda \mathfrak{Q}_\varrho) = (s, \sigma_0) = +1, \quad (s, \mathfrak{Q}_\varrho \mathfrak{Q}_\lambda) = -1.$$

Ferner kann man offenbar von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$ der Fläche, ohne s zu durchkreuzen, einen Weg σ entweder nach einem Punkte $\mathfrak{Q}_\lambda$ des linken oder nach einem Punkte $\mathfrak{Q}_\varrho$ des rechten Ufers von s heranführen; daher ist diesen beiden Fällen entsprechend entweder

5) $$(s, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_\lambda) = 0 \quad \text{und} \quad (s, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_\varrho) = 1$$

oder

5a) $$(s, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_\varrho) = 0 \quad \text{und} \quad (s, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_\lambda) = -1.$$

Daher zerfallen die sämtlichen Punkte $\mathfrak{P}$ der Fläche in zwei Klassen, je nachdem die erste oder die zweite der beiden Charakteristiken

$$(s, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_\lambda) \quad \text{und} \quad (s, \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_\varrho)$$

verschwindet, wobei es auf Grund der Gleichungen (3) und (3a) ganz gleichgiltig ist, welche gegenüberliegenden Randpunkte $\mathfrak{Q}_\lambda$ und $\mathfrak{Q}_\varrho$ man zur Anwendung bringt. Wir wollen daher die eine Klasse von Punkten die Klasse der „inneren" Punkte, die andere die Klasse der „äufseren" Punkte nennen und durch $\mathfrak{P}_\lambda$ resp. $\mathfrak{P}_\varrho$ bezeichnen; hierbei ist zu beachten, dafs der Nachdruck nur auf der Gegenüberstellung der beiden Punktklassen liegt und dafs durch Umkehrung der Wegrichtung von s die Klasse der inneren mit der der äufseren Punkte jederzeit vertauscht werden kann. Dann ist für zwei innere Punkte $\mathfrak{P}_\lambda$ und $\mathfrak{P}'_\lambda$:

$$(s, \mathfrak{P}_\lambda \mathfrak{Q}_\lambda) = 0, \quad (s, \mathfrak{Q}_\lambda \mathfrak{P}'_\lambda) = 0,$$

also

$$(s, \mathfrak{P}_\lambda \mathfrak{P}'_\lambda) = 0,$$

und ebenso für zwei äufsere Punkte

$$(s, \mathfrak{P}_\varrho \mathfrak{P}'_\varrho) = 0.$$

Hingegen ist für zwei Punkte $\mathfrak{P}_\lambda$ und $\mathfrak{P}_\varrho$ verschiedener Klasse

$$(s, \mathfrak{P}_\lambda \mathfrak{Q}_\lambda) = 0, \quad (s, \mathfrak{Q}_\lambda \mathfrak{P}_\varrho) = 1,$$

also

$$(s, \mathfrak{P}_\lambda \mathfrak{P}_\varrho) = 1, \quad (s, \mathfrak{P}_\varrho \mathfrak{P}_\lambda) = -1,$$

und andere als die Werte $0, \pm 1$ kann die Charakteristik überhaupt nicht erhalten. Man kann also zufolge dieser Betrachtungen zwei innere oder zwei äufsere Punkte so miteinander verbinden, dafs der Weg s nicht getroffen wird; einen inneren und einen äufseren Punkt aber so, dafs der Periodenweg s einmal in positivem Sinne durchsetzt wird.

Die bewiesenen Relationen für Charakteristiken zeigen uns, dafs unter den angegebenen Voraussetzungen der geschlossene Weg s auf der Riemannschen Fläche dieselben einfachen Eigenschaften besitzt, welche für einen geschlossenen, sich nicht schneidenden Weg auf der schlichten Kugelfläche als selbstverständlich angesehen werden. Wir können daher das gewonnene Resultat in folgendem Satze vollständig zusammenfassen:

Wenn für einen geschlossenen, sich nicht schneidenden Weg s die Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung sämtlich Null sind, so wird durch den Schnitt s die Riemannsche Fläche in zwei getrennte Teile zerlegt, welche das Innere und das Äufsere der Kurve genannt werden können und welche aus der Klasse der inneren Punkte $\mathfrak{P}_\lambda$ und der äufseren Punkte $\mathfrak{P}_\varrho$ bestehen.

Wenn das Geschlecht $p = 0$ ist, so hat jeder geschlossene Weg die Eigenschaften, die wir hier vorausgesetzt haben; dann zerfällt also die Fläche durch Ausführung irgend eines geschlossenen Schnittes in getrennte Teile. Wenn aber p positiv ist, so müssen wir nunmehr in der folgenden Vorlesung auch diejenigen geschlossenen Wege in Betracht ziehen, für welche sich von Null verschiedene Perioden einstellen und die Charakteristiken daher ganz anderen Gesetzen unterworfen sind. Hierzu ist aber eine eingehende Diskussion der Gleichung (1) unter allgemeinsten Annahmen für die Wege s und σ erforderlich.

Alle die hier bewiesenen Eigenschaften von Integrationswegen sind zunächst auf eine bestimmte Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_z$ bezogen. Es ist aber evident, dafs sie alle bestehen bleiben, wenn wir eine andere Variable x des Körpers $K(z, u)$ einführen und die Fläche $\mathfrak{R}_z$ umkehrbar eindeutig auf die Fläche $\mathfrak{R}_x$ abbilden. Die jetzt und in der Folge festzustellenden Zusammenhangseigenschaften der Riemannschen Flächen sind also in keiner Weise an eine bestimmte Fläche gebunden, sondern allen den zu den verschiedenen Gröfsen des Körpers gehörigen Flächen in gleicher Weise eigentümlich.

Fünfunddreifsigste Vorlesung.

Einteilung der Wege auf der Riemannschen Fläche in Klassen. — Die Hauptklasse. — Geschlossene und ungeschlossene Wege. — Addition und Subtraktion von Wegen. — Linear abhängige und unabhängige Periodenwege. — Der Rang eines Systemes von Perioden. — Fundamentalsysteme von Periodenwegen. — Notwendige und hinreichende Bedingungen für abhängige und unabhängige Systeme. — Die Charakteristikenform. — Bilineare Formen; ihre Transformation. — Transformation ganzzahliger alternierender Formen durch ganzzahlige Substitutionen. — Canonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche.

§ 1.

Gehen wir jetzt dazu über, die Gesamtheit der Wege auf der Riemannschen Fläche zu untersuchen, so entnehmen wir aus den Ergebnissen der vorigen Vorlesung die Berechtigung, zunächst eine besondere Art auszuzeichnen, nämlich alle diejenigen geschlossenen Wege s, für welche die $2p$ Hauptintegrale

$$\int_s dt_1, \quad \int_s dt_2, \ldots \int_s dt_p, \quad \int_s dw_1, \quad \int_s dw_2, \ldots \int_s dw_p$$

verschwinden und welche daher nach dem Satze auf S. 613 die Riemannsche Fläche zerstückeln. Alle diese Wege vereinigen wir in eine Klasse von Wegen, welche wir auch hier, analog wie bei der Einteilung der Divisoren, als die Hauptklasse bezeichnen.

Betrachten wir jetzt irgend zwei geschlossene oder ungeschlossene Wege a und b auf der Fläche, so können wir sie durch Addition zu einem einzigen Wege $a+b$ verbinden, wenn der Endpunkt von a zugleich der Anfangspunkt von b ist; ebenso können wir sie durch Subtraktion zu einem einzigen Wege $a-b$ zusammenschliefsen, wenn sie gleichen Endpunkt haben. Bedeutet also (0) einen Weg, der auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, so haben wir unter dem Wege $-b = 0 - b$ stets den in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg b zu verstehen. Wir definieren nun zwei Wege a und b als äquivalent und bezeichnen dies durch $a \sim b$, wenn die Differenz $a-b$ zur Hauptklasse gehört. Die Gesamtheit aller einander äquivalenten Wege vereinigen wir, ebenfalls ganz wie bei den Divisoren, in eine Wegklasse.

Die hier gegebene Definition genügt offenbar den beiden Bedingungen, welche an jede Äquivalenz gestellt werden müssen. Ist

nämlich $a \sim b$, so ist auch $b \sim a$; denn wenn der Weg $a - b$ zur Hauptklasse gehört, so gilt das gleiche auch von dem umgekehrten Wege $b - a$. Ist ferner $a \sim b$ und $b \sim c$, so ist auch $a \sim c$; denn wenn $a - b$ und $b - c$ in der Hauptklasse enthalten sind, so gehört zu ihr auch der aus beiden zusammengesetzte Weg

$$a - c = (a - b) + (b - c).$$

Die in der Hauptklasse enthaltenen Wege sind sämtlich dem Wege (0) äquivalent; daher sind alle Wege der Hauptklasse auch einander äquivalent und bilden also auch eine Klasse, wenn wir die zuletzt gegebene allgemeine Definition dieses Begriffes zu Grunde legen.

Ist ferner $a \sim a'$ und $b \sim b'$, so ist auch $a \pm b \sim a' \pm b'$. Wir können daher Wegklassen ebenso addieren und subtrahieren, wie wir früher Divisorenklassen multiplizieren und dividieren konnten.

Damit zwei Wege a und b äquivalent sind, müssen der Definition zufolge die $2p$ Gleichungen

$$1)\quad \begin{array}{l} \int\limits_a dt_1 = \int\limits_b dt_1, \quad \int\limits_a dt_2 = \int\limits_b dt_2, \ldots \int\limits_a dt_p = \int\limits_b dt_p \\ \int\limits_a dw_1 = \int\limits_b dw_1, \quad \int\limits_a dw_2 = \int\limits_b dw_2, \ldots \int\limits_a dw_p = \int\limits_b dw_p \end{array}$$

erfüllt sein, wobei natürlich die $2p$ Hauptintegrale $t_1, t_2, \ldots t_p, w_1, w_2, \ldots w_p$ auch durch irgend ein anderes Fundamentalsystem für die allgemeinen Integrale zweiter Gattung ersetzt werden können. Aufserdem ergeben sich aus der Erklärung der Differenz zweier Wege noch weitere Bedingungen für ihre Anfangs- und Endpunkte; bei Feststellung derselben ist es aber zweckmäfsig, die ungeschlossenen Wege von den geschlossenen zu unterscheiden.

Wenn der Weg a ungeschlossen ist, so mufs ein ihm äquivalenter Weg b denselben Endpunkt besitzen, damit $a - b$ ein einziger Weg ist, und er mufs auch denselben Anfangspunkt haben, weil $a - b$ jedenfalls geschlossen sein mufs. Hieraus folgt:

Ein ungeschlossener Weg $a = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ ist nur solchen Wegen b äquivalent, welche denselben Anfangs- und Endpunkt besitzen und für welche die $2p$ Gleichungen (1) erfüllt sind. Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Die Gesamtheit der von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ führenden Wege wird durch die hinzutretenden Bedingungsgleichungen (1) in Klassen geschieden.

Anders liegt die Sache bei den geschlossenen Wegen, weil bei einem solchen jeder beliebige auf ihm gelegene Punkt als gleichzeitiger Anfangs- und Endpunkt angesehen werden kann. Um also zwei geschlossene Wege a und b durch Addition oder Subtraktion zu einem einzigen Wege $a \pm b$ vereinigen zu können, ist es nur erforderlich, dafs sie einen Punkt gemein haben, und da man zwischen irgend zwei geschlossene Wege a und c stets und in mannigfaltigster Weise einen geschlossenen Weg b zwischenschalten kann, welcher mit beiden einen Punkt gemein hat, so kann man stets die Differenz

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

als einen einzigen Weg erhalten; freilich müssen alsdann, damit die Addition und Subtraktion geschlossener Wege in uneingeschränkter Allgemeinheit vollzogen werden kann, auch solche Wege zugelassen werden, welche sich selber schneiden oder in einzelnen Teilen mehrfach durchlaufen werden. Wir wollen nun in der That, wenigstens solange es sich um die allgemeine Gruppierung aller möglichen Periodenwege handelt, alle nur denkbaren geschlossenen Wege in die Untersuchung hineinziehen; dann dürfen wir bei diesen von allen weiteren Lagenbedingungen absehen und feststellen:

> Für geschlossene Wege a und b bilden die $2p$ Gleichungen (1) allein ein System von notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Äquivalenz. Zwei geschlossene Wege können stets zu einem einzigen vereinigt werden.

Die einfachste Art, von einem gegebenen Wege zu einem äquivalenten überzugehen, besteht in einer hinreichend kleinen Deformation durch Verschiebung der einzelnen Punkte, bei ungeschlossenen Wegen unter Festhaltung der Grenzpunkte, bei geschlossenen ohne jede weitere Einschränkung; es ist klar, dafs alsdann die Gleichungen (1) erfüllt sind. Durch derartige Deformationen, die nichts Wesentliches verändern, können wir bei der Hinleitung der Integrationswege vor allem auch etwaige Unstetigkeitspunkte der Integrale, mit denen wir zu thun haben, z. B. den Punkt $\mathfrak{P}_x$ in der ersten Reihe der Integrale (1), vermeiden. Wir können und wollen daher jetzt und später von vornherein die Wege von solcher Beschaffenheit annehmen, dafs in allen ihren Punkten die auftretenden Integrale endlich bleiben.

Wir können ferner in dem Falle, dafs ein ganzes Stück eines Integrationsweges mehrfach durchlaufen wird, stets durch kleine Deformation bewirken, dafs der Weg nur noch mehrfache Punkte, aber keine mehrfachen Linienteile besitzt. Daher dürfen wir ohne jede Beeinträchtigung der Allgemeinheit Wege mit mehrfachen Linien-

teilen ausschliefsen; dies aber erweist sich als zweckmäfsig, weil anderenfalls bei Bestimmung der Charakteristiken Unbequemlichkeiten eintreten können.

Im folgenden handelt es sich zunächst darum, einen vollständigen Überblick über die gewonnene Einteilung der Wege in Klassen zu gewinnen. Dabei sind überall äquivalente Wege als nicht wesentlich verschieden anzusehen, und es ist daher auch z. B. ganz gleichgiltig, in welcher Weise zwei Periodenwege zu einem einzigen vereinigt werden. Für äquivalente Wege erhalten nicht blofs die Fundamentalintegrale

$$t_1, t_2, \ldots t_p, \quad w_1, w_2 \ldots w_p,$$

sondern zufolge des Satzes auf S. 574 überhaupt alle Integrale erster und zweiter Gattung denselben Wert; die Integrale dritter Gattung können aber noch verschieden ausfallen.

Bei dieser Untersuchung können wir uns von nun ab ganz auf geschlossene Wege beschränken, weil die Eigenschaften ungeschlossener Wege auf jene zurückführbar sind; denn zwei ungeschlossene Wege a und b gehören ja nur dann in dieselbe Klasse, wenn sie gleichen Anfangs- und Endpunkt haben, der Weg $a - b$ also geschlossen ist. Ist also erst die Übersicht über die sämtlichen Klassen geschlossener Wege gewonnen, so sind damit auch die ungeschlossenen erledigt.

§ 2.

Sind $s_1, s_2, \ldots s_m$ irgend welche Periodenwege, $x_1, x_2, \ldots x_m$ aber positive oder negative ganze Zahlen, so ist nach dem vorigen Abschnitte auch

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_m s_m \tag{1}$$

ein geschlossener Weg, der durch Addition und Subtraktion aus $s_1, s_2, \ldots s_m$ entsteht und dessen Klasse überdies durch die Klassen von $s_1, s_2, \ldots s_m$ und die Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_m$ völlig bestimmt ist. Für die Einteilung der Wege auf der Riemannschen Fläche ist es nun von entscheidender Bedeutung, ob für ein gegebenes System von m Wegen $s_1, s_2, \ldots s_m$ die ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_m$ so bestimmt werden können, dafs sie nicht alle Null sind und s zur Hauptklasse gehört, also

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_m s_m \sim 0 \tag{1a}$$

ist. In diesem Falle nennen wir die Wege linear abhängig; wenn aber die Äquivalenz (1a) nur durch das selbstverständliche Lösungssystem $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ befriedigt werden kann, so bezeichnen wir sie als ein System von m unabhängigen Periodenwegen.

Um nun die Frage zur Entscheidung zu bringen, ob ein gegebenes System ein unabhängiges ist oder nicht, bilden wir die zugehörigen Perioden der obigen Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung. Setzen wir jetzt, wie auf S. 574:

$$t_1 = t_1, t_2 = t_2, \ldots t_p = t_p, \quad w_1 = t_{p+1}, \quad w_2 = t_{p+2}, \ldots w_p = t_{2p},$$

weil die Integrale erster Gattung hier ganz gleichmäfsig mit denen der zweiten auftreten, und bezeichnen die zu dem Wege s_α gehörigen Perioden dieser Integrale der Reihe nach mit

$$t_{1\alpha}, \quad t_{2\alpha}, \ldots t_{p\alpha}, \quad t_{p+1,\alpha}, \quad t_{p+2,\alpha}, \ldots t_{2p,\alpha},$$

so erhalten wir das folgende zu dem Wegsystem $s_1, s_2, \ldots s_m$ gehörige Periodensystem:

$$2)\qquad \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} & \ldots t_{p1} & t_{p+1,1} & t_{p+2,1} & \ldots t_{2p,1} \\ t_{12} & t_{22} & \ldots t_{p2} & t_{p+1,2} & t_{p+2,2} & \ldots t_{2p,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1m} & t_{2m} & \ldots t_{pm} & t_{p+1,m} & t_{p+2,m} & \ldots t_{2p,m} \end{vmatrix} = (T_m).$$

Zwischen diesen Gröfsen bestehen nach der Gleichung (1) auf S. 609 eine Anzahl bilinearer Relationen, welche jetzt die folgende Gestalt erhalten:

$$3)\qquad t_{1\alpha}t_{p+1,\beta} + t_{2\alpha}t_{p+2,\beta} + \cdots + t_{p\alpha}t_{2p,\beta} - t_{p+1,\alpha}t_{1\beta} - t_{p+2,\alpha}t_{2\beta} - \cdots \\ - t_{2p,\alpha}t_{p\beta} = -2\pi i c_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m),$$

worin $c_{\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha}$ eine ganze Zahl, nämlich die Charakteristik (s_α, s_β) ist. Die Zahl dieser Bilinearrelationen ist, wenn man nur die wirklich verschiedenen und die nicht identisch erfüllten Gleichungen abzählt, gleich $\frac{1}{2}m(m-1)$, weil man alsdann für (α, β) nur die Kombinationen ohne Wiederholungen zu nehmen braucht.

Soll nun der Weg

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_m s_m$$

zur Hauptklasse gehören, so müssen die Perioden der $2p$ Hauptintegrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$ für den Weg s verschwinden; es müssen also die $2p$ linearen homogenen Gleichungen

$$4)\qquad \begin{array}{l} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1m}x_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{p1}x_1 + t_{p2}x_2 + \cdots + t_{pm}x_m = 0 \\ t_{p+1,1}x_1 + t_{p+1,2}x_2 + \cdots + t_{p+1,m}x_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{2p,1}x_1 + t_{2p,2}x_2 + \cdots + t_{2p,m}x_m = 0 \end{array}$$

eine eigentliche Lösung in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_m$ haben. Ist aber der Rang des zugehörigen Koeffizientensystems T_m, welches ja aus (2)

blofs durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen hervorgeht, gleich m, d. h. verschwinden in der Matrix T_m nicht alle Determinanten m^{ter} Ordnung, so besitzt das Gleichungssystem (4) überhaupt keine Lösung; die Wege $s_1, s_2, \ldots s_m$ sind also in diesem Falle linear unabhängig.

Wenn andererseits der Rang des Systems T_m kleiner als m ist, so besitzt das Gleichungssystem eine eigentliche Lösung, und es wird sich in der weiteren Verfolgung dieses Gedankenganges herausstellen, dafs dann auch stets ein ganzzahliges Lösungssystem der Gleichung (4) existiert. Damit wird dann also bewiesen sein, dafs die Anzahl der in dem Wegsystem $(s_1, s_2, \ldots s_m)$ enthaltenen linear unabhängigen Wege gleich dem Range der Matrix T ist. Dieses merkwürdige Resultat, dafs die vollständige Lösung des Gleichungssystems (4), wenn überhaupt, so auch allemal in ganzen Zahlen erfolgen kann, läfst sich aber nicht direkt, sondern nur schrittweise durch Berücksichtigung der Bedeutung der Gröfsen t_{gh} und der zwischen ihnen bestehenden algebraischen Beziehungen (3) erschliefsen.

Zunächst ist ersichtlich, dafs der Rang des Koeffizientensystems T_m nur dann gleich m sein kann, wenn $m \leqq 2p$ ist. Nehmen wir den äufsersten Fall $m = 2p$, so wollen wir zunächst zeigen, dafs sich der Maximalrang $2p$ auch wirklich erreichen läfst; d. h. wir wollen beweisen, dafs $2p$ Periodenwege $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ so gewählt werden können, dafs die Determinante des zugehörigen Periodensystems der Hauptintegrale

$$5)\qquad \begin{array}{c|cccccc} & s_1 & s_2 & \ldots s_p & s_{p+1} & \ldots s_{2p} \\ \hline t_1 & t_{11} & t_{12} & \ldots t_{1p} & t_{1,p+1} & \ldots t_{1,2p} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ t_p & t_{p1} & t_{p2} & \ldots t_{pp} & t_{p,p+1} & \ldots t_{p,2p} \\ t_{p+1} & t_{p+1,1} & t_{p+1,2} & \ldots t_{p+1,p} & t_{p+1,p+1} & \ldots t_{p+1,2p} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ t_{2p} & t_{2p,1} & t_{2p,2} & \ldots t_{2p,p} & t_{2p,p+1} & \ldots t_{2p,2p} \end{array} = (T)$$

von Null verschieden ist. Es ist aber klar, dafs wir für diesen Zweck auch die $2p$ Integrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$ durch irgend ein anderes Fundamentalsystem $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{2p}$ für die allgemeinen Integrale zweiter Gattung ersetzen können; denn ist

$$\tau_h = a_{h1} t_1 + \cdots + a_{h,2p} t_{2p} + \varphi_h(z, u) \qquad (h = 1, 2, \ldots 2p),$$

wo die Determinante $|a_{hi}|$ der konstanten Koeffizienten a_{hi} nach S. 574 nicht verschwindet, so folgt

$$\tau_{hi} = a_{h1} t_{1i} + \cdots + a_{h,2p} t_{2p,i},$$

also nach dem Multiplikationssatze

$$|\tau_{hi}| = |a_{hi}|\,|t_{hi}| \qquad (h, i = 1, 2, \ldots 2p),$$

und die Determinanten $|\tau_{hi}|$ und $|t_{hi}|$ sind also gleichzeitig Null oder von Null verschieden. Wir können also auch für diesen Nachweis das System $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$ beliebig durch elementare Transformationen verändern, bei denen nur ein Integral umgeformt und z. B. t_i durch $t_i + \lambda t_k$ ersetzt wird, wobei λ eine beliebige Konstante bedeutet. Diese Elementartransformation ist dieselbe, welche wir bereits in § 2 der elften Vorlesung angewendet haben, nur dafs es sich hier, noch einfacher als damals, ausschliefslich um Systeme mit konstanten Elementen handelt.

Betrachten wir nun zunächst das erste Integral t_1, so giebt es jedenfalls einen geschlossenen Weg s_1, für welchen die zugehörige Periode t_{11} nicht verschwindet; denn wenn für alle geschlossenen Wege die entsprechenden Perioden Null wären, so würde (s. S. 324) die Funktion $t_1(\mathfrak{P})$ dem Körper K angehören, was unserer Annahme widerspricht. Nach Auswahl des Weges s_1 ist in dem quadratischen Systeme (5) die erste Kolonne gegeben; wir können uns aber durch elementare Transformation des Fundamentalsystems $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$ so einrichten, dafs alle Elemente der ersten Kolonne mit Ausnahme des ersten Null sind. Ersetzen wir nämlich für $i > 1$ das Integral t_i durch

$$\bar{t}_i = t_i - \frac{t_{i1}}{t_{11}} t_1,$$

so wird in der That die zu s_1 gehörige Periode von $\bar{t}_i$:

$$\bar{t}_{i1} = t_{i1} - \frac{t_{i1}}{t_{11}} t_{11} = 0.$$

In dem so veränderten System besitzt jedenfalls t_2 wieder eine von Null verschiedene Periode, und da die zu s_1 gehörige Periode t_{21} gleich Null ist, so giebt es einen zweiten geschlossenen Weg s_2, für welchen die zugehörige Periode t_{22} nicht verschwindet; nach Auswahl des Weges s_2 sind die ersten beiden Kolonnen des Systems T gegeben. Wir können dann weiter die Integrale $t_3, \ldots t_{2p}$ so verändern, dafs ihre Perioden nicht blofs für s_1, sondern auch für s_2 Null sind; zu diesem Zwecke brauchen wir blofs für $i > 2$ das Integral t_i durch

$$\bar{t}_i = t_i - \frac{t_{i2}}{t_{22}} t_2$$

zu ersetzen, wodurch alle jene Perioden $\bar{t}_{i1}$ und $\bar{t}_{i2}$ Null werden. Nachdem dies geschehen, können wir wieder einen dritten Periodenweg s_3 wählen, für welchen t_{33} von Null verschieden ist; denn da die Perioden von t_3 für s_1 und s_2 verschwinden, so mufs es einen weiteren Weg s_3 geben,

der eine von Null verschiedene Periode liefert; wir können dann weiter $t_4, \ldots t_{2p}$ so transformieren, dafs alle ihre Perioden für s_1, s_2, s_3 Null sind. So fortgehend können wir successive die $2p$ Periodenwege $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ und die $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$ so bestimmen, dafs in dem quadratischen System (5) alle Elemente unterhalb der Diagonale verschwinden, während die Diagonalelemente von Null verschieden sind. Dann aber ist auch die Determinante

$$|t_{gh}| = t_{11}\, t_{22} \ldots t_{2p,2p}$$

von Null verschieden, und diese Eigenschaft bleibt auch notwendigerweise bestehen, wenn wir von dem transformierten Fundamentalsystem der Integrale zweiter Gattung zu dem ursprünglichen wieder zurückkehren. Daraus folgt also jetzt der wichtige Satz:

Es giebt auf der Riemannschen Fläche $2p$ linear unabhängige Periodenwege $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$.

Wir wollen nun zeigen, dafs für ein solches Wegsystem nicht blofs die Determinante der Perioden $|t_{gh}|$, sondern auch die zugehörige Determinante des ganzzahligen Systems C der Charakteristiken

$$|C| = |c_{gh}| = |(s_g, s_h)| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots 2p) \tag{6}$$

von Null verschieden ist. Zu diesem Zwecke haben wir die Gleichungen (3) in Anwendung zu bringen, in welchen die Charakteristiken als bilineare Verbindungen der Perioden erscheinen, und hierdurch die Determinante $|C|$ als Produkt zweier Periodendeterminanten darzustellen. Wir bilden nämlich dasjenige quadratische System, welches aus T entsteht, indem wir die $1, 2, \ldots p^{\text{te}}$ Zeile unter Zeichenänderung resp. mit der $(p+1)^{\text{ten}}, (p+2)^{\text{ten}}, \ldots 2p^{\text{ten}}$ Zeile vertauschen und sodann noch durch Vertauschung der Zeilen und der Kolonnen zum konjugierten Systeme übergehen:

$$\begin{pmatrix} t_{p+1,1} & t_{p+2,1} & \ldots t_{2p,1} & -t_{11} & -t_{21} & \ldots -t_{p1} \\ t_{p+1,2} & t_{p+2,2} & \ldots t_{2p,2} & -t_{12} & -t_{22} & \ldots -t_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{p+1,2p} & t_{p+2,2p} & \ldots t_{2p,2p} & -t_{1,2p} & -t_{2,2p} & \ldots -t_{p,2p} \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen dieses System, indem wir uns eine spätere etwas geeignetere Notation vorbehalten, vorläufig durch T_0; seine Determinante ist offenbar gleich der Determinante von T. Setzen wir nun das System T_0 mit dem Systeme T zusammen, so ergiebt die Komposition der α^{ten} Zeile von T_0:

$$t_{p+1,\alpha},\quad t_{p+2,\alpha}, \ldots t_{2p,\alpha},\quad -t_{1\alpha},\quad -t_{2\alpha}, \ldots -t_{p\alpha}$$

mit der β^{ten} Kolonne von T:

$$t_{1\beta},\quad t_{2\beta},\ldots t_{p\beta},\quad t_{p+1.\beta},\quad t_{p+2.\beta},\ldots t_{2p.\beta}\ .$$

zufolge der Gleichungen (3) gerade die Zahl $2\pi i\, c_{\alpha\beta}$; wir erhalten also, abgesehen von dem Faktor $2\pi i$, das System C der Charakteristiken, oder wenn wir, wie auf S. 126, die Komposition der Systeme als symbolische Multiplikation bezeichnen, es ist

7) $$T_0 T = 2\pi i \cdot C.$$

Gehen wir jetzt zu den Determinanten über, so folgt aus (7):

8) $$|t_{gh}|^2 = (2\pi i)^{2p}\ |c_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots 2p)$$

oder

8a) $$|t_{gh}| = (2\pi i)^p\, |c_{gh}|^{\frac{1}{2}}.$$

Die Determinante $|c_{gh}|$ der Charakteristiken ist also wirklich, ebenso wie $|t_{gh}|$, von Null verschieden. Es folgt aber aus der Gleichung (8a) noch weiter, dafs die Determinante $|t_{gh}|$ der Perioden, abgesehen von dem Faktor $(2\pi i)^p$, ganzzahlig ist; denn da die Determinante jedes alternierenden Systems von $(2p)^2$ Elementen das Quadrat eines sogenannten Pfaffschen Ausdruckes ist, so ist $|c_{gh}|$ eine Quadratzahl. Da sich dieses für den Augenblick noch nicht wesentliche Resultat später noch einmal und ohne Anwendung obigen Determinantensatzes ergiebt, so heben wir für jetzt nur den folgenden Satz hervor:

> Wenn die $2p$ Periodenwege $s_1, \ldots s_{2p}$ in der vorher angegebenen Weise gewählt und daher linear unabhängig sind, so ist die Determinante der Charakteristiken
>
> $$|c_{gh}| = |(s_g, s_h)| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots 2p)$$
>
> von Null verschieden.

Da $c_{11} = 0$ ist und die Elemente $c_{12}, c_{13}, \ldots c_{1,2p}$ der ersten Zeile somit nicht ebenfalls alle verschwinden können, so folgt hieraus noch der Satz:

> Gehört ein Periodenweg s_1 nicht zur Hauptklasse, so giebt es stets einen zweiten s_2, welcher mit s_1 eine von Null verschiedene Charakteristik $c_{12} = (s_1, s_2)$ bildet.

Dieses Theorem, von welchem wir auch später zur Zerschneidung der Riemannschen Fläche Gebrauch machen, ist umkehrbar, weil nach S. 610 die Periodenwege der Hauptklasse mit jedem anderen geschlossenen Wege die Charakteristik Null bilden. Es legt also bereits den Wesensunterschied zwischen den eigentlichen Periodenwegen und denen der Hauptklasse in voller Deutlichkeit dar. Die letzteren haben die einfachen Eigenschaften der geschlossenen Wege in der Ebene, und da ein

Weg s_1 der Hauptklasse mit jedem beliebigen geschlossenen Wege s_2 die Charakteristik $(s_1, s_2) = 0$ bildet, so zerstücken sie auch die Riemannsche Fläche; ein eigentlicher Periodenweg hingegen zerlegt für sich allein die Riemannsche Fläche niemals in getrennte Teile, weil er stets mit einem, also auch mit unendlich vielen anderen positive Charakteristiken bildet und sich daher der Überlegung des § 4 der vorigen Vorlesung entzieht.

Nehmen wir nun zu den Wegen $s_1, \ldots s_{2p}$ einen beliebigen weiteren Periodenweg s_0 hinzu, so können wir jetzt leicht zeigen, dafs die $2p+1$ Wege $s_0, s_1, \ldots s_{2p}$ stets ein abhängiges System bilden, dafs wir also $2p+1$ ganze Zahlen $x_0, x_1, \ldots x_{2p}$ bestimmen können, die nicht alle Null sind und für welche der Weg

9) $$x_0 s_0 + x_1 s_1 + \cdots + x_{2p} s_{2p} \sim 0$$

wird. Nach den früheren Ausführungen ist es hierzu erforderlich, die $2p$ linearen Gleichungen

10) $$\begin{array}{l} t_{10}x_0 + t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1,2p}x_{2p} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{p0}x_0 + t_{p1}x_1 + t_{p2}x_2 + \cdots + t_{p,2p}x_{2p} = 0 \\ t_{p+1,0}x_0 + t_{p+1,1}x_1 + t_{p+1,2}x_2 + \cdots + t_{p+1,2p}x_{2p} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{2p,0}x_0 + t_{2p,1}x_1 + t_{2p,2}x_2 + \cdots + t_{2p,2p}x_{2p} = 0 \end{array}$$

in ganzen Zahlen aufzulösen. Das zugehörige Koeffizientensystem entsteht aus dem in (5) aufgestellten System T durch Voranstellung einer weiteren Kolonne, die aus den Perioden $t_{10}, t_{20}, \ldots t_{2p,0}$ der $2p$ Hauptintegrale für den Weg s_0 besteht, und besitzt daher ebenfalls den Rang $2p$; folglich hat das Gleichungssystem (10), wenn man von Proportionalitätsfaktoren absieht, eine einzige Lösung. Um nun zu beweisen, dafs diese Lösung ganzzahlig gewählt werden kann, multiplizieren wir die Gleichungen (10) der Reihe nach mit

$$t_{p+1,g}, \ldots t_{2p,g}, \quad -t_{1g}, \ldots -t_{pg}$$

und erhalten so durch Addition und unter Berücksichtigung der Gleichungen (3):

10a) $$c_{g0}x_0 + c_{g1}x_1 + c_{g2}x_2 + \cdots + c_{g,2p}x_{2p} = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots 2p),$$

worin jetzt die Koeffizienten $c_{g\alpha} = (s_g, s_\alpha)$ Charakteristiken, also ganze Zahlen sind. Da ferner die Determinante

$$|c_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots 2p)$$

nach dem Satze auf S. 622 von Null verschieden ist, so hat auch das Koeffizientensystem der Gleichungen (10a) den Rang $2p$; diese Gleichungen besitzen also ebenfalls eine und nur eine, natürlich ganzzahlige Lösung. Da aber jede Lösung des ersten Gleichungssystems auch das

zweite befriedigt, so sind die Systeme (10) und (10a) überhaupt äquivalent, die Lösung der Gleichungen (10) also ebenso wie die von (10a) ganzzahlig, was zu beweisen war. Es gilt also der Satz:

> Das System der $2p$ linear unabhängigen Periodenwege $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ bildet mit jedem weiteren Periodenweg s_0 ein linear abhängiges System; es heifst daher ein **Fundamentalsystem von Periodenwegen**.

Von den so bestimmten ganzen Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ kann die erste x_0 nicht Null sein, weil sonst $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ nicht linear unabhängig wären. Wir können also in der obigen zwischen $s_0, s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ bestehenden Äquivalenz (9) s_0 auf die eine Seite bringen und mit dem von Null verschiedenen Koeffizienten x_0 von s_0 durchdividieren. Hierdurch erhalten wir für den Weg s_0 und überhaupt für jeden geschlossenen Weg eine Gleichung der Form

$$11)\qquad s_0 = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_{2p} s_{2p},$$

worin $r_1, r_2, \ldots r_{2p}$ eindeutig bestimmte **rationale** Zahlen sind. Eine derartige symbolische Gleichung, welche für einen beliebigen geschlossenen Weg s_0 oder vielmehr für eine Klasse geschlossener Wege besteht, da alle äquivalenten Wege dasselbe Koeffizientensystem

$$r_1,\quad r_2, \ldots r_{2p}$$

liefern, soll überhaupt nur eine andere Schreibweise der obigen Äquivalenz (9) sein und stets in diesem Sinne verstanden werden. Hieraus folgt sofort, dafs für die Charakteristiken und die Perioden immer ganz dieselben Gleichungen mit rationalen Koeffizienten gelten wie für die Wege selbst; z. B. ist für eine Charakteristik (s_0, s_h):

$$12)\qquad \begin{aligned}(s_0, s_h) &= r_1(s_1, s_h) + r_2(s_2, s_h) + \cdots + r_{2p}(s_{2p}, s_h)\\ &= r_1 c_{1h} + r_2 c_{2h} + \cdots + r_{2p} c_{2p,h},\end{aligned}$$

und ebenso gilt für die Periode des Integrals t_h über den Weg s_0 die Gleichung

$$13)\qquad t_{h0} = r_1 t_{h1} + r_2 t_{h2} + \cdots + r_{2p} t_{h,2p}.$$

Es sei jetzt $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ ein ganz beliebiges System geschlossener Wege auf der Riemannschen Fläche. Dann bestehen die m Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= r_{11} s_1 + r_{12} s_2 + \cdots + r_{1,2p} s_{2p}\\ \sigma_2 &= r_{21} s_1 + r_{22} s_2 + \cdots + r_{2.2p} s_{2p}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_m &= r_{m1} s_1 + r_{m2} s_2 + \cdots + r_{m,2p} s_{2p},\end{aligned}$$

worin die Koeffizienten

$$(r_{\mu g})\qquad (\mu = 1, 2, \ldots m,\ g = 1, 2, \ldots 2p)$$

bestimmte rationale Zahlen sind. Da nun zwischen den Wegen $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ keine lineare ganzzahlige Relation besteht, so ergiebt sich nunmehr fast unmittelbar:

Die Zahl der in dem Systeme $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$ enthaltenen linear unabhängigen Wege ist gleich dem Range des Koeffizientensystems

$$(r_{\mu g}) \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots m \\ g = 1, 2, \ldots 2p \end{pmatrix}.$$

Um nämlich die zwischen den Wegen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ bestehenden linearen Beziehungen vollständig herzuleiten, ist es nur notwendig, das Gleichungssystem mit rationalen Koeffizienten

$$r_{1g}x_1 + r_{2g}x_2 + \cdots + r_{mg}x_m = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots 2p)$$

vollständig aufzulösen. Ein derartiges Wegsystem ist hiernach dann und nur dann wieder ein Fundamentalsystem, wenn $m = 2p$ und die Determinante

$$|r_{gh}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots 2p)$$

von Null verschieden ist.

Bilden wir endlich, um die oben gefundene Bedingung in eine andere Form zu setzen, die Perioden des Integrals t_g für die Wege $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ und bezeichnen dieselben mit $\tau_{g1}, \tau_{g2}, \ldots \tau_{gm}$, so ist zufolge der in Gleichung (13) gegebenen Regel

$$\begin{aligned} \tau_{g1} &= r_{11}t_{g1} + r_{12}t_{g2} + \cdots + r_{1,2p}t_{g,2p} \\ \tau_{g2} &= r_{21}t_{g1} + r_{22}t_{g2} + \cdots + r_{2,2p}t_{g,2p} \\ &\vdots \\ \tau_{gm} &= r_{m1}t_{g1} + r_{m2}t_{g2} + \cdots + r_{m,2p}t_{g,2p}. \end{aligned}$$

Man erhält also das Periodensystem

$$\mathsf{T} = (\tau_{g\mu}) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots 2p \\ \mu = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix},$$

indem man die Zeilen des quadratischen Systems T mit den Kolonnen des Koeffizientensystems

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \ldots & r_{m1} \\ r_{12} & r_{22} & \ldots & r_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{1,2p} & r_{2,2p} & \ldots & r_{m,2p} \end{pmatrix}$$

zusammensetzt; es ist also in kurzer Bezeichnung

$$\mathsf{T} = TR. \tag{14}$$

Umgekehrt ist, wenn man das reciproke System zu T mit T^{-1} bezeichnet:

$$\bar{R} = T^{-1}\mathsf{T}. \tag{14a}$$

Aus der Gleichung (14) folgt, dafs, wenn in dem System $\bar{R}$ der rationalen Koeffizienten $r_{\mu g}$ die Determinanten einer bestimmten Ordnung sämtlich verschwinden, das Gleiche auch für das System T der Perioden gilt; denn nach dem Multiplikationssatze ist eine Determinante r^{ter} Ordnung von T eine lineare homogene Verbindung der sämtlichen Determinanten r^{ter} Ordnung von $\bar{R}$. Ebenso folgt aus (14a), dafs das Verschwinden sämtlicher Determinanten einer bestimmten Ordnung von T die gleiche Eigenschaft für $\bar{R}$ zur Folge hat. Folglich haben T und $\bar{R}$ gleichen Rang, und es ist überhaupt das Gleichungssystem mit rationalen Zahlkoeffizienten

$$r_{1g}x_1 + r_{2g}x_2 + \cdots + r_{mg}x_m = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots 2p)$$

völlig gleichwertig dem System mit im allgemeinen komplexen und irrationalen Koeffizienten:

$$\tau_{g1}x_1 + \tau_{g2}x_2 + \cdots + \tau_{gm}x_m = 0,$$

weil beide auseinander durch blofse Komposition der Gleichungen hervorgehen; die Lösungen des ersten Systems sind also auch die des zweiten. Damit ist also jetzt der am Anfange dieses Abschnittes ausgesprochene Satz vollständig bewiesen:

Ist

$$\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m)$$

ein beliebiges System geschlossener Wege auf der Riemannschen Fläche und

$$\mathsf{T} = (\tau_{g\mu}) \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots 2p \\ \mu = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

das zugehörige Periodensystem der $2p$ Fundamentalintegrale, so ist die Zahl der in dem Systeme Σ enthaltenen linear unabhängigen Wege gleich dem Range von T. Notwendige und hinreichende Bedingung für ein Fundamentalsystem von Periodenwegen ist also, dafs $m = 2p$ und die Determinante

$$|\tau_{gh}| \qquad (g, h = 1, \ldots 2p)$$

von Null verschieden ist.

Ein Fundamentalsystem von Periodenwegen $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ hat die charakteristische Eigenschaft, dafs jeder beliebige geschlossene Weg s auf der Riemannschen Fläche sich auf eine und nur eine Weise in die Form setzen läfst:

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_{2p} s_{2p},$$

wobei $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ rationale Zahlkoeffizienten sind. Es gehört aber nicht etwa zu jedem beliebigen Systeme rationaler Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ ein geschlossener Weg s auf der Riemannschen Fläche; sondern nur

dann, wenn die Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ ganz sind, sind wir im stande, zu einem gegebenen Koeffizientensystem den zugehörigen geschlossenen Weg s zu konstruieren.

Rationale Zahlkoeffizienten $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ können, wie unmittelbar aus der Auflösung der Gleichungen (10a) folgt, nur dann zu einem geschlossenen Wege Veranlassung geben, wenn ihr Generalnenner ein Teiler der Determinante $|c_{gh}|$ ist. Wir werden später sehen, dafs bei geeigneter Auswahl des Fundamentalsystems die Determinante $|c_{gh}|$ den kleinsten denkbaren Wert Eins annehmen kann. Alsdann erhält man also alle Periodenwege aus der Linearform

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_{2p} s_{2p},$$

wenn man für die Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ alle möglichen ganzen Zahlen setzt, und es ergiebt sich so jeder Weg nur einmal. In dem allgemeinen Falle, den wir zunächst betrachten und in dem die Determinante $|c_{gh}|$ einen beliebigen Wert besitzt, haben wir den Komplex der Wege, welche auf ganzzahlige Koeffizienten führen, vor den anderen auszuzeichnen und ihre charakteristischen Eigenschaften festzustellen. Es gelingt dies, wie nunmehr zu zeigen ist, durch Herstellung einer gewissen Normalform, auf welche sich jeder derartige Komplex beziehen läfst.

§ 3.

Wählen wir aufser dem geschlossenen Wege

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_{2p} s_{2p} \tag{1}$$

noch einen zweiten, durch die rationalen Zahlen $y_1, y_2, \ldots y_{2p}$ bestimmten Periodenweg

$$\sigma = y_1 s_1 + y_2 s_2 + \cdots + y_{2p} s_{2p} \tag{1a}$$

auf der Riemannschen Fläche, so ist die Charakteristik der beiden Wege s und σ nach der Formel (12) des vorigen Abschnittes:

$$(s, \sigma) = y_1 (s, s_1) + y_2 (s, s_2) + \cdots + y_{2p} (s, s_{2p});$$

ferner ist nach derselben Gleichung

$$\begin{aligned}(s, s_h) &= x_1 (s_1, s_h) + x_2 (s_2, s_h) + \cdots + x_{2p} (s_{2p}, s_h)\\ &= c_{1h} x_1 + c_{2h} x_2 + \cdots + c_{2p,h} x_{2p},\end{aligned}$$

folglich ist

$$(s, \sigma) = \sum_{gh} c_{gh} x_g y_h \qquad (g, h = 1, 2, \ldots 2p) \tag{2}$$

eine bilineare Form der Zahlensysteme $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ und $y_1, y_2, \ldots y_{2p}$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Es gilt somit der Satz:

Ist

$$\Sigma = (s_1, s_2, \ldots s_{2p})$$

ein Fundamentalsystem von Periodenwegen und werden irgend zwei geschlossene Wege s und σ auf der Riemannschen Fläche in Bezug auf Σ durch die Zahlensysteme $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ resp. $y_1, y_2, \ldots y_{2p}$ bestimmt, so ist die Charakteristik (s, σ) der beiden Wege eine ganzzahlige bilineare Form dieser Zahlensysteme

2a)
$$C = \sum_{gh} c_{gh} x_g y_h \qquad (g, h = 1, 2, \ldots 2p),$$

deren Koeffizienten $c_{gh} = (s_g, s_h)$ die Charakteristiken je zweier Wege des Fundamentalsystems sind; dieselbe soll die Charakteristikenform heifsen.

Hiernach hängt die Weiterführung unserer Aufgabe von der Untersuchung einer bestimmten Bilinearform und speziell von ihrer Transformation ab. Wir wollen daher, um die folgenden Entwickelungen vorzubereiten, einige allgemeine Sätze über Bilinearformen und die Rechenoperationen, welche mit ihnen vorgenommen werden können, kurz entwickeln.

Eine zunächst ganz beliebige bilineare Form

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m)$$

ist stets nur als eine Zusammenfassung des zugehörigen Koeffizientensystems

$$A = (a_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m)$$

zu einem einzigen analytischen Gebilde anzusehen; zu jeder Bilinearform gehört ein bestimmtes quadratisches System und umgekehrt, und jeder Veränderung der Bilinearformen läuft eine entsprechende Operation der quadratischen Systeme, wie sie in § 3 der neunten Vorlesung dargelegt wurden, genau parallel. Daher soll auch die bilineare Form, ebenso wie das zugehörige quadratische System, mit einem einzigen und zwar demselben Buchstaben A bezeichnet werden, und nur wenn es darauf ankommt, die Unbestimmten der Bilinearform hervorzuheben, ersetzen wir A durch

$$A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{pmatrix} = A(x_\alpha; y_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m).$$

Ebenso wie bei den Matrizen zwischen Horizontal- und Vertikalreihen, so ist bei den Formen zwischen der ersten und der zweiten

Reihe der Unbestimmten genau zu unterscheiden. Es gehört also zu dem konjugierten Systeme

$$\bar{A} = (\bar{a}_{\alpha\beta}) = (a_{1\alpha}, a_{2\alpha}, \ldots a_{m\alpha})$$

die konjugierte Form

$$\bar{A} = \sum_{\alpha\beta} a_{\beta\alpha} x_\alpha y_\beta,$$

welche aus A durch Vertauschung von x_α und y_α hervorgeht. Ist $A = \bar{A}$, also $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, so ist die Form symmetrisch; ist $A = -\bar{A}$, also $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$ und $a_{\alpha\alpha} = 0$, so ist die Form alternierend. Zu dieser letzteren Klasse gehört die oben eingeführte Charakteristikenform

$$C = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p).$$

Hierbei bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir uns die Form mit einer geraden Anzahl von Variabelnpaaren gebildet denken, da wir ja anderenfalls in dem zugehörigen quadratischen Systeme bloſs eine Horizontal- und eine Vertikalreihe mit verschwindenden Elementen hinzuzufügen brauchen; von dieser Freiheit wollen wir bei alternierenden Formen stets Gebrauch machen.

Das einfachste quadratische System war das Einheitssystem

$$E_m = (\delta_{\alpha\beta}) \qquad \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} = 0 \text{ für } \alpha \gtrless \beta \\ \delta_{\alpha\beta} = 1 \text{ für } \alpha = \beta \\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix};$$

ihm entspricht die Einheitsform

$$E_m = \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m$$

und diese Form spielt bei jeder Reduktion gewöhnlicher oder symmetrischer Formen eine besonders wichtige Rolle. Für alternierende Formen muſs aber eine Normalform, welche ebenfalls alternierend ist, gewählt werden; wir nehmen als solche die folgende, welche wir die „alternierende Hauptform“ oder auch kurz die „Hauptform“ schlechtweg nennen:

$$3) \quad \mathsf{E} = x_1 y_{p+1} + x_2 y_{p+2} + \cdots + x_p y_{2p} - x_{p+1} y_1 - x_{p+2} y_2 - \cdots - x_{2p} y_p.$$

Das zugehörige Koeffizientensystem lautet

$$5\text{a}) \quad \mathsf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots & 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ -1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & -1 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots -1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix} = (\varepsilon_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

und kann, wenn wir es in vier kleinere Quadrate von je p^2 Elementen zerlegen, kurz so geschrieben werden:

3 b) $$\mathsf{E}_{2p} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_p \\ \hline -E_p & 0 \end{array}\right);$$

es ist also $\varepsilon_{\alpha\beta} = \pm 1$, wenn $\beta = \alpha \pm p$ ist, in allen anderen Fällen aber gleich Null. Bei Einführung dieser Bezeichnung kann die zwischen den Perioden der Fundamentalintegrale bestehende Gleichung (3) des vorigen Paragraphen:

4) $$t_{1g} t_{p+1,h} + t_{2g} t_{p+2,h} + \cdots + t_{pg} t_{2p,h} - t_{p+1,g} t_{1h} - \cdots - t_{2p,g} t_{ph} = -2\pi i c_{gh}$$

auch in die einfache Form gesetzt werden:

4 a) $$-2\pi i c_{gh} = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} t_{\alpha g} t_{\beta h} = \mathsf{E}(t_{\alpha g};\; t_{\beta h}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p).$$

Unterwerfen wir in einer bilinearen Form

5) $$A = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m)$$

die eine Reihe der Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_m$ einer linearen Substitution

6) $$y_\beta = \sum_{\gamma=1}^{m} q_{\beta\gamma} \bar{y}_\gamma,$$

so geht die Form in eine andere

7) $$B = \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{y}_\beta$$

mit den Koeffizienten

7 a) $$b_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{m} a_{\alpha\gamma} q_{\gamma\beta}$$

über; also gilt für die Koeffizientensysteme die Multiplikationsgleichung

7 b) $$B = AQ,$$

und dieselbe Gleichung kann und soll auch die Beziehung zwischen den Bilinearformen A und B vollständig darstellen.

Unterwerfen wir andererseits die Unbestimmten x_α einer linearen Substitution

8) $$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} p_{\alpha\beta} \bar{x}_\beta$$

und geht hierdurch A wieder in B über, so ist jetzt

9) $$b_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{m} p_{\gamma\alpha} a_{\gamma\beta},$$

also ist, wenn wieder $\bar{P}$ das zu P konjugierte System bedeutet:

9a) $$B = \bar{P}A.$$

Wenn wir schliefslich beide Reihen von Variabeln durch die Gleichungen (6) und (8) linear transformieren, so gilt für die transformierte Form B die allgemeine Kompositionsgleichung

10) $$B = \bar{P}AQ.$$

Der allgemeinsten linearen Transformation der Form entspricht also eine Multiplikation der Systeme, wobei die Koeffizientensysteme der Substitutionen ganz dieselbe Rolle wie das Koeffizientensystem einer Bilinearform übernehmen. Wir können daher, wenn wir wollen, auch von einem Produkte zweier oder mehrerer Bilinearformen sprechen, worunter eben die zu dem komponierten Systeme gehörige Form zu verstehen ist.

Alternierende und symmetrische Bilinearformen werden meist nur so transformiert, dafs sie alternierend resp. symmetrisch bleiben. Dies tritt immer dann ein, wenn die Koeffizientensysteme P und Q gleich sind, also die Variabeln x_α und y_α derselben Substitution unterworfen werden. Ist nämlich $\bar{A} = \pm A$ und

$$B = \bar{P}AP,$$

so folgt durch Übergang zu dem konjugierten Systeme nach dem Satze (3) auf S. 132:

$$\bar{B} = \bar{P}\bar{A}P,$$

und da $\bar{A} = \pm A$ ist, so ist auch $\bar{B} = \pm B$. Derartige Transformationen heifsen k o n g r u e n t e Transformationen der Bilinearform.

Wir bemerken schliefslich noch, dafs mit Hilfe der jetzt eingeführten Bezeichnungen sich die bilinearen Gleichungen, welche zwischen den Perioden $t_{\alpha\beta}$ der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$ bestehen, in einer viel übersichtlicheren Form darstellen lassen. Wir hatten in der Gleichung (7) des vorigen Abschnittes gefunden:

$$T_0 T = 2\pi i \cdot C;$$

hierin war C das System der Charakteristiken $c_{\alpha\beta}$, T das System der Perioden, und T_0 ging aus T hervor, indem wir die α^{te} Zeile unter Zeichenänderung mit der $(\alpha + p)^{\text{ten}}$ vertauschten und sodann das konjugierte System bildeten. Dieser Übergang von T zu T_0 kann aber mit Hilfe des Systems E, wie der Anblick der auf S. 619, 621 und 629 vollständig hingeschriebenen Systeme lehrt, einfach so dargestellt werden:

$$T_0 = -\bar{T}\mathsf{E}.$$

Folglich erhalten wir die Kompositionsgleichung

$$\bar{T}\mathsf{E}T = -2\pi i\cdot C,$$

durch welche das System der Periodenrelationen (4) vollständig zusammengefafst wird. Zufolge der letzten Ausführungen können wir aber diese Gleichung auch durch einen Satz über bilineare, durch Transformation ineinander überführbare Formen ausdrücken, nämlich durch folgenden:

Bedeutet

$$(t_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

das Periodensystem der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$ für $2p$ linear unabhängige Wege $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$, so geht die alternierende Hauptform

$$\mathsf{E} = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

durch die kongruenten Transformationen

$$x_\alpha = \sum_\beta t_{\alpha\beta}\bar{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum_\beta t_{\alpha\beta}\bar{y}_\beta$$

bis auf einen Faktor in die Charakteristikenform

$$C = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\bar{x}_\alpha \bar{y}_\beta$$

über, wobei $c_{\alpha\beta} = (s_\alpha, s_\beta)$ ist; es ist nämlich

$$11) \qquad \bar{T}\mathsf{E}T = -2\pi i\cdot C.$$

Bei Anwendung der Produktbildung zweier Formen tritt auch die alternierende Hauptform E in einen einfachen Zusammenhang mit der Einheitsform E; es ist nämlich

$$12) \qquad \mathsf{E}^2 = -E.$$

In der That ergiebt die Zusammensetzung des Systems

$$\mathsf{E}_{2p} = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}$$

mit sich selbst, da man mit den Teilsystemen einer Matrix ganz ebenso wie mit den einzelnen Elementen selbst rechnen kann:

$$\mathsf{E}_{2p}^2 = \begin{pmatrix} -E_p^2 & 0 \\ 0 & -E_p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & -E_p \end{pmatrix} = -E_{2p}.$$

§ 4.

Bilden, ebenso wie im vorigen Abschnitte, $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ ein Fundamentalsystem von Periodenwegen, so haben wir gesehen, dafs die Charakteristikenform

1) $$C = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2p} c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha,\beta} (s_\alpha, s_\beta) x_\alpha y_\beta$$

gleich der Charakteristik der beiden Periodenwege

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_{2p} s_{2p}$$

und

$$\sigma = y_1 s_1 + y_2 s_2 + \cdots + y_{2p} s_{2p}$$

ist. Wir wollen nun das Fundamentalsystem $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ durch ein anderes $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots \bar{s}_{2p}$ ersetzen, welches mit dem ersten durch die Gleichungen

2) $$\bar{s}_\alpha = \sum_\beta k_{\alpha\beta} s_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

verbunden ist; hierbei sollen die Koeffizienten $k_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen und ihre Determinante $|k_{\alpha\beta}| = \pm 1$ sein, dann kann man auch umgekehrt die Wege s_α als lineare ganzzahlige Verbindungen der Wege $\bar{s}_\alpha$ ausdrücken, denn als Auflösung von (2) erhält man

2a) $$s_\alpha = \sum_\beta k'_{\alpha\beta} \bar{s}_\beta,$$

worin

$$k'_{\alpha\beta} = \frac{\text{adj. } k_{\beta\alpha}}{|k_{\alpha\beta}|} = \pm \text{ adj. } k_{\beta\alpha}$$

eine ganze Zahl ist. Zwei solche Fundamentalsysteme leisten also, wenn wir jetzt die Unbestimmten x_α und y_α auf die ganzzahligen Werte beschränken und nur den Komplex der sich so ergebenden Wege ins Auge fassen, für die Darstellung der Periodenwege auf der Riemannschen Fläche völlig dasselbe; sie sollen aus diesem Grunde als äquivalente Fundamentalsysteme bezeichnet werden.

Stellt man nun die geschlossenen Wege s und σ auch durch das zweite Fundamentalsystem dar, setzt man also

$$s = \bar{x}_1 \bar{s}_1 + \bar{x}_2 \bar{s}_2 + \cdots + \bar{x}_{2p} \bar{s}_{2p}$$
$$\sigma = \bar{y}_1 \bar{s}_1 + \bar{y}_2 \bar{s}_2 + \cdots + \bar{y}_{2p} \bar{s}_{2p},$$

so müssen die Zahlen x_α und $\bar{x}_\alpha$ miteinander durch die linearen Gleichungen zusammenhängen:

3) $$x_\alpha = k_{1\alpha} \bar{x}_1 + k_{2\alpha} \bar{x}_2 + \cdots + k_{2p,\alpha} \bar{x}_{2p},$$

deren Koeffizientensystem offenbar zu dem der Gleichungen (2) konjugiert ist; ganz die gleiche Beziehung findet natürlich auch zwischen

den Zahlen y_α und $\bar{y}_\alpha$ statt. Dem Übergange von einem Fundamentalsysteme zu einem äquivalenten entspricht also eine Transformation der Charakteristikenform C durch kongruente Substitutionen mit ganzen Zahlkoeffizienten und der Determinante ± 1. Bezeichnen wir also zwei ganzzahlige alternierende Formen, welche durch kongruente Substitutionen mit der Determinante ± 1 ineinander übergehen, ebenfalls als äquivalent, so gilt der Satz:

Zu äquivalenten Fundamentalsystemen von Periodenwegen gehören äquivalente Charakteristikenformen und umgekehrt.

Wir wollen aber zunächst nur gewisse einfache und leicht interpretierbare Substitutionen anwenden, die wir als Elementartransformationen bezeichnen, und durch diese allein die Charakteristikenform in eine bestimmte Normalform bringen, vermöge deren wir die wesentlichen Eigenschaften eines Fundamentalsystems von Periodenwegen leicht übersehen können.

Erstens können wir in einem der Wege s, z. B. in s_1, die Richtung umkehren. Da alsdann

$$(S_1) \qquad \bar{s}_1 = -s_1, \quad \bar{s}_h = s_h \quad \text{für } h > 1$$

ist, so lautet die Elementartransformation der Variabeln

$$(E_1) \qquad x_1 = -\bar{x}_1, \; x_h = \bar{x}_h; \quad y_1 = -\bar{y}_1, \; y_h = \bar{y} \qquad (h > 1).$$

Die Matrix der Charakteristikenform erleidet alsdann nur die Veränderung, dafs die erste Horizontal- und Vertikalreihe das Zeichen wechseln oder, was ganz dasselbe besagt, dafs diese beiden Reihen sich miteinander vertauschen.

Zweitens können wir zwei Wege, z. B. s_1 und s_2, miteinander vertauschen. Dann ist

$$(S_2) \qquad \bar{s}_1 = s_2, \quad \bar{s}_2 = s_1, \quad \bar{s}_3 = s_3, \ldots \bar{s}_{2p} = s_{2p},$$

also

$$(E_2) \qquad \begin{array}{l} x_1 = \bar{x}_2, \quad x_2 = \bar{x}_1, \quad x_3 = \bar{x}_3, \ldots x_{2p} = \bar{x}_{2p} \\ y_1 = \bar{y}_2, \quad y_2 = \bar{y}_1, \quad y_3 = \bar{y}_3, \ldots y_{2p} = \bar{y}_{2p}. \end{array}$$

Die Charakteristikenform

$$\begin{aligned} C = c_{12}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + c_{13}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + c_{14}(x_1 y_4 - x_4 y_1) + \cdots \\ + c_{23}(x_2 y_3 - x_3 y_2) + c_{24}(x_2 y_4 - x_4 y_2) + \cdots \end{aligned}$$

geht alsdann über in

$$\begin{aligned} C = -c_{12}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + c_{13}(\bar{x}_2 \bar{y}_3 - \bar{x}_3 \bar{y}_2) + c_{14}(\bar{x}_2 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 \bar{y}_2) + \cdots \\ + c_{23}(x_1 \bar{y}_3 - \bar{x}_3 y_1) + c_{24}(\bar{x}_1 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 y_1) + \cdots \end{aligned}$$

Die zugehörigen Matrizen der ursprünglichen und der transformierten Form sind also

$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots c_{1,2p} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} & \dots c_{2,2p} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} & \dots c_{3,2p} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & \dots c_{4,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2p,1} & c_{2p,2} & c_{2p,3} & c_{2p,4} & \dots c_{2p,2p} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & c_{21} & c_{23} & c_{24} & \dots c_{2,2p} \\ c_{12} & 0 & c_{13} & c_{14} & \dots c_{1,2p} \\ c_{32} & c_{31} & 0 & c_{34} & \dots c_{3,2p} \\ c_{42} & c_{41} & c_{43} & 0 & \dots c_{4,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2p,2} & c_{2p,1} & c_{2p,3} & c_{2p,4} & \dots c_{2p,2p} \end{pmatrix};$$

vertauscht man also die Wege s_1 und s_2, so werden auch in den alternierenden Systemen die Indices 1 und 2 durchweg vertauscht, d. h. es wird sowohl die erste Horizontalreihe mit der zweiten als auch die erste Vertikalreihe mit der zweiten vertauscht.

Drittens kann man zu einem der Wege, z. B. s_2, ein beliebiges ganzzahliges positives oder negatives Vielfaches eines anderen Weges, z. B. von s_1, hinzufügen, so dafs

$$(S_3) \qquad \bar{s}_1 = s_1, \quad \bar{s}_2 = g s_1 + s_2, \quad \bar{s}_3 = s_3, \dots \bar{s}_{2p} = s_{2p}$$

ist; diese Transformation bedeutet nach den früheren Auseinandersetzungen, dafs an den Weg s_2 nach geeigneter Deformation der $|g|$-mal in positivem oder negativem Sinne durchlaufene Weg s_1 angefügt wird.

Die zugehörige Substitution der Unbestimmten lautet dann

$$(E_3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 + g\bar{x}_2, \quad x_2 = \bar{x}_2, \dots x_{2p} = \bar{x}_{2p} \\ y_1 &= \bar{y}_1 + g\bar{y}_2, \quad y_2 = \bar{y}_2, \dots y_{2p} = \bar{y}_{2p}; \end{aligned}$$

sie bringt in der Charakteristikenform eine Zusatzsumme hervor, so dafs

$$C(x; y) = C(\bar{x}; \bar{y}) + g c_{13}(\bar{x}_2 \bar{y}_3 - \bar{x}_3 \bar{y}_2) + g c_{14}(\bar{x}_2 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 \bar{y}_2) + \cdots \\ + g c_{1,2p}(\bar{x}_2 \bar{y}_{2p} - \bar{y}_2 \bar{x}_{2p})$$

wird. Die ursprüngliche Matrix wird also verwandelt in

$$\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots c_{1,2p} \\ c_{21} & 0 & c_{23} + g c_{13} & c_{24} + g c_{14} & \dots c_{2,2p} + g c_{1,2p} \\ c_{31} & c_{32} + g c_{31} & 0 & c_{34} & \dots c_{3,2p} \\ c_{41} & c_{42} + g c_{41} & c_{43} & 0 & \dots c_{4,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2p,1} & c_{2p,2} + g c_{2p,1} & c_{2p,3} & c_{2p,4} & \dots 0 \end{pmatrix};$$

es wird also das g-fache der ersten Zeile zur zweiten und gleichzeitig das g-fache der ersten Kolonne zur zweiten hinzugefügt. Durch diese Operation kann stets bei passender Wahl von g erreicht werden, dafs ein Element c_{2h} der zweiten Zeile absolut kleiner als das entsprechende

Element c_{1h} der ersten wird, vorausgesetzt, dafs h nicht gleich 1 oder 2 ist.

Die hier angewendeten ganzzahligen Elementartransformationen der Variabeln der Bilinearform, welche elementaren Veränderungen der Periodenwege entsprechen, haben sämtlich die Determinante ± 1. Man kann aber umgekehrt zeigen, dafs jede ganzzahlige Substitution mit der Determinante ± 1 aus einer endlichen Anzahl dieser drei Arten von Elementartransformationen zusammengesetzt werden kann. Der Beweis dieses Satzes wird mit ganz denselben Mitteln geführt, mit welchen wir in § 2 der elften Vorlesung gezeigt haben, dafs ein aus ganzen Funktionen einer Veränderlichen z bestehendes quadratisches System mit der Determinante Eins in elementare Systeme zerlegt werden kann; man hat, um das Verfahren auf die hier angewendeten ganzzahligen Systeme zu übertragen, überall nur das Wort „ganze Funktion" durch „ganze Zahl" zu ersetzen, während die Methode selbst genau dieselbe bleibt. Daher braucht der Beweis, der zudem für unser eigentliches Ziel nicht erforderlich ist, nicht weiter ausgeführt zu werden.

Wir wollen nun zeigen, dafs durch eine Folge solcher Elementartransformationen die ganzzahlige Bilinearform C in folgende Normalform gebracht werden kann:

$$4)\qquad \begin{aligned} C = e_1(x_1\,\bar{y}_{p+1} - \bar{x}_{p+1}\,\bar{y}_1) + e_2(\bar{x}_2\,\bar{y}_{p+2} - x_{p+2}\,\bar{y}_2) + \cdots \\ + e_p(\bar{x}_p\,\bar{y}_{2p} - \bar{x}_{2p}\,\bar{y}_p), \end{aligned}$$

worin $e_1, e_2, \ldots e_p$ positive ganze Zahlen sind und jede Zahl e_α in allen folgenden $e_{\alpha+1}, \ldots e_p$ enthalten ist. Diese Zahlen e_α, welche immer doppelt, nämlich als Koeffizienten je zweier Glieder der Bilinearform auftreten, haben eine einfache arithmetische Bedeutung; es sind nämlich, wie wir sehen werden, die $2p$ Zahlen

$$5)\qquad e_1,\ \ e_1,\ \ e_2,\ \ e_2,\ \ e_3,\ \ e_3,\ \ldots\ e_p,\ \ e_p$$

die Elementarteiler des quadratischen Systems $(c_{\alpha\beta})$ oder der Bilinearform C, wenn dieser Begriff genau wieder in dem auf S. 181 dargelegten Sinne verstanden, also der h^{te} Elementarteiler als Quotient des h^{ten} und $(h-1)^{\text{ten}}$ Determinantenteilers definiert wird. Die Determinantenteiler, also auch die Elementarteiler einer ganzzahligen Bilinearform sind, was genau wie auf S. 176 flg. bewiesen wird, gegenüber allen ganzzahligen Transformationen mit der Determinante ± 1 invariant.

In dem quadratischen System $(c_{\alpha\beta})$ suchen wir zunächst das kleinste positive Element auf und bringen dieses durch eine Anzahl von Vertauschungen (S_2) und Zeichenänderungen (S_1) an die Stelle c_{12}; nachdem dies geschehen, können wir, indem wir je ein geeignetes Vielfaches der zweiten oder ersten Zeile und Kolonne mit Hilfe einer

Operation S_3 zur dritten, vierten, ... $2p^{\text{ten}}$ hinzufügen, alle übrigen Elemente der ersten resp. zweiten Zeile und Kolonne dem absoluten Werte nach kleiner als c_{12} machen. Dieses Verfahren setzen wir so lange als möglich weiter fort, indem wir immer das kleinste positive Element an die erste, nicht mit einer Null zu besetzende Stelle (c_{12}) des Systems bringen; es findet erst dann seinen Abschlufs, wenn aufser $c_{12} = e_1$ alle übrigen Elemente der ersten und zweiten Zeile und Kolonne Null, und die Elemente der folgenden Reihen Vielfache von e_1 geworden sind, so dafs das transformierte System folgende Gestalt angenommen hat:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & e_1 & 0 \quad 0 \ldots 0 \\ -e_1 & 0 & 0 \quad 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & R = e_1 C_1 \\ \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Für die beiden ersten Reihen ist es nämlich unmittelbar ersichtlich, dafs das Verfahren fortgesetzt werden kann, so lange in ihnen noch aufser c_{12} von Null verschiedene Elemente vorhanden sind; aber auch für die Elemente des Restsystems R ist es leicht zu zeigen, dafs sie schliefslich sämtlich Vielfache von e_1 sein müssen, denn wenn z. B. $c_{34} = \alpha$ noch kein Vielfaches von e_1 ist, so kann man dieses durch Addition der dritten Reihe zur ersten an die Stelle c_{14} bringen und sodann durch Addition eines Vielfachen der zweiten Reihe zur vierten erzielen, dafs sich in der ersten Reihe ein von Null verschiedenes Element $\alpha - ge_1$ befindet, welches kleiner als e_1 ist.

Wenn aber der angegebene erste Abschlufs des obigen Verfahrens nach einer Anzahl von Elementaroperationen erreicht ist, so können wir nunmehr das Restsystem $e_1 C_1$ in ganz gleicher Weise behandeln und gelangen schliefslich zu folgender Normalform des ganzzahligen alternierenden Systems

$$\begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -e_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & e_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -e_p & 0 \end{pmatrix},$$

wobei jedes Element e_α positiv und ein Teiler von $e_{\alpha+1}$ ist.

Da alle angewendeten Elementartransformationen die Determinante ± 1 haben, so haben sich weder die Determinante noch auch die Elementarteiler des Systems $C = (c_{\alpha\beta})$ geändert. Die Elementarteiler des transformierten Systems sind aber, wie eine leichte Überlegung ergiebt, der Reihe nach folgende:

$$5) \qquad e_1, \quad e_1, \quad e_2, \quad e_2, \ldots e_p, \quad e_p,$$

seine Determinante ist gleich $e_1^2 e_2^2 \ldots e_p^2$. Hieraus folgt:

1) Es ist

$$|c_{\alpha\beta}| = (e_1 e_2 \ldots e_p)^2 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p);$$

die Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_p$ sind also sämtlich von Null verschieden, weil es ihr Produkt ist; ferner ist die Determinante eine Quadratzahl, und damit ist in der That jetzt aufs neue ein Satz bewiesen, der schon früher bei Gelegenheit der Aufstellung der Formel (8a) in § 2 angegeben wurde.

2) Die Zahlen der Reihe (5) sind die Elementarteiler des Systems (C). Die Elementarteiler eines ganzzahligen alternierenden Systems haben also stets die Eigenschaft, dafs der $(2i-1)^{\text{te}}$ und der $(2i)^{\text{te}}$ einander gleich sind. Die ganzen Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_p$ können somit auch von vornherein, ohne Zuhilfenahme der angewendeten elementaren Transformationen, als die Elementarteiler des gegebenen Systems C direkt bestimmt werden.

Durch das angegebene Verfahren aufeinanderfolgender Elementartransformationen der Querschnitte $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ geht also die Charakteristikenform zunächst in folgende Normalform über:

$$C = e_1(\bar{x}_1 \bar{y}_2 - \bar{x}_2 \bar{y}_1) + e_2(\bar{x}_3 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 \bar{y}_3) + \cdots + e_p(\bar{x}_{2p-1} \bar{y}_{2p} - \bar{x}_{2p} \bar{y}_{2p-1}).$$

Wir wollen aber diese Normalform noch in eine für unsere Untersuchungen etwas zweckmäfsigere Gestalt bringen, indem wir der Reihe nach

$$\bar{x}_1, \quad \bar{x}_2, \quad \bar{x}_3, \quad \bar{x}_4, \quad \bar{x}_5, \quad \bar{x}_6, \quad \ldots \bar{x}_{2p-1}, \quad \bar{x}_{2p}$$

durch

$$\bar{x}_1, \quad \bar{x}_{p+1}, \quad \bar{x}_2, \quad \bar{x}_{p+2}, \quad \bar{x}_3, \quad \bar{x}_{p+3}, \ldots \bar{x}_p, \quad \bar{x}_{2p}$$

ersetzen und analog natürlich mit der Unbestimmten y verfahren. Diese letzte Transformation, welche aus einer Anzahl von Operationen (E_2) zusammengesetzt werden kann, entspricht nur einer anderen Numerierung der Periodenwege.

Die Charakteristikenform erhält alsdann in der That die am Anfange angekündigte normale Gestalt

$$C = \sum_{g=1}^{p} e_g (\bar{x}_g \bar{y}_{p+g} - \bar{x}_{p+g} \bar{y}_g), \tag{4}$$

und die Bedeutung dieser Normalform ist folgende. Wir haben das ursprüngliche Fundamentalsystem von Periodenwegen $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ durch elementare Transformationen in ein äquivalentes $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots \bar{s}_{2p}$ verwandelt, für welches nur die Charakteristiken

$$\begin{aligned} (\bar{s}_1, \bar{s}_{p+1}) &= -(\bar{s}_{p+1}, \bar{s}_1) = e_1 \\ (\bar{s}_2, \bar{s}_{p+2}) &= -(\bar{s}_{p+2}, \bar{s}_2) = e_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (\bar{s}_p, \bar{s}_{2p}) &= -(\bar{s}_{2p}, \bar{s}_p) = e_p \end{aligned} \tag{6}$$

von Null verschieden sind, während alle anderen Charakteristiken verschwinden. Jeder Periodenweg $\bar{s}_i$ bildet also nur mit einem einzigen anderen, nämlich mit $\bar{s}_{i+p}$, wenn $i \leq p$, oder mit $\bar{s}_{i-p}$, wenn $i > p$ ist, eine von Null verschiedene Charakteristik; d. h. er überschreitet die übrigen Periodenwege entweder gar nicht oder gleich oft in positivem und in negativem Sinne, den Weg $s_{i \pm p}$ überschreitet er aber eine bestimmte positive Anzahl von Malen, nämlich e_i-mal, öfter in dem einen Sinne wie in dem anderen.

Ist ferner s ein beliebiger Periodenweg auf der Riemannschen Fläche und erhält derselbe bei Anwendung des Fundamentalsystems $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots \bar{s}_{2p}$ die Darstellung

$$s = x_1 \bar{s}_1 + x_2 \bar{s}_2 + \cdots + x_{2p} s_{2p},$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (6) für die rationalen Zahlen x_h:

$$\begin{aligned} (s, \bar{s}_{p+1}) &= e_1 x_1, \quad \ldots (s, \bar{s}_{2p}) = e_p x_p \\ (s, \bar{s}_1) &= -e_1 x_{p+1}, \ldots (s, \bar{s}_p) = -e_p x_{2p}; \end{aligned} \tag{7}$$

diese Zahlen fallen also dann und nur dann ganz aus, wenn die $2p$ Kongruenzen

$$(s, \bar{s}_i) \equiv (s, \bar{s}_{i+p}) \equiv 0 \pmod{e_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{8}$$

erfüllt sind.

Wir haben somit das folgende wichtige Resultat gewonnen:

> Bezeichnet man zwei Fundamentalsysteme von Periodenwegen als äquivalent, sobald sich aus ihnen durch Addition und Subtraktion dieselben Wege ableiten lassen, so ist jedes Fundamentalsystem $(s_1, s_2, \ldots s_{2p})$ mit der zugehörigen Charakteristikenform

$$C = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha\beta} (s_\alpha, s_\beta) x_\alpha y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

und den Elementarteilern $c_1, c_2, \ldots c_p$ einem anderen

$$(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots \bar{s}_{2p})$$

äquivalent, für welches die Charakteristikenform

$$C = c_1(x_1 y_{p+1} - x_{p+1} y_1) + \cdots + c_p(x_p y_{2p} - x_{2p} y_p)$$

normal ist. Zwei Fundamentalsysteme sind also dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Charakteristikenformen die gleichen Elementarteiler besitzen.

Soll ein Periodenweg bei seiner Darstellung durch eines dieser Fundamentalsysteme ganzzahlige Koeffizienten erhalten, so müssen die $2p$ Kongruenzen (8) erfüllt sein; sind also die Elementarteiler gleich Eins, so erhält jeder beliebige Periodenweg ganzzahlige Koeffizienten.

§ 5.

Es erübrigt noch, auf Grund des gewonnenen Überblickes über die Gesamtheit der Periodenwege, ebenso wie in § 3 der einundzwanzigsten Vorlesung, die Bedeutung der kanonischen Zerschneidung der Riemannschen Fläche festzustellen. Nun sind für die in § 3 der einundzwanzigsten Vorlesung eingeführten Schnitte $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_p, b_p$ die Charakteristiken

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = \cdots = (a_p, b_p) = +1,$$

alle übrigen Charakteristiken aber Null; die zugehörige Charakteristikenform ist also die Hauptform. Daher ist es im wesentlichen nur notwendig, zu zeigen, dafs es Fundamentalsysteme giebt, für welche die Wege $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ sich nicht selbst durchsetzen, die zugehörige Charakteristikenform aber normal ist und die Elementarteiler Eins besitzt. Nur die letzte dieser Forderungen bedarf noch der Erläuterung; die Bedeutung derselben ergiebt sich aber, wenn wir das auf S. 622 bewiesene Theorem zu folgendem Hilfssatze erweitern:

Ist a ein Periodenweg, welcher nicht zur Hauptklasse gehört und sich nicht durchsetzt, so giebt es stets einen zweiten b, für welchen die Charakteristik

$$(a, b) = +1$$

ist.

Bei diesem Satze ist auch die zweite Voraussetzung wesentlich; ersetzt man nämlich a z. B. durch den doppelt durchlaufenen Weg $2a$ oder nach Maſsgabe der Ausführungen auf S. 616 durch einen äquivalenten a', der alsdann stets einen Doppelpunkt erhalten muſs (s. Fig. 38), so ist die Charakteristik (a', b) für jeden Weg b eine gerade Zahl, also die Forderung, daſs $(a', b) = 1$ sein soll, nicht erfüllbar.

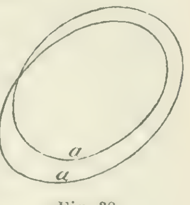


Fig. 38.

Beim Beweise nehmen wir zunächst auf Grund des vorher erwähnten Satzes an, daſs zu dem Wege a ein zweiter $\bar{b}$ so bestimmt sei, daſs die Charakteristik

$$(a, \bar{b}) = e > 1$$

ist. Dann wollen wir aus $\bar{b}$ einen zweiten Weg b so ableiten, daſs $(a, b) = 1$ wird. Das dabei angewendete allgemein giltige Verfahren demonstrieren wir in der Fig. 39 auf folgender Seite in dem einfachsten Falle, wenn $e = 2$ ist und die Riemannsche Fläche zu einem elliptischen Gebilde gehört.

Überschreitet der Weg a den Weg $\bar{b}$ nur in positivem Sinne, so bildet er mit ihm e Schnittpunkte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots \mathfrak{S}_e$; finden aber auch f negative, also $e + f$ positive Übergänge statt, so kann man jedenfalls unter den vorhandenen $e + 2f$ Schnittpunkten stets e Punkte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots \mathfrak{S}_e$ so wählen, daſs die Übergänge zwischen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3, \ldots$ $\mathfrak{S}_e$ und $\mathfrak{S}_1$ sich aufheben. Um dies noch ausdrücklich zu beweisen, ermitteln wir die den $e + 2f$ Übergängen entsprechenden positiven oder negativen Einheiten

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_{e+2f},$$

von welchen die erste gleich $+1$ sein soll. Bilden wir dann die Summen

$$\sigma_\nu = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots e + 2f),$$

so ist die erste gleich 1 und die letzte gleich e, und da jede der Summen sich von der vorhergehenden um ± 1 unterscheidet, so müssen sich auch die Summen $2, \ldots e - 1$ einstellen. Es sei also

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\alpha &&= 1 \\ \sigma_\beta &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\beta &&= 2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{e+2f} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{e+2f} &&= e \end{aligned}$$

und hierbei mögen die Indices $\alpha, \beta, \ldots$, wenn mehrere Möglichkeiten vorhanden sind, stets möglichst groſs gewählt werden. Dann ist notwendigerweise $\varepsilon_{\alpha+1}, \varepsilon_{\beta+1}, \ldots$ gleich $+1$; denn wäre z. B. $\varepsilon_{\alpha+1} = -1$,

so wäre $\sigma_{\alpha+1} = 0$, also gäbe es noch ein späteres σ mit dem Werte 1, und es hätte α nicht den gröfstmöglichen Wert. Es sind also in der That die Anfangsglieder der e Teilsummen

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon_{\alpha+1} + \cdots + \varepsilon_\beta, \quad \varepsilon_{\beta+1} + \cdots + \varepsilon_\gamma, \ldots \varepsilon_{\delta+1} + \cdots + \varepsilon_{e+2f}$$

ebenso wie die Teilsummen selbst gleich $+1$, die nach Weglassung der Anfangsglieder verbleibenden Reste sind also gleich Null; diesen Anfangsgliedern $\varepsilon_1, \varepsilon_{\alpha+1}, \varepsilon_{\beta+1}, \ldots \varepsilon_{\delta+1}$ entsprechen daher solche Schnittpunkte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots \mathfrak{S}_e$, zwischen welchen ebenso viel positive wie negative Übergänge liegen, was zu beweisen war.

Es mögen nun bei $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ die beiden ersten unter den eben ermittelten e positiven Übergängen von a stattfinden, dann wandern wir auf $\bar{b}$ in positiver Richtung von $\mathfrak{S}_1$ bis $\mathfrak{S}_2$, und zwar so, dafs wir in $\mathfrak{S}_1$ unmittelbar hinter dem Übergange beginnen und in $\mathfrak{S}_2$ den Übergang vollziehen und uns also am Anfang und am Ende der Bewegung in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ auf dem positiven Ufer von a befinden;

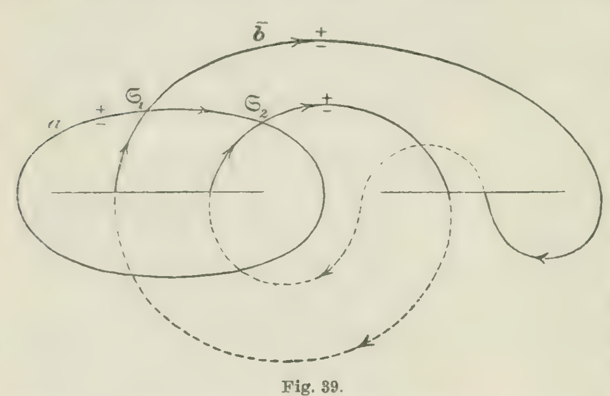


Fig. 39.

sodann wandern wir von $\mathfrak{S}_2$ nach $\mathfrak{S}_1$ in negativer Richtung am Uferrande von a zurück. Der so erhaltene Weg b, welcher aus einem Teile von a und einem Teile von $\bar{b}$ besteht, überschreitet den Weg a nur bei $\mathfrak{S}_2$ und in negativem Sinne, während bei $\mathfrak{S}_1$ kein Übergang stattfindet, es ist also $(a, b) = +1$, was zu beweisen war.

Liegen zwischen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ noch Übergänge von $\bar{b}$, die sich kompensieren, so kann man nachträglich den Weg b noch so deformieren, dafs diese gänzlich in Wegfall kommen, wie sehr leicht durch eine ähnliche Uferbetrachtung bewiesen werden kann. Wir könnten daher auch annehmen, dafs a und b überhaupt nur den einen Schnittpunkt bei $\mathfrak{S}_2$ besitzen, aber wir brauchen diese Betrachtungen nicht durchzuführen, da Übergänge, die sich aufheben, für die folgenden Untersuchungen überhaupt nie in Betracht kommen.

Nachdem dies bewiesen, gelangen wir, ausschliefslich auf Grund der Ergebnisse dieses Kapitels, in folgender Weise zu der früher auf anderem Wege abgeleiteten kanonischen Zerschneidung der Riemannschen Fläche.

Wir wählen zunächst einen doppelpunktfreien Periodenweg a_1, der nicht der Hauptklasse angehört, und bestimmen zu ihm nach dem eben bewiesenen Satze einen zweiten b_1, für welchen $(a_1, b_1) = +1$ ist. Diese Wege zerstücken die Riemannsche Fläche nicht, weil jeder das linke und das rechte Ufer des anderen entweder ohne weitere Durchsetzung oder wenigstens mit Durchsetzungen, die sich gegenseitig kompensieren, verbindet. Ist nun $p > 1$, so giebt es nach dem Satze auf S. 621 einen dritten Weg a_2, welcher mit a_1 und b_1 ein unabhängiges System bildet. Diesen dürfen wir ebenfalls als knotenlos voraussetzen, und wir dürfen auch annehmen, dafs in der Schar

$$a_2 + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1$$

der Wege, welche wir erhalten, wenn wir an a_2 Vielfache von a_1 und b_1 anfügen, keiner einen Doppelpunkt hat; denn ein solcher Weg liefse sich stets in solche zerlegen, die sich nicht durchsetzen, und wenigstens einer von diesen mufs dann mit a_1, b_1 ein unabhängiges System bilden. Daher können wir auch erreichen, dafs a_2 mit a_1 und b_1 die Charakteristik Null hat; denn, wenn β_1 positive Übergänge von a_2 über a_1 und α_1 negative über b_1 stattfinden, können wir diese vernichten, indem wir a_2 durch $a_2 + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1$ ersetzen, und gelangen so wieder zu einem Wege ohne Doppelpunkt. Wir bestimmen sodann zu a_2 einen weiteren Periodenweg b_2, für welchen $(a_2, b_2) = 1$ ist, und können wieder annehmen, dafs b_2 weder a_1 noch b_1 trifft. In dieser Weise fortgehend, erhalten wir schliefslich $2p$ linear unabhängige Periodenwege

$$a_1, \quad b_1, \quad a_2, \quad b_2, \ldots a_p, \quad b_p,$$

welche die Riemannsche Fläche nicht zerstücken und für welche

$$1) \qquad (a_1, b_1) = (a_2, b_2) = \cdots = (a_p, b_p) = +1,$$

alle übrigen Charakteristiken aber Null sind.

Setzen wir also jetzt in den allgemeinen Entwickelungen des vorigen Paragraphen

$$2) \qquad \begin{array}{lll} s_1 = a_1, & s_2 = a_2, & \ldots s_p = a_p \\ s_{p+1} = b_1, & s_{p+2} = b_2, & \ldots s_{2p} = b_p, \end{array}$$

so ist die zugehörige Charakteristikenform $\sum_{gh} (s_g, s_h) x_g y_h$ die Hauptform

$$3) \quad \mathsf{E} = x_1 y_{p+1} - x_{p+1} y_1 + x_2 y_{p+2} - x_{p+2} y_2 + \cdots + x_p y_{2p} - x_{2p} y_p,$$

und jeder Periodenweg s kann auf eine und nur eine Weise in die Form gesetzt werden:

4) $$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_p s_p + x_{p+1} s_{p+1} + \cdots + x_{2p} s_{2p},$$

worin $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ ganze Zahlen, nämlich die Charakteristiken

5) $$x_i = (s, s_{p+i}) = (s, b_i), \quad x_{p+i} = -(s, s_i) = -(s, a_i) \quad (i = 1, 2, \ldots p)$$

sind.

Es ist nun noch zu zeigen, dafs wir auf diesem Wege ebenfalls völligen Aufschlufs über den Verlauf der Integralfunktionen auf der zerschnittenen und unzerschnittenen Riemannschen Fläche erhalten. Ist zunächst t_h eines der $2p$ Fundamentalintegrale und s der Periodenweg (4), so ist in den früheren Bezeichnungen (S. 624):

$$\int_s dt_h = t_{h1} x_1 + t_{h2} x_2 + \cdots + t_{h,2p} x_{2p},$$

wobei die ganzen Zahlen $x_1, \ldots x_{2p}$ durch die Gleichungen (5) bestimmt sind. Ist aber allgemein t ein beliebiges Integral erster oder zweiter Gattung, so ist dasselbe nach dem Satze auf S. 574 auf eine und nur eine Weise in der Form darstellbar:

$$t = c_1 t_1 + \cdots + c_{2p} t_{2p} + \varphi(z, u),$$

wo $\varphi(z, u)$ eine Funktion des Körpers bedeutet. Folglich ist die Periode

6) $$\begin{aligned} \int_s dt &= x_1 \sum_{h=1}^{2p} c_h t_{h1} + x_2 \sum_{h=1}^{2p} c_h t_{h2} + \cdots + x_{2p} \sum_{h=1}^{2p} c_h t_{h,2p} \\ &= x_1 \int_{s_1} dt + x_2 \int_{s_2} dt + \cdots + x_{2p} \int_{s_{2p}} dt. \end{aligned}$$

Diese Gleichung besagt aber völlig dasselbe wie der Satz auf S. 338, wenn wir noch die durch die Gleichungen (5) erklärte Bedeutung der ganzen Zahlen x_h in Betracht ziehen. Sie stellt nämlich fest, dafs jede Periode des Integrals eine ganzzahlige lineare Verbindung der Hauptperioden für die Wege $s_1, \ldots s_{2p}$ ist und dafs die Koeffizienten bestimmte Charakteristiken sind. Um auch die formale Übereinstimmung mit jenem herzustellen, haben wir nur zu berücksichtigen, dafs in den damaligen Bezeichnungen (s. S. 337)

$$\int_{s_i} dt = \int_{a_i} dt = B_i, \quad \int_{s_{i+p}} dt = \int_{b_i} dt = -A_i \quad (i = 1, 2, \ldots p)$$

ist; daher erhält die Formel (6) die Gestalt

6a) $$\int_s dt = (s, a_1) A_1 + \cdots + (s, a_p) A_p + (s, b_1) B_1 + \cdots + (s, b_p) B_p,$$

welche mit der früheren Formulierung völlig identisch ist. Damit ist die Periodizitätsuntersuchung eines beliebigen Abelschen Integrals erster

oder zweiter Gattung erledigt; auf die analogen Eigenschaften der Integrale dritter Gattung gehen wir besser erst später ein.

Der Grundgedanke, der in den letzten drei Vorlesungen zur Durchführung gelangt ist, nämlich den Vertauschungssatz auf algebraischem Wege abzuleiten und für die Untersuchung der Periodizität der Abelschen Integrale zu verwerten, rührt von Weierstraſs her und ist von ihm in seinen Vorlesungen verfolgt worden, die bisher nur auszugsweise bekannt geworden sind;*) aber die Art der Durchführung dort und hier scheint erhebliche Unterschiede aufzuweisen. An Stelle der Funktion $\theta(\mathfrak{P}, \bar{\mathfrak{P}})$ benutzt Weierstraſs eine etwas kompliziertere $H(x, y;\ x', y')$, auf deren Zusammenhang mit der unserigen wir später (S. 691) zurückkommen, und beweist für diese die Vertauschungsformel, die dem Hauptsatze der 33. Vorlesung auf S. 593 f. genau entspricht. Über die Methoden, durch welche Weierstraſs alsdann auf Grund dieser Formel zur Feststellung der Periodeneigenschaften der Integrale gelangt, ist bisher nichts veröffentlicht worden.

---

*) Man vergleiche hierfür vor allem den auf S. 694 zitierten Bericht von Brill und Noether (S. 426—430).

Sechsunddreifsigste Vorlesung.

Die Periodenrelationen der Integrale erster und zweiter Gattung. — Weierstrafssche und Riemannsche Form der Periodenrelationen. — Lineare Transformation der Perioden. — Die Perioden der Integrale zweiter und dritter Gattung als Funktionen der Unstetigkeitspunkte. — Primfunktionen. — Zerlegung der Funktionen des Körpers in Primfunktionen.

§ 1.

Wir gehen jetzt dazu über, die weiteren Konsequenzen des Satzes über die Vertauschung von Parameter und Argument zu ziehen und im Zusammenhang hiermit auch darzulegen, dafs die in der zweiundzwanzigsten Vorlesung abgeleiteten Periodenrelationen sämtlich, wenn auch zunächst in etwas anderer Form, aus ihm hervorgehen.

Spezialisieren wir zunächst den Satz auf S. 632 für den Fall, dafs das Querschnittsystem $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ eine kanonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche hervorbringt, so ergiebt sich folgendes Theorem:

Wird die Riemannsche Fläche durch die Periodenwege

$$1)\qquad \begin{aligned} s_1 &= a_1, & s_2 &= a_2, \ldots & s_p &= a_p \\ s_{p+1} &= b_1, & s_{p+2} &= b_2, \ldots & s_{2p} &= b_p \end{aligned}$$

in kanonischer Weise zerschnitten und ist

$$2)\qquad T = (t_{\alpha\beta}) = \left(\int\limits_{s_\beta} dt_\alpha\right) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

das zugehörige Periodensystem der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$, so geht die alternierende Hauptform

$$\mathsf{E} = \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta = \sum_{k=1}^{p} (x_k y_{p+k} - x_{p+k} y_k)$$

durch die kongruenten Transformationen

$$3)\qquad x_\alpha = \sum_\beta t_{\alpha\beta}\, \bar{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum_\beta t_{\alpha\beta}\, \bar{y}_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

bis auf einen Faktor in sich selbst über; es ist nämlich

$$4)\qquad \bar{T}\,\mathsf{E}\,T = -2\pi i \cdot \mathsf{E}.$$

In der Gleichung (4) sind $\binom{2p}{2} = p(2p-1)$ bilineare Relationen zwischen den $4p^2$ Perioden $t_{\alpha\beta}$ der Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung $t_1, \ldots t_p, t_{p+1}, \ldots t_{2p}$ zusammengefafst, nämlich die folgenden

4a) $$\sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} t_{\alpha\alpha'} t_{\beta\beta'} = -2\pi i\, \varepsilon_{\alpha'\beta'} \qquad (\alpha', \beta' = 1, 2, \ldots 2p)$$

oder

4b) $$\sum_{k=1}^{p} (t_{k\alpha} t_{p+k,\beta} - t_{p+k,\alpha} t_{k\beta}) = -2\pi i\, \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p);$$

jede derselben enthält diejenigen Perioden der sämtlichen $2p$ Hauptintegrale, welche sich auf eine bestimmte Kombination zweier Querschnitte s_α, s_β beziehen.

Man kann aber diese Gleichungen noch in eine zweite Gestalt bringen, welche zwar formal verschieden ist, aber thatsächlich ganz dieselben algebraischen Beziehungen zwischen den $4p^2$ Perioden $t_{\alpha\beta}$ festlegt. Da nämlich nach der Gleichung (12) auf S. 632 das Quadrat der alternierenden Hauptform bis aufs Vorzeichen gleich der Einheitsform, also

$$\mathsf{E}^2 = -E$$

ist, so folgt aus (4):

$$\mathsf{E}\overline{T} \cdot \mathsf{E}T = 2\pi i \cdot E;$$

d. h. die Zusammensetzung der Systeme $\mathsf{E}\overline{T}$ und $\mathsf{E}T$ ergiebt bis auf den Faktor $2\pi i$ das Einheitssystem, sie sind also, wenn das eine noch durch $2\pi i$ dividiert wird, reziprok. Da aber nach S. 130 reziproke Systeme vertauschbar sind, so folgt auch die Gleichung

$$\mathsf{E}T \cdot \mathsf{E}\overline{T} = 2\pi i \cdot E = -2\pi i \cdot \mathsf{E}^2$$

oder

5) $$T\mathsf{E}\overline{T} = -2\pi i \cdot \mathsf{E}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (4), so sieht man, dafs T einfach durch das konjugierte System $\overline{T}$ ersetzt ist; es gilt also auch der folgende Satz:

Die alternierende Hauptform E geht auch durch die zu (3) konjugierten Transformationen

6) $$x_\alpha = \sum_\beta t_{\beta\alpha} \overline{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum_\beta t_{\beta\alpha} \overline{y}_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

bis auf den Faktor $-2\pi i$ in sich selbst über.

Löst man aber die symbolische Gleichung (5) in das System von $p(2p-1)$ Bilinearrelationen auf, welches sie vertritt, so findet man

5a) $$\sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}\, t_{\alpha'\alpha}\, t_{\beta'\beta} = -2\pi i\, \varepsilon_{\alpha'\beta'} \qquad (\alpha', \beta' = 1, 2, \ldots 2p)$$

oder

5b) $$\sum_{k=1}^{p} (t_{\alpha k}\, t_{\beta, p+k} - t_{\alpha, p+k}\, t_{\beta k}) = -2\pi i\, \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p);$$

jede dieser Relationen enthält die sämtlichen $2p$ Perioden je zweier Hauptintegrale t_α und t_β; während also in einer Gleichung (4b) immer alle $2p$ Integrale und je zwei Periodenwege auftreten, so erscheinen in einer Gleichung (5b) immer alle $2p$ Periodenwege und je zwei Fundamentalintegrale.

Die Gleichungen (5b) sind diejenige Form der Periodenrelationen, welche sich durch die in § 2 der zweiundzwanzigsten Vorlesung angewendete Methode der Integration über den gesamten Rand der zerschnittenen Riemannschen Fläche ergiebt.

Wählt man nämlich in (5b) für t_α und t_β zwei Integrale erster Gattung, d. h. nimmt man α und $\beta > p$ an, so ist $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$, und man erhält die in Gleichung (I) auf S. 349 aufgestellte bilineare Beziehung zwischen den Perioden zweier beliebiger Integrale erster Gattung. In der That ist in den damaligen Bezeichnungen

$$A_k^{(1)} = -t_{\alpha, p+k} = -\int_{b_k} dt_\alpha, \quad B_k^{(1)} = t_{\alpha k} = \int_{a_k} dt_\alpha$$

$$A_k^{(2)} = -t_{\beta, p+k} = -\int_{b_k} dt_\beta, \quad B_k^{(2)} = t_{\beta k} = \int_{a_k} dt_\beta,$$

wodurch die beiden verglichenen Gleichungen identisch werden. Wählt man aber für t_α ein Integral zweiter, für t_β eins der ersten Gattung, so erhält man die durch die Gleichung (II) auf S. 350 angegebene Periodenrelation; setzt man nämlich

$$\alpha = i, \quad \beta = p + k,$$

wo i und k der Reihe $1, 2, \ldots p$ angehören, so sind die Differenzen der beiden Integrale an den Querschnitten a_l und b_l in den damaligen Bezeichnungen

$$A_l = -\int_{b_l} dt_{p+k} = -t_{p+k, p+l}, \quad B_l = \int_{a_l} dt_{p+k} = t_{p+k, l}$$

$$C_l = -\int_{b_l} dt_i = -t_{i, p+l}, \qquad D_l = \int_{a_l} dt_i = t_{il},$$

also

$$\sum_{l=1}^{p}(C_l B_l - A_l D_l) = \sum_{l=1}^{p}(t_{il}t_{p+k,p+l} - t_{i,p+l}t_{p+k,l}),$$

und da die Summe rechts nach (5b) gleich $-2\pi i$ oder Null ist, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind, so bleibt zur Herstellung völliger Übereinstimmung mit der damals gefundenen Relation blofs noch nachzuweisen, dafs das Residuum

$$(6) \qquad R_{\mathfrak{P}_\infty}(t_i\,dw_k) = -\,\delta_{ik}$$

ist, wo δ_{ik} das schon öfter benutzte Symbol bedeutet und t_{p+k} wieder durch w_k ersetzt ist.

Um diese Gleichung zu beweisen, berücksichtigen wir, dafs nach den Gleichungen (10) und (10a) auf S. 571 zu den Indices i und k bestimmte Zahlen

$$\varrho_i = n\gamma_h + h, \quad \varrho_k = n\gamma_g + g \qquad \begin{pmatrix} 0 \leq \gamma_h < \mu_h \\ 0 \leq \gamma_g < \mu_g \end{pmatrix}$$

gehören und dafs

$$w_k = \int z^{\mu_g - 1 - \gamma_g}\,\eta^{(g)}\,dz$$

ist, während der Hauptteil von t_i nach S. 591 mit dem von

$$\varphi_{h,\gamma_h} = \frac{\xi^{(h)}}{z^{\mu_h - \gamma_h}}$$

übereinstimmt. Daher kann auf der linken Seite der Gleichung (6) das Integral t_i, weil das Residuum nur vom Hauptteil abhängt, geradezu durch φ_{h,γ_h} ersetzt werden, und es ist

$$R_{\mathfrak{P}_\infty}(t_i\,dw_k) = R_{\mathfrak{P}_\infty}(z^{\mu_g - \mu_h - 1 - \gamma_g + \gamma_h}\,\eta^{(g)}\,\xi^{(h)}\,dz).$$

Da aber bei $(z = \infty)$ nur ein Punkt der Riemannschen Fläche gelegen ist, so erhält man nach S. 342, wenn man vom Residuum des Abelschen zu dem des entsprechenden rationalen Differentials übergeht, für eine beliebige Gröfse ζ des Körpers

$$R_{\mathfrak{P}_\infty}(\zeta\,dz) = R_{\mathfrak{p}_\infty}\big(S(\zeta)\,dz\big),$$

wo $S(\zeta)$ die Spur von ζ in Bezug auf die Variable z bedeutet. Folglich ist

$$R_{\mathfrak{P}_\infty}(t_i\,dw_k) = R_{\mathfrak{p}_\infty}\left(z^{\mu_g - \mu_h - 1 - \gamma_g + \gamma_h}\,S(\eta^{(g)}\xi^{(h)})\,dz\right).$$

Weil aber die Fundamentalsysteme $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n-1)}$ und $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots \eta^{(n-1)}$ komplementär sind, so ist die Spur

$$S(\eta^{(g)}\xi^{(h)}) = \eta_1^{(g)}\xi_1^{(h)} + \eta_2^{(g)}\xi_2^{(h)} + \cdots + \eta_n^{(g)}\xi_n^{(h)}$$

nach der Gleichung (2) auf S. 232 nur dann von Null verschieden, nämlich gleich Eins, wenn $g = h$ ist. In diesem Falle aber ist auch $\mu_g = \mu_h$, also

$$R_{\mathfrak{P}_x}(t_i\,dw_k) = R_{\mathfrak{p}_x}\left(\frac{dz}{z^{\gamma_g-\gamma_h+1}}\right),$$

und dieses Residuum ist nach S. 271 dann und nur dann von Null verschieden, nämlich gleich -1, wenn $\gamma_g = \gamma_h$ ist. Das Residuum

$$R_{\mathfrak{P}_x}(t_i\,dw_k)$$

ist also gleich Null, es sei denn, dafs $g = h$ und $\gamma_g = \gamma_h$ ist, in welchem Falle sein Wert -1 ist; dann aber ist auch $\varrho_i = \varrho_k$ und $i = k$. Damit ist die Gleichung (6) vollständig erwiesen.

In ähnlicher Weise liefse sich schliefslich auch die Gleichung (5b) für den letzten Fall, dafs t_α und t_β beide Integrale zweiter Gattung sind, durch die Methode der Randintegration erweisen; hierauf gehen wir nicht weiter ein, weil die entsprechende Formel in der zweiundzwanzigsten Vorlesung in dieser Allgemeinheit nicht abgeleitet wurde.

Die beiden verschiedenen Formelsysteme (4) resp. (5) werden gewöhnlich als die Weierstrafssche und die Riemannsche Form der Bilinearrelationen zwischen den Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung unterschieden, weil die erste sich bei dem Weierstrafsschen Verfahren der Ableitung aus dem Vertauschungssatze, die zweite bei der Riemannschen Methode der Randintegration als die ursprünglichere einstellt; beide Formen sind, wie wir gesehen haben, völlig miteinander äquivalent.

Bilden wir die Relationen für das elliptische Gebilde, das wir in der Weierstrafsschen Normalform voraussetzen:

$$u^2 = (z-e_1)(z-e_2)(z-e_3) = z^3 - \frac{g_2}{4}z - \frac{g_3}{4},$$

wobei

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

angenommen ist, so werden die Integrale erster und zweiter Gattung nach (1) und (2a) auf S. 595 u. 597

$$t = \int \frac{z\,dz}{2u}, \quad w = \int \frac{dz}{2u};$$

ihre Perioden sind

$$\omega_1 = \int\limits_a \frac{dz}{2u}, \quad \omega_2 = \int\limits_b \frac{dz}{2u}$$

$$\eta_1 = \int\limits_a \frac{z\,dz}{2u}, \quad \eta_2 = \int\limits_b \frac{z\,dz}{2u}.$$

Wir erhalten daher die Gleichung

7) $$\eta_2\omega_1 - \eta_1\omega_2 = 2\pi i$$

für die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung; diese heifst die Legendresche Relation.

Gehen wir in der Gleichung (4) von den Systemen zu den Determinanten über, so finden wir

$$|t_{\alpha\beta}|^2 = (2\pi i)^{2p} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p),$$

also

$$|t_{\alpha\beta}| = \varepsilon (2\pi i)^p \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Es ist aber bemerkenswert und für die Untersuchung des nächsten Abschnittes wesentlich, dafs das Vorzeichen ε, über welches in der letzten Gleichung noch nicht entschieden ist, stets einen bestimmten einfachen Wert, nämlich $(-1)^p$, erhält. Dafs eine solche Entscheidung möglich sein mufs, wird bereits durch die Legendresche Relation (7) plausibel, welche sofort zeigt, dafs für $p = 1$ $\varepsilon = -1$ ist; dafs aber die angegebene Vorzeichenbestimmung allgemein richtig ist, folgt durch Anwendung eines Determinantensatzes aus den Gleichungen (4b).

Denkt man sich nämlich zunächst die Gröfsen $t_{\alpha\beta}$ als unbestimmte Variabeln und bezeichnet die auf der linken Seite von (4b) auftretenden Summen zur Abkürzung mit

$$s_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{p} (t_{k\alpha} t_{p+k,\beta} - t_{k\beta} t_{p+k,\alpha}) = - s_{\beta\alpha}$$

und das von ihnen gebildete quadratische System mit S, so ist identisch

$$\bar{T} \mathsf{E}\, T = S,$$

also beim Übergange zu den Determinanten

$$|t_{\alpha\beta}|^2 = |s_{\alpha\beta}|.$$

Nun ist die Determinante $|s_{\alpha\beta}|$ eines alternierenden Systems von gerader Ordnung stets das Quadrat einer bestimmten rationalen Funktion der Elemente*), nämlich eines sogenannten Pfaffschen Aggregates

$$P = s_{1,p+1}\, s_{2,p+2} \ldots s_{p,2p} + \cdots;$$

dasselbe besteht aus den $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)$ verschiedenen und mit geeigneten Vorzeichen versehenen Produkten der Form $s_{\alpha\beta} s_{\gamma\delta} \ldots s_{\varepsilon\zeta}$, worin $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta \ldots \varepsilon\ \zeta$ eine Permutation von $1\ 2 \ldots 2p-1\ 2p$ bedeutet und das Vorzeichen jedes Gliedes positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem seine Permutation aus der des Leitgliedes durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen hervorgegangen ist. Hieraus folgt, dafs jede Determinante geraden Grades identisch in ein Pfaffsches Aggregat umgeformt werden kann; es ist nämlich

$$|t_{\alpha\beta}| = P, \tag{8}$$

und zwar mufs man beim Ausziehen der Quadratwurzel das positive Zeichen nehmen, weil, wenn T das Einheitssystem ist, $S = \mathsf{E}$ wird,

---

*) Siehe z. B. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5. Aufl. § 5, 8.

also sowohl die Determinante $|t_{\alpha\beta}|$ als auch das zu S gehörige Pfaffsche Aggregat P den Wert $+1$ erhält.

Nimmt man jetzt in der Identität (8) die Gröfsen $t_{\alpha\beta}$ gleich den Perioden des Fundamentalsystems an, so ist zufolge der Gleichungen (4b):

$$s_{\alpha\beta} = -2\pi i\,\varepsilon_{\alpha\beta}$$

und in dem Pfaffschen Aggregat P erhält das erste Glied den Wert $(-2\pi i)^p$, während alle folgenden verschwinden; folglich gilt in der That, wie vorher behauptet wurde, die Determinantenrelation

$$9)\qquad |t_{\alpha\beta}| = (-2\pi i)^p \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p).$$

§ 2.

Die kanonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche kann in sehr verschiedenartiger Weise ausgeführt werden. Betrachten wir neben der im vorigen Abschnitte untersuchten Zerschneidung durch die Schnitte

$$(s)\qquad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \ldots s_{2p}$$

eine zweite, welche durch die Schnitte

$$(\sigma)\qquad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \ldots \sigma_{2p}$$

hervorgebracht wird, so ist

$$1)\qquad \sigma_\alpha = \sum_\beta m_{\beta\alpha} s_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p);$$

hierbei bedeuten $m_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen, welche auch als Charakteristiken dargestellt werden können; es ist nämlich nach S. 644

$$\begin{aligned} m_{1\alpha} &= (\sigma_\alpha, s_{p+1}), & m_{2\alpha} &= (\sigma_\alpha, s_{p+2}), \ldots & m_{p\alpha} &= (\sigma_\alpha, s_{2p}) \\ m_{p+1,\alpha} &= -(\sigma_\alpha, s_1), & m_{p+2,\alpha} &= -(\sigma_\alpha, s_2), \ldots & m_{2p,\alpha} &= -(\sigma_\alpha, s_p). \end{aligned}$$

Diese Zahlen sind aber nicht willkürlich, sondern gewissen Bedingungen unterworfen, und wir gelangen zu diesen in einfachster Weise, wenn wir die Ergebnisse des vorigen Paragraphen benutzen.

Bezeichnen wir die Periodensysteme der Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$, welche den Zerschneidungen durch die Periodenwege (s) und (σ) entsprechen, resp. mit

$$T = (t_{\alpha\beta}) \quad \text{und} \quad \mathsf{T} = (\tau_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p),$$

so folgt unmittelbar aus der Gleichung (1):

$$2)\qquad \tau_{\alpha\gamma} = \sum_\beta t_{\alpha\beta} m_{\beta\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots 2p),$$

oder es ist

$$2\text{a})\qquad \mathsf{T} = TM.$$

Da nun die Determinanten der Systeme T und T beide den gleichen Wert $(-2\pi i)^p$ haben, so folgt zunächst für die Determinante der Substitutionskoeffizienten

3) $$|m_{\alpha\beta}| = +1 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p).$$

Es gilt also der Satz:

> Beim Übergang von einer kanonischen Zerschneidung der Riemannschen Fläche zu einer anderen hat die Determinante der Substitutionskoeffizienten den Wert $+1$.

Diese Bedingung ist aber, wenn $p > 1$ ist, nicht die einzige, sondern es tritt alsdann zu ihr eine zweite viel inhaltsreichere. Da nämlich (s) und (σ) beide auf kanonische Zerschneidungen der Fläche führen, so ist nach der Gleichung (4) des vorigen Abschnittes sowohl

4) $$\bar{T}\mathsf{E}T = -2\pi i \cdot \mathsf{E}$$

als auch

5) $$\bar{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathsf{T} = -2\pi i \cdot \mathsf{E}.$$

Die letzte Gleichung läfst sich aber nach (2a) und unter Benutzung des Satzes (3) auf S. 132 in die Form setzen:

$$\bar{M}\bar{T}\mathsf{E}TM = -2\pi i \cdot \mathsf{E},$$

und wir erhalten somit durch Vergleichung mit der ersten:

6) $$\bar{M}\mathsf{E}M = \mathsf{E}.$$

Hieraus schliefst man ebenso wie im vorigen Abschnitte, dafs auch

6a) $$M\mathsf{E}\bar{M} = \mathsf{E}$$

ist und dafs beide Gleichungen völlig äquivalent sind. Diese Relationen finden aber in folgendem Satze ihren Ausdruck:

> Hängen zwei kanonische Zerschneidungen der Riemannschen Fläche durch die Gleichungen
>
> 1) $$\sigma_\alpha = \sum_\beta m_{\beta\alpha} s_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$
>
> miteinander zusammen, so geht die Charakteristikenform
>
> $$\mathsf{E} = \sum_{k=1}^{p} (x_k y_{p+k} - x_{p+k} y_k)$$
>
> sowohl durch die ganzzahligen und unimodularen Substitutionen
>
> $$x_\alpha = \sum_\beta m_{\alpha\beta} \bar{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum_\beta m_{\alpha\beta} y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$
>
> als auch durch die konjugierten Substitutionen
>
> $$x_\alpha = \sum_\beta m_{\beta\alpha} x_\beta, \quad y_\alpha = \sum_\beta m_{\beta\alpha} \bar{y}_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$
>
> in sich über.

Daher genügen die $4p^2$ Substitutionskoeffizienten Bedingungsgleichungen, welche man, ganz analog wie im vorigen Abschnitte, in zwei verschiedene, aber äquivalente Formen setzen kann, nämlich entweder

$$7)\qquad \sum_{k=1}^{p}(m_{\alpha k}\, m_{\beta, p+k} - m_{\alpha, p+k}\, m_{\beta k}) = \varepsilon_{\alpha\beta}$$

oder $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$

$$7\text{a})\qquad \sum_{k=1}^{p}(m_{k\alpha}\, m_{p+k, \beta} - m_{p+k, \alpha}\, m_{k\beta}) = \varepsilon_{\alpha\beta};$$

für $p = 1$ sagen dieselben nur aus, dafs die Substitutionsdeterminante gleich Eins ist, für $p > 1$ erhält man aber eine viel gröfsere Anzahl, nämlich $\binom{2p}{2} = p(2p-1)$ unabhängige Gleichungen für die ganzen Zahlen $m_{\alpha\beta}$, und aus diesen kann alsdann die Determinantenrelation (3) als Folgerung auf ganz demselben Wege wie im vorigen Abschnitte hergeleitet werden, so dafs diese also keine neue Bedingung zu den Gleichungen (7) hinzufügt.

Die erhaltenen Bedingungen sind aber, wie wir jetzt noch erweisen wollen, nicht blofs notwendig, sondern sie bilden auch ein hinreichendes System. Es gilt also folgender Satz:

Geht die Charakteristikenform E durch die ganzzahligen Substitutionen

$$x_\alpha = \sum_\beta m_{\alpha\beta}\, \overline{x}_\beta, \quad y_\alpha = \sum m_{\alpha\beta}\, \overline{y}_\beta$$

in sich über, so kann man von einer kanonischen Zerschneidung der Riemannschen Fläche durch das Querschnittsystem

$$s_1, \quad s_2, \ldots s_{2p}$$

vermöge der Gleichungen

$$\sigma_\alpha = \sum_\beta m_{\beta\alpha}\, s_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

zu einem zweiten Querschnittsystem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2p}$ übergehen, welchem ebenfalls eine kanonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche entspricht.

Nach der Voraussetzung gilt nämlich die Kompositionsgleichung

$$\overline{M}\mathsf{E}M = \mathsf{E}.$$

Ferner ist, wenn zu dem kanonischen Schnittsystem (s) das Periodensystem T gehört:

$$T\mathsf{E}T = -2\pi i \cdot \mathsf{E};$$

setzt man also

$$\mathsf{T} = TM,$$

so ist

$$\overline{\mathsf{T}} = \overline{M}\,\overline{T},$$

folglich

$$\overline{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathsf{T} = -2\pi i \cdot \mathsf{E}.$$

Diese Gleichung besagt aber nach S. 632, dafs die Charakteristiken

$$(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = \varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p)$$

sind; das Querschnittsystem $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{2p}$ entspricht also einer kanonischen Zerschneidung der Riemannschen Fläche, was zu beweisen war.

Den Übergang von dem Periodensystem T zu T durch die Gleichungen (2) bezeichnet man als lineare Transformation der Perioden; hierbei bezieht sich der Ausdruck „linear“ darauf, dafs die Determinante $|t_{\alpha\beta}|$ den Wert Eins hat. Eine Transformation der Perioden, deren Determinante gleich n ist und bei welcher die Charakteristikenform E in ihr n-faches übergeht, heifst von der n^{ten} Ordnung; solche Transformationen und Zerschneidungen ergeben sich, wenn die Punkte der Riemannschen Fläche mehrdeutig aufeinander bezogen werden.

Man kann eine lineare Transformation der Perioden, ebenso wie in § 4 der vorigen Vorlesung die Transformationen der Fundamentalsysteme von Periodenwegen, in elementare auflösen; diese Elementartransformationen müssen aber, im Unterschiede von den früheren allgemeineren, so gewählt werden, dafs jede einzelne die Hauptform E in sich überführt. Auf die Ausführung im einzelnen gehen wir hier nicht weiter ein.

§ 3.

Wir wollen jetzt aus der Vertauschungsformel noch ein weiteres Resultat ableiten und hierdurch unmittelbar die Frage entscheiden, in welcher Weise die Perioden eines Integrals zweiter oder dritter Gattung mit veränderlichen Unstetigkeitspunkten von diesen abhängen.

Bilden wir zunächst das elementare Integral zweiter Gattung mit dem Pole $\mathfrak{P}$:

$$t_{\overline{\mathfrak{P}}} = \int \frac{d\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}})}{dz} d\bar{z}\, dz$$

und wenden auf dieses die Gleichung (3) auf S. 603 unter der Voraussetzung an, dafs der Weg $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ gleich dem Periodenweg s_α ist, so erhalten wir

$$\int_{s_\alpha} dt_{\mathfrak{P}} + \sum_{k=1}^{p} \int_{s_\alpha} dw_k \cdot dt_k(\mathfrak{P}) = \sum_{k=1}^{p} \int_{s_\alpha} dt_k \cdot dw_k(\mathfrak{P})$$

oder mit Benutzung der früher eingeführten Bezeichnungen

$$1) \qquad \int_{s_\alpha} dt_{\mathfrak{P}} = \sum_{k=1}^{p} \Big(t_{k\alpha} dt_{p+k}(\mathfrak{P}) - t_{k+p,\alpha} dt_k(\mathfrak{P}) \Big) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots 2p).$$

Wir erhalten also den Satz:

Die sämtlichen Perioden des früher eingeführten Elementarintegrals $t_{\mathfrak{P}}$ mit dem einfachen Pole $\mathfrak{P}$ sind lineare Kombinationen der für den Punkt $\mathfrak{P}$ gebildeten Differentiale der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$.

Man kann aus dieser Formel (1) mit Hilfe der in § 1 erhaltenen Relationen die Gleichungen (IIa) und (IV) der zweiundzwanzigsten Vorlesung auch der Form nach wiedergewinnen, was wir hier nicht mehr ausführen, weil die Rechnung nichts prinzipiell Neues darbietet. Ebenso ist die Formel, die wir sofort für die Perioden des Elementarintegrals dritter Gattung ableiten werden, im wesentlichen mit der Gleichung (III) auf S. 354 äquivalent. Wir sehen also in der That, dafs alle Resultate, die wir in § 2 der zweiundzwanzigsten Vorlesung durch die Methode der Randintegration gefunden hatten, sich jetzt auch als unmittelbare Konsequenzen des Vertauschungssatzes ergeben. Aber die jetzt angewendete Methode ist einheitlicher und von gröfserer Tragweite als die frühere, sie führt ferner überall zu fertigen Rechnungsergebnissen und macht nirgends Einschränkungen notwendig.

Wir bestimmen jetzt nach gleicher Methode die Perioden des Elementarintegrals dritter Gattung

$$\int d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = \int \big(\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1)\big)\, dz$$

mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$, denen die Residuen -1 und $+1$ zugehören. Verbindet man $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ durch einen Schnitt σ, welcher von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ führt und keinen der Periodenwege s_α schneidet, so ergiebt die Anwendung des Satzes auf S. 608 für einen Periodenweg s_α:

$$\int_{s_\alpha} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} + \sum_{k=1}^{p} \int_{s_\alpha} dw_k \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_k = \sum_{k=1}^{p} \int_{s_\alpha} dt_k \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dw_k$$

oder

2) $$\int_{s_\alpha} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = \sum_{k=1}^{p} \left(t_{k\alpha} \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_{p+k} - t_{p+k,\alpha} \int_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_k \right),$$

wobei die Integrale längs des Weges σ von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ zu leiten sind. Erstreckt man andererseits das Integral über eine kleine geschlossene Linie $\varkappa$, welche den Punkt $\mathfrak{Q}_1$ in negativem oder $\mathfrak{Q}_2$ in positivem Sinne umkreist, so folgt aus derselben Formel, da die Integrale $\int_\varkappa dt_\alpha$ verschwinden:

2a) $$\int_\varkappa d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = 2\pi i (\varkappa, \sigma) = 2\pi i.$$

Daher gilt der Satz:

> Die sämtlichen cyklischen Perioden des Elementarintegrals dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ und den Residuen -1 und $+1$ sind lineare Kombinationen der $2p$ Fundamentalintegrale $t_1, t_2, \ldots t_{2p}$, wenn dieselben von $\mathfrak{Q}_1$ nach $\mathfrak{Q}_2$ auf einem Wege σ erstreckt werden, der keinen der Periodenwege $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ schneidet, sie sind also, als Funktionen der Unstetigkeitspunkte betrachtet, Integrale zweiter Gattung; die logarithmischen Perioden sind $\pm 2\pi i$.

Denkt man sich also die Riemannsche Fläche durch die Periodenwege $s_1, s_2, \ldots s_{2p}$ und den Weg σ zerschnitten, so ist auf der neuen Fläche $\mathfrak{R}_z''$ das Integral $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P})$ eine eindeutige Funktion des Ortes, denn zwei verschiedene Wege, welche beide von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ führen und keinen der $2p+1$ Schnitte $s_1, s_2, \ldots s_{2p}, \sigma$ durchkreuzen, ergeben denselben Integralwert. Vereinigen wir mehrere derartige Elementarintegrale zu einem einzigen

$$\tilde{\omega} = R_1 \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_1} + R_2 \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_2} + \cdots + R_\nu \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_\nu}$$

und nehmen wir an, daſs $\mathfrak{Q}_0$ auf dem Rande eines Weges s_α gelegen und nur Hilfspunkt, also sein Residuum

$$-R_1 - R_2 - \cdots - R_\nu = 0$$

ist, so haben wir ν Schnitte $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \ldots \sigma_{0\nu}$ zu ziehen und erhalten alsdann für beliebige Integrale dritter Gattung wieder genau denselben allgemeinen Satz, den wir auf S. 340 formuliert hatten. Damit ist also auch auf dem jetzt eingeschlagenen Wege die Frage entschieden, was für Funktionen des Ortes die Integrale mit logarithmischen Unstetigkeitspunkten sind.

Die Formel (2) ist **unmittelbar** für Integrale dritter Gattung $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ nur dann anwendbar, wenn keine der beiden logarithmischen Stellen unendlich fern liegt; will man aber die Perioden eines Integrals $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_x \mathfrak{Q}}$, dessen einer Unstetigkeitspunkt $\mathfrak{Q}_\infty$ im Unendlichen liegt, in ihrer Abhängigkeit von dem anderen $\mathfrak{Q}$ untersuchen, so braucht man blofs

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_x \mathfrak{Q}} = \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}} + \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_x \mathfrak{Q}_0}$$

zu setzen, wobei $\mathfrak{Q}_0$ ganz beliebig ist; dann erhält man

$$\text{2a)} \qquad \int\limits_{s_\alpha} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_x \mathfrak{Q}} = \sum_{k=1}^{p} \left(t_{k\alpha} \int\limits_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}} dt_{p+k} - t_{p+k,\alpha} \int\limits_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}} dt_k \right) + C,$$

wobei

$$C = \int\limits_{s_\alpha} d\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_\infty \mathfrak{Q}_0}$$

in Bezug auf $\mathfrak{Q}$ **konstant** ist.

Aus der Gleichung (2) läfst sich schliefslich noch eine wichtige Folgerung ziehen, von welcher wir bald Gebrauch zu machen haben. Setzen wir

$$\int\limits_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_k = c_k, \quad \int\limits_{\mathfrak{Q}_1}^{\mathfrak{Q}_2} dt_{p+k} = c_{p+k},$$

so läfst sich diese Relation auch dahin aussprechen, dafs das Integral

$$\bar{\tilde{\omega}}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} + \sum_{k=1}^{p} (c_k t_{p+k} - c_{p+k} t_k)$$

keine cyklischen Perioden besitzt; das Elementarintegral $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ läfst sich also durch Hinzufügung eines Integrals zweiter Gattung mit dem Pole $\mathfrak{P}_x$ seiner cyklischen Perioden berauben. Dasselbe gilt natürlich auch von einem Integrale mit beliebig vielen logarithmischen Stellen, und es gilt auch von jedem Integrale mit blofs polaren Unstetigkeiten, wie dies schon in dem Theoreme auf S. 574 ausgesprochen ist. Daher erhalten wir den Satz:

> Jedes beliebige Abelsche Integral ω läfst sich durch Hinzufügung eines Integrals t mit einem einzigen Pole $\mathfrak{P}_\infty$, der von den logarithmischen Stellen von ω verschieden ist, seiner cyklischen Perioden berauben.

Die logarithmischen Perioden des Integrals bleiben hierbei unverändert; sind also die Residuen von ω durchweg ganze Zahlen m_ν, so besitzt das in der angegebenen Weise reduzierte Integral

$$\bar{\omega} = \omega + t$$

nur noch Perioden der Form $2\pi i m_\nu$, die Exponentialfunktion

$$e^{\bar{\omega}(\mathfrak{P})} = \Pi_0(\mathfrak{P})$$

ist also eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche.

§ 4.

Es wurde schon auf S. 155 bemerkt, daſs in einem Körper K im allgemeinen keine Funktionen existieren, welche nur eine einfache Nullstelle und einen einfachen Pol besitzen, und daſs aus diesem Grunde nicht jeder Divisor der Ordnung Null zur Hauptklasse gehört. Die Bedeutung und die Konsequenzen dieser Thatsache sind in den späteren Ausführungen in mannigfachster Weise hervorgetreten, und gerade dieser Umstand wurde Veranlassung und Ausgangspunkt für die eindringendere Analyse der Körper positiven Geschlechtes. Es ist daher von Wert, daſs wir jetzt mit Hilfe der Integrale dritter Gattung Funktionen mit einfacher Nullstelle und einfachem Pole zu bilden im stande sind; diese sind aber natürlich nicht mehr eindeutige Funktionen des Ortes auf der Riemannschen Fläche, sondern sie erhalten bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges konstante Faktoren. Durch Hinzunahme dieser Funktionen erweitern wir den algebraischen Körper K in ähnlicher Weise, wie wir ihn früher (s. S. 574) durch Adjunktion der allgemeinen Integrale zweiter Gattung bereichert haben. Aber während die frühere Erweiterung den Zweck hatte, nur die Unregelmäſsigkeiten in der Art des Unendlichwerdens der Funktionen von K auszugleichen, so bezieht sich die jetzige auf die Null- und Unendlichkeitsstellen gemeinsam und steht daher mit der Klasseneinteilung der Divisoren in Zusammenhang; während jene sich bei additiver Zusammenfügung der Funktionen als fruchtbar erweist, bewährt diese ihre Wirksamkeit bei Ausführung von Multiplikationen.

Bilden wir, wie im vorigen Abschnitte, das Integral

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2} = \int \big(\theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_2) - \theta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}_1)\big)\, dz$$

mit den Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ und den Residuen -1 und $+1$, so wird dasselbe in $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ resp. wie

$$-\lg(z-\alpha_1)^{\frac{1}{a_1}} \quad \text{und} \quad \lg(z-\alpha_2)^{\frac{1}{a_2}}$$

unendlich, wenn $\mathfrak{Q}_i$ ein a_i-blättriger Verzweigungspunkt und α_i der Wert von z in ihm ist. Die Funktion

$$e^{\bar{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P})} = \Pi(\mathfrak{P})$$

hat daher nur in $\mathfrak{Q}_1$ einen einfachen Pol, in $\mathfrak{Q}_2$ eine einfache Nullstelle, und sie verhält sich in allen übrigen Punkten der Riemannschen Fläche regulär und besitzt in ihnen die Ordnungszahl Null. Man kann daher dieser Funktion den Divisor $\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_1}$ geradezu zuordnen und dies auch durch die Bezeichnung

$$e^{\bar{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{P})} = \Pi\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_1}\right)$$

zum Ausdruck bringen; wir nennen die Funktion Π eine zu dem Divisor $\frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_1}$ gehörige Primfunktion.

Bilden wir ein Produkt derartiger Funktionen, so besitzt dasselbe eine gleiche Anzahl willkürlicher Null- und Unendlichkeitsstellen und ist also einem Divisor der Ordnung Null zugeordnet. Haben wir umgekehrt einen beliebigen Divisor der Ordnung Null

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu_2} \dots \mathfrak{Q}_h^{\mu_h},$$

für welchen also die Summe der ganzen Zahlen

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h = 0$$

ist, so wählen wir einen beliebigen Hilfspunkt $\mathfrak{Q}_0$ und bilden mit ihm die Funktion

$$e^{\mu_1 \bar{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_1} + \mu_2 \bar{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_2} + \cdots + \mu_h \bar{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_h}} = \Pi\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_0}\right)^{\mu_1} \Pi\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_0}\right)^{\mu_2} \cdots \Pi\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_h}{\mathfrak{Q}_0}\right)^{\mu_h} = P(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}),$$

welche in $\mathfrak{Q}_0$ die Ordnungszahl Null hat und daher genau dem Divisor $\mathfrak{D}$ entspricht.

Da die Integrale $\bar{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}}(\mathfrak{P})$ durch Angabe der Unstetigkeitspunkte und der Residuen nur bis auf solche der ersten Gattung bestimmt sind, so ist es, um die allgemeinsten Funktionen zu bilden, welche durch Produktbildung von Primfunktionen erzeugt werden können, noch erforderlich, solche Gröfsen hinzuzunehmen, deren Logarithmus ein beliebiges Integral erster Gattung ist:

$$E(\mathfrak{P}) = e^{w(\mathfrak{P})} = e^{c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_p w_p}.$$

Derartige Funktionen sind auf der ganzen Riemannschen Fläche regulär und haben keine Null- oder Unendlichkeitsstellen; sie übernehmen in dieser Theorie die Rolle der Einheitsfunktionen und sollen daher zum Unterschiede von den früher benutzten algebraischen als „transcendente Einheitsfunktionen“ bezeichnet werden.

Beide Arten von Funktionen, sowohl die Prim- wie die Einheitsfunktionen, sind natürlich auf der Riemannschen Fläche nicht eindeutig, sondern da die im Exponenten auftretenden Integrale bei Fortsetzung längs eines Periodenweges einen konstanten Zuwachs c, nämlich den zugehörigen Periodizitätsmodul, erhalten, so reproduzieren sich die Exponentialfunktionen selbst bis auf eine multiplikative Konstante e^c. Wir brauchen aber hierbei auch bei den Integralen dritter Gattung blofs die cyklischen Perioden in Betracht zu ziehen, da die logarithmischen ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ sind und also bei der Exponentialbildung fortfallen. Ein Produkt aus Einheits- und Primfunktionen teilt also mit den Funktionen des Körpers K die Eigenschaft, auf der Riemannschen Fläche bis auf einzelne Pole regulär zu sein, unterscheidet sich aber von ihnen dadurch, dafs es im allgemeinen nicht eindeutig vom Orte abhängt.

Wir wollen jetzt die allgemeinste, zu einem gegebenen Divisor $\mathfrak{D}$ der Ordnung Null gehörige Funktion

$$P(\mathfrak{P}) = e^{\mu_1 \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_1} + \mu_2 \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_2} + \cdots + \mu_h \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_h} + C_1 w_1 + C_2 w_2 + \cdots + C_p w_p}$$

bilden und uns die Frage vorlegen, wie der Divisor $\mathfrak{D}$ beschaffen sein mufs, damit bei geeigneter Auswahl der p Konstanten C_i die Multiplikatoren $M_1, M_2, \ldots M_{2p}$, welche den $2p$ Querschnitten entsprechen, sämtlich gleich Eins werden. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist $P(\mathfrak{P})$ eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche, also eine Gröfse ξ des Körpers K, und der ihr entsprechende Divisor ist $\mathfrak{D}$; der Divisor $\mathfrak{D}$ gehört also in diesem Falle der Hauptklasse an. Da wir $2p$ Forderungen zu genügen und nur p Gröfsen $C_1, C_2, \ldots C_p$ zur Verfügung haben, so erhalten wir auf diesem Wege ein System von p für die Zugehörigkeit des Divisors $\mathfrak{D}$ zur Hauptklasse hinreichenden Bedingungsgleichungen.

Nun ergiebt sich aber aus der Formel (2) auf S. 657

$$\lg M_\alpha = \sum_{k=1}^{p} (t_{k\alpha} Q_k - t_{p+k,\alpha} Q_{p+k}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2p),$$

wobei die Gröfsen Q_k und Q_{p+k} durch die Gleichungen

$$Q_k = \mu_1 \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_1} dt_{p+k} + \mu_2 \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_2} dt_{p+k} + \cdots + \mu_h \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_h} dt_{p+k},$$

$$Q_{p+k} = \mu_1 \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_1} dt_k + \mu_2 \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_2} dt_k + \cdots + \mu_h \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_h} dt_k - C_k$$

bestimmt sind.

Soll nun $M_1 = M_2 = \cdots = M_{2p} = 1$ sein, so mufs $\lg M_\alpha = 0$ oder wenigstens ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ sein. Nehmen wir, um sogleich das Hauptresultat zu übersehen, zunächst den ersten Fall an, so ergiebt sich sofort, da die Determinante $|t_{\alpha\beta}|$ nach S. 621 von Null verschieden ist, dafs

$$Q_k = 0, \quad Q_{p+k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots p)$$

sein mufs, und hier sind die ersten p Gleichungen

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots Q_p = 0$$

die p Bedingungsgleichungen für den Divisor $\mathfrak{D}$, während die folgenden

$$Q_{p+1} = 0, \quad Q_{p+2} = 0, \ldots Q_{2p} = 0$$

zur Bestimmung der p Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_p$ dienen.

Nehmen wir jetzt allgemeiner an, dafs

$$\lg M_\alpha = \sum_{k=1}^{p} (t_{k\alpha} Q_k - t_{p+k,\alpha} Q_{p+k}) = 2\pi i n_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$$

ist, wo $n_1, n_2, \ldots n_{2p}$ ganze Zahlen sind, so ergiebt sich die Auflösung dieser in $Q_1, Q_2, \ldots Q_{2p}$ linearen Gleichungen aus den Periodenrelationen (5b) auf S. 648.

$$\begin{aligned} Q_k &= -n_1 t_{p+k,p+1} - n_2 t_{p+k,p+2} - \cdots - n_p t_{p+k,2p} \\ &\quad + n_{p+1} t_{p+k,1} + n_{p+2} t_{p+k,2} + \cdots + n_{2p} t_{p+k,p} \\ Q_{p+k} &= -n_1 t_{k,p+1} - n_2 t_{k,p+2} + \cdots - n_p t_{k,2p} \\ &\quad + n_{p+1} t_{k1} + n_{p+2} t_{k2} + \cdots + n_{2p} t_{kp}. \end{aligned}$$

Es müssen also $Q_1, Q_2, \ldots Q_p$ zusammengehörige Perioden der Integrale

$$t_{p+1} = w_1, \quad t_{p+2} = w_2, \ldots t_{2p} = w_p$$

für einen und denselben Periodenweg s sein, für welchen nach (5) auf S. 644 die Charakteristiken $(s, s_\alpha) = n_\alpha$ sind. Die entsprechenden Perioden der Integrale zweiter Gattung treten alsdann bei der Bildung der Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_p$ auf.

Führen wir nun für die Perioden der Integrale erster Gattung, die hier wieder in eine bevorzugte Stellung rücken, eine etwas bequemere Bezeichnung ein, indem wir

$$t_{p+k,p+l} = \int\limits_{b_l} dw_k = -\omega_{kl}, \quad t_{p+k,l} = \int\limits_{a_l} dw_k = \omega_{k,p+l}$$

setzen, so können wir das gewonnene Resultat in folgendem Satze zusammenfassen:

Wenn für einen Divisor der Ordnung Null

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu_2} \ldots \mathfrak{Q}_h^{\mu_h}$$

die p Summen von Integralen erster Gattung

$$Q_k = \mu_1 \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_1} dw_k + \mu_2 \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_2} dw_k + \cdots + \mu_h \int_{\mathfrak{Q}_0}^{\mathfrak{Q}_h} dw_k \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

ein System zusammengehöriger Periodizitätsmoduln für einen und denselben Periodenweg s bilden, so daſs

$$Q_k = n_1 \omega_{k1} + n_2 \omega_{k2} + \cdots + n_{2p} \omega_{k, 2p} \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

und $n_\alpha = (s, s_\alpha)$ ist, so gehört der Divisor $\mathfrak{D}$ zur Hauptklasse. Hierbei ist die untere Grenze $\mathfrak{Q}_0$ der Integrale wegen der Relation

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h = 0$$

ganz beliebig.

Die Bedeutung dieses Fundamentalsatzes tritt erst in der nächsten Vorlesung in voller Klarheit hervor, in welcher sich mit Hilfe des Abelschen Theorems die Umkehrbarkeit des Satzes und damit eine analytische Bedingung für die Äquivalenz von Divisoren ergiebt.

Die hier benutzten Primfunktionen sind auf der Riemannschen Fläche, abgesehen von Polen, regulär, aber nicht eindeutig. Man kann aber auch, dem Vorgange von Weierstraſs folgend, an ihrer Stelle solche Primfunktionen einführen, welche auf der Riemannschen Fläche durchweg eindeutig sind und dafür eine wesentliche Singularität nach Art der Exponentialfunktion besitzen, die beim Übergang zum Logarithmus zu einer polaren Unstetigkeit wird. Man kann nämlich nach dem Schlusse des vorigen Paragraphen zu dem Integrale $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}$ so eines der zweiten Gattung mit dem Pole $\mathfrak{P}_\infty$ hinzufügen, daſs

$$\bar{\tilde{\omega}}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} = \tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2} + t$$

keine cyklischen Perioden besitzt, also

$$e^{\bar{\tilde{\omega}}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}} = \Pi_0\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_1}\right)$$

auf der Riemannschen Fläche eindeutig ist. Ein Produkt derartiger Primfunktionen

$$P_0 = \Pi_0\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_0}\right)^{\mu_1} \Pi_0\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_2}{\mathfrak{Q}_0}\right)^{\mu_2} \ldots \Pi_0\left(\mathfrak{P}, \frac{\mathfrak{Q}_h}{\mathfrak{Q}_0}\right)^{\mu_h}$$

ist ebenfalls auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ eindeutig und besitzt in den Punkten $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_h$ Nullstellen oder Pole, hat aber über-

dies noch in $\mathfrak{P}_x$ eine wesentliche Singularität von der Art, dafs sein Logarithmus daselbst wie ein Integral zweiter Gattung unendlich wird. Will man dann aus dem Komplexe der so zu erhaltenden Funktionen die Gröfsen des Körpers K aussondern, so hat man jetzt die Bedingung dafür festzustellen, dafs die singuläre Stelle bei $\mathfrak{P}_x$ fortfällt. Hierfür ergeben sich p Gleichungen, da es p eigentliche Integrale zweiter Gattung giebt. Die Rechnung, die natürlich zum gleichen Endresultat führt, kann übergangen werden, da sie im Prinzip mit der vorigen zusammenfällt und beide Betrachtungsweisen sich nur formal voneinander unterscheiden.

Siebenunddreifsigste Vorlesung.

Das Abelsche Theorem als Additionsprinzip der Integrale. — Durchführung der Rechnung für die Elementarintegrale der drei Gattungen. — Die Bedeutung des Abelschen Theorems in seiner allgemeinsten Gestalt. — Zusammenhang mit der Klasseneinteilung der Divisoren. — Die zwei aus dem Abelschen Theoreme sich ergebenden Reduktionsprobleme. — Lösung der ersten Aufgabe. — Lösung der zweiten Aufgabe. — Spezialfälle. — Das Umkehrproblem der Abelschen Integrale.

§ 1.

Das Abelsche Theorem, zu dessen Darlegung wir jetzt übergehen, giebt in seiner ursprünglichsten Gestalt die Bedingungen dafür an, dafs eine Summe von Abelschen Integralen mit gleichem Integranden und verschiedenen Grenzen durch algebraische Ausdrücke und deren Logarithmen ersetzt werden kann und lehrt in diesem Falle die Summation ausführen. Es leistet also dasselbe für beliebige Abelsche Integrale, was das bekannte Additionstheorem für Logarithmen und cyklometrische Funktionen leistet.

Für die Formulierung des Abelschen Theorems ist der schon in § 3 der neunzehnten Vorlesung besprochene Umstand von fundamentaler Bedeutung, dafs jedes beliebige Abelsche Differential

$$d\omega = \zeta_z dz \tag{1}$$

in sehr verschiedene Formen gebracht werden kann, weil jede nicht konstante Gröfse x des Körpers $K(z, u)$ als unabhängige Variable zu Grunde gelegt werden kann; wir erhalten alsdann, wenn wir x an Stelle von z einführen:

$$d\omega = \zeta_x dx, \tag{1a}$$

wo die beiden Integranden ζ_x und ζ_z durch die Gleichung

$$\zeta_x = \zeta_z \frac{dz}{dx}$$

verbunden sind. Das Theorem beruht nämlich geradezu auf dem einfachen, aber weittragenden Grundgedanken, dafs wir eine willkürliche, aber bestimmte Variable x auswählen und solche Differentiale, welche in Beziehung auf x konjugiert sind, zu einem r a t i o n a l e n Differential durch Summenbildung vereinigen können.

Ist nämlich die Ordnung von x gleich r, so genügt (s. S. 240) jede beliebige Gröfse ζ des Körpers K einer Gleichung r^{ten} Grades:

$$a_r(x)\zeta^r + a_{r-1}(x)\zeta^{r-1} + \cdots + a_1(x)\zeta + a_0(x) = 0,$$

in welcher die Koeffizienten ganze Funktionen von x sind, und es ist die Summe der konjugierten Gröfsen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_r$:

$$\text{2)} \qquad \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_r = -\frac{a_{r-1}(x)}{a_r(x)}$$

eine rationale Funktion $R(x)$ von x; d. h. es ist die Spur

$$\text{2a)} \qquad S(\zeta) = R(x).$$

Es gehören also zu jedem beliebigen Werte a von x r verschiedene oder gleiche Punkte der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$, welche den Primteilern von

$$\mathfrak{z}_{x-a} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r$$

entsprechen und auf den r Blättern von $\mathfrak{R}_x$ übereinander liegen. Schreiten wir nun von der Stelle $(x = a)$, die wir auf der schlichten Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ durch $\mathfrak{p}$ bezeichnen wollen, durch das Differential dx zu einer Nachbarstelle $\mathfrak{p}'$ mit dem Werte $(x = a')$ fort, so gehen auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ die Punkte $\mathfrak{P}_h$ in $\mathfrak{P}_h'$ über, wobei

$$\mathfrak{z}_{x-a'} = \mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2' \ldots \mathfrak{P}_r'$$

ist und die unendlich kleinen Wege $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_2', \ldots \mathfrak{P}_r\mathfrak{P}_r'$ auf $\mathfrak{R}_x$ übereinanderlaufen, also auf dasselbe Differential dx führen. Daher ist

$$\text{3)} \qquad \zeta_1\,dx + \zeta_2\,dx + \cdots + \zeta_r\,dx = R(x)\,dx$$

oder wenn $\zeta\,dx = d\omega$, $R(x)\,dx = d\varrho$ gesetzt wird:

$$\text{3a)} \qquad d\omega(\mathfrak{P}_1) + d\omega(\mathfrak{P}_2) + \cdots + d\omega(\mathfrak{P}_r) = d\varrho(\mathfrak{p}).$$

In dieser einfachen Gleichung hat man bereits das Abelsche Theorem in seiner allgemeinsten Gestalt vor sich. Der Schwerpunkt der Betrachtung liegt durchaus darauf, dafs auf einer bestimmten, zum Körper K gehörigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ und ebenso ihre Nachbarpunkte übereinanderliegende Punkte sind und dafs alsdann $d\varrho$ ein rationales Differential ist, gebildet für den Punkt $\mathfrak{p}$, welcher auf der schlichten Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ den r Punkten $\mathfrak{P}_h$ entspricht. Gehen wir also zu den Integralen über, indem wir den Punkt $\mathfrak{p}$ auf beliebigem Wege in $\mathfrak{K}_x$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, den Punkt $\mathfrak{P}_h$ also auf einem der r entsprechenden Wege in $\mathfrak{R}_x$ von $\mathfrak{A}_h$ nach $\mathfrak{B}_h$ fortrücken lassen, so erhalten wir die Gleichung

$$(4)\qquad \int_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} d\omega + \int_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} d\omega + \cdots + \int_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} d\omega = \int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} R(x)\,dx,$$

in welcher die Integrationswege $\mathfrak{A}_h \mathfrak{B}_h$ durch den Weg $\mathfrak{ab}$ eindeutig bestimmt sind; dieselbe ist der Gleichung (3) im wesentlichen äquivalent, vollzieht aber den Fortschritt von unendlich kleinen zu endlichen Integrationswegen.

Hierbei nimmt x in $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_r$ den gleichen Wert a, in $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_r$ den gleichen Wert b an, und es ist also

$$\mathfrak{z}_{x-a} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{z}_{x-b} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_r = \mathfrak{B}$$

oder

$$x' = \frac{x-b}{x-a} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}.$$

Somit sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ganze Divisoren derselben Klasse, die dem Zähler und Nenner der Gröfse x', einer linearen Funktion von x, entsprechen; nun nimmt zwar die Funktion x bei dieser ganzen Betrachtung vor den anderen Gröfsen des Körpers eine bevorzugte Stellung ein, es können aber doch lineare Funktionen stets für einander eintreten, ohne dafs sich etwas wesentliches ändert, weil x' von ∞ bis Null läuft, wenn x von a bis b variiert, und die Bestimmung der Punkte $\mathfrak{A}_h$ und $\mathfrak{B}_h$ hiervon ganz unberührt bleibt. Die Bedingung, dafs $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ganze Divisoren derselben Klasse sind, ist aber offenbar auch die einzige, an welche die Möglichkeit, eine Gleichung der Form (4) für beliebige Abelsche Integrale aufzustellen, geknüpft ist; denn ist $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, so giebt es eine Funktion

$$x' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},$$

und wenn wir diese in der vorher dargelegten Weise für die Bildung der Differentiale zu Grunde legen und über x' von Null bis Unendlich integrieren, so erhalten wir eben die Gleichung (4). Hierdurch erlangen wir bereits Einblick in die Bedeutung der Auszeichnung einer bestimmten Variabeln x und fassen das gewonnene Resultat in dem Satze zusammen:

> Nach dem Abelschen Theoreme können Integrale mit gleichem Integranden durch das Integral einer rationalen Funktion summiert werden, sobald die Vereinigung ihrer unteren und ihrer oberen Grenzen zwei ganze Divisoren derselben Klasse liefert.

Bevor wir die hieraus entspringenden Folgerungen weiter verfolgen, wollen wir die Gleichung (4) für die Elementarintegrale der drei

Gattungen spezialisieren und die den drei Fällen entsprechenden rationalen Differentiale $R(x)dx$ bestimmen. Hierbei haben wir der Hauptsache nach nur die beiden auf S. 411 und 412 bewiesenen Sätze über Spuren in Anwendung zu bringen.

I. Ist das Integral

$$w = \int \zeta \, dx$$

von der ersten Gattung, so ist der Differentialteiler $\mathfrak{G}$ von

$$dw = \zeta \, dx$$

ganz, also hat

$$\zeta = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{Z}_x}$$

nur den Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}_x$ oder einen Teiler von ihm im Nenner und verschwindet für die sämtlichen Stellen $(x = \infty)$. Zufolge der ersten Eigenschaft ergiebt sich nach dem Satze auf S. 411

$$S(\zeta) = R(x) = \text{const.},$$

zufolge der zweiten ist die Konstante gleich Null. Wir erhalten also das Abelsche Theorem für Integrale erster Gattung:

Sind $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_r$ zwei äquivalente ganze Divisoren und ist $x' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, so ist für jedes Integral erster Gattung

$$\text{4a)} \qquad \int_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} dw + \int_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} dw + \cdots + \int_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} dw = 0,$$

wenn die Integrale auf übereinander verlaufenden Wegen in der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_{x'}$ geleitet werden.

II. Ist das Integral

$$t_\mu = \int \zeta \, dx$$

ein Elementarintegral zweiter Gattung mit dem μ-fachen Pole $\mathfrak{Q}$, so hat der Differentialteiler von t_μ nach S. 311 den Nenner $\mathfrak{Q}^{\mu+1}$, also ist

$$\text{5)} \qquad \zeta = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{Q}^{\mu+1}\mathfrak{Z}_x},$$

wo $\mathfrak{G}$ einen ganzen Divisor bedeutet.

Ist nun $\mathfrak{Q}$ auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ ein α-blättriger Verzweigungspunkt und nehmen wir, was nach den obigen Bemerkungen

ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, zur Bestimmung der Form des rationalen Differentiales zunächst an, dafs x in $\mathfrak{Q}$ unendlich wird, so ist $\mathfrak{n}_x$ genau durch $\mathfrak{Q}^\alpha$ teilbar und es kann daher ζ auch in die Gestalt gesetzt werden:

5a) $$\zeta = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{n}_x^h \mathfrak{Z}_x},$$

wobei der Divisor

$$\mathfrak{G}' = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{n}_x^{h+2}}{\mathfrak{Q}^{\mu+1}}$$

ebenfalls ganz ausfällt, sobald der zu unserer Verfügung stehende Exponent h so gewählt wird, dafs

$$(h+2)\alpha \geqq \mu + 1$$

ist. Um den kleinsten zulässigen Wert von h zu finden, setzen wir

$$\mu = \mu'\alpha + r' \qquad (0 \leqq r' < \alpha),$$

wo r' den kleinsten positiven Rest von μ (mod. α) und μ' die gröfste in $\frac{\mu}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet; da nun

$$(h+2)\alpha \geqq \mu'\alpha + (r'+1)$$

sein soll und $r'+1$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots \alpha$ ist, so ist

$$h + 2 = \mu' + 1,$$

also

$$h = \mu' - 1$$

zu setzen.

Wenden wir nun den zweiten der oben erwähnten Sätze an, so ergiebt sich unmittelbar, dafs in unserem Falle $S(\zeta)$ eine ganze Funktion h^{ten} Grades von x, resp. wenn h negativ ausfällt, gleich Null ist, folglich ist das Integral

6) $$\int S(\zeta)\,dx = G(x)$$

eine ganze Funktion des Grades

$$h + 1 = \mu' = \left[\frac{\mu}{\alpha}\right],$$

wobei also diese Zahl durch die Ordnung μ des Integrals t_μ und die Ordnung der Verzweigung von $\mathfrak{R}_x$ in $\mathfrak{Q}$ bestimmt ist; von dieser Funktion ist die Differenz der beiden Werte zu bilden, die sie für die unteren resp. oberen Grenzen der Integralsumme annimmt.

Zur Durchführung der Rechnung nehmen wir jetzt besser an, dafs die Variable in $\mathfrak{Q}$ einen endlichen Wert q erhält; dann brauchen wir blofs x durch $\frac{1}{x'-q}$ zu ersetzen, es tritt also an die Stelle der ganzen

Funktion $G(x)$ in (6) eine rationale der Ordnung μ' mit dem Nenner $(x'-q)^{\mu'}$. Um diese auch der Form nach und damit die in ihr auftretenden Konstanten zu bestimmen, gehen wir direkt von (5) aus und finden, da bei der jetzigen Annahme $\mathfrak{n}_{x'}$ zu $\mathfrak{Q}$ teilerfremd ist und $\mathfrak{Z}_{x'}$ durch $\mathfrak{Q}^{\alpha-1}$ teilbar ist, also ζ in $\mathfrak{Q}$ die Ordnungszahl $-(\mu+\alpha)$ hat, in der Umgebung von $\mathfrak{Q}$ eine Reihenentwickelung der Form

$$7)\qquad \zeta = \frac{C_\mu}{(x'-q)^{\frac{\mu+\alpha}{\alpha}}} + \frac{C_{\mu-1}}{(x'-q)^{\frac{\mu+\alpha-1}{\alpha}}} + \cdots + \frac{C_1}{(x'-q)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} + \cdots;$$

hierbei kann ein Glied mit dem Nenner $x'-q$ nicht auftreten, weil sonst das Integral in $\mathfrak{Q}$ eine logarithmische Unstetigkeit hätte, und die auf dieses folgenden Glieder kommen für die Spurenbildung nicht mehr in Betracht. Es ergiebt sich somit

$$S(\zeta) = \alpha \sum_s \frac{C_s}{(x'-q)^{\frac{s}{\alpha}+1}},$$

wobei die Summe nur über diejenigen Werte s zu erstrecken ist, welche positiv, durch α teilbar und höchstens gleich μ sind. Folglich ist

$$\int S(\zeta)\,dx' = -\alpha^2 \sum_s \frac{C_s}{s\,(x'-q)^{\frac{s}{\alpha}}},$$

und das Abelsche Theorem lautet somit für Elementarintegrale zweiter Gattung

$$\int_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} dt_\mu + \int_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} dt_\mu + \cdots + \int_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} dt_\mu = \alpha^2 \left[\sum_s \frac{C_s}{s\,(x'-q)^{\frac{s}{\alpha}}}\right]_{x'=0}^{x'=\infty} \begin{pmatrix} s \equiv 0 \pmod{\alpha} \\ 0 < s \leqq \mu \end{pmatrix},$$

wobei die Funktion $x' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ und q ihr Wert in dem Pole $\mathfrak{Q}$ von t_μ ist; die Ausrechnung ergiebt also

$$4\text{b})\qquad \int_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} dt_\mu + \int_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} dt_\mu + \cdots + \int_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} dt_\mu = -\alpha^2 \sum_s \frac{C_s}{s\,(-q)^{\frac{s}{\alpha}}} \begin{pmatrix} s \equiv 0 \pmod{\alpha} \\ 0 < s \leqq \mu \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung findet in dem Satze Ausdruck:

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei äquivalente ganze Divisoren und ist $x' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, so ist die für Elementarintegrale zweiter Gattung mit dem μ-fachen Pole $\mathfrak{Q}$ gebildete Summe (4b) eine ganze

Funktion von dem Reciproken des Wertes q*), welchen x' in $\mathfrak{Q}$ annimmt, vorausgesetzt, dafs die Integrationswege in $\mathfrak{R}_{x'}$ übereinanderlaufen; der Grad der Funktion ist gleich $\left[\frac{\mu}{\alpha}\right]$, wenn $\mathfrak{Q}$ ein α-blättriger Verzweigungspunkt von $\mathfrak{R}_{x'}$ ist, und ihre Koeffizienten sind durch die des Hauptteiles der für die Umgebung von $\mathfrak{Q}$ geltenden Reihenentwickelung von ζ bestimmt.

Ist also z. B. $\mu = 1$, so wird die rechte Seite der Gleichung für Verzweigungspunkte ($\alpha > 1$) gleich Null und erhält für gewöhnliche Punkte den Wert $\frac{C_1}{q}$.

III. Ist das Integral

$$\tilde{\omega}_{12} = \int \zeta dx$$

ein Elementarintegral dritter Gattung mit den logarithmischen Stellen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ und den zugehörigen Residuen -1 und $+1$, so hat der Differentialteiler von $\tilde{\omega}_{12}$ den Nenner $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$, und es ist somit, wenn $\mathfrak{G}$ einen ganzen Divisor bedeutet,

$$\zeta = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2\mathfrak{Z}_x}.$$

Erhält also x in $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ die endlichen Werte q_1 und q_2, so ist

$$(x-q_1)(x-q_2)\zeta = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{Z}_x},$$

wo auch $\mathfrak{G}'$ ganz ist, und folglich nach dem Satze auf S. 411:

$$(x-q_1)(x-q_2)S(\zeta) = S\big((x-q_1)(x-q_2)\zeta\big) = \text{const.}$$

Durch Multiplikation mit dx und Division durch $(x-q_1)$ $(x-q_2)$ ergiebt sich

$$\zeta_1 dx + \zeta_2 dx + \cdots + \zeta_r dx = c\left(\frac{dx}{x-q_2} - \frac{dx}{x-q_1}\right).$$

Da nun nach S. 342 das Residuum des rationalen Differentials für irgend eine Stelle q von $\mathfrak{K}_x$ gleich der Summe der Residuen für die der Stelle q entsprechenden Punkte der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ ist, so ist $c = 1$, vorausgesetzt, dafs q_1 und q_2 verschieden sind; es kann aber auch eintreten, dafs zu $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ derselbe Wert von x gehört, dann ist die rechte Seite obiger Gleichung Null, da sich die Residuen des rationalen Differentials kompensieren. In beiden Fällen gilt die Integralgleichung

*) Es wäre unzulässig, dadurch, dafs man zu der Funktion $\frac{1}{x'}$ übergeht, eine Vereinfachung in dem Ausspruche des Satzes herbeiführen zu wollen, weil die Koeffizienten C_h in (7) erst nach Auswahl von x' bestimmt sind und beim Übergang von x' zu $\frac{1}{x'}$ sich ändern.

$$4c)\qquad \int\limits_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} d\tilde{\omega}_{12} + \int\limits_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} d\tilde{\omega}_{12} + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} d\tilde{\omega}_{12} = \left[\lg \frac{x - q_2}{x - q_1}\right]_{x=a}^{x=b}$$

also für $a = \infty$, $b = 0$:

$$4c)\qquad \int\limits_{\mathfrak{A}_1}^{\mathfrak{B}_1} d\tilde{\omega}_{12} + \int\limits_{\mathfrak{A}_2}^{\mathfrak{B}_2} d\tilde{\omega}_{12} + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{A}_r}^{\mathfrak{B}_r} d\tilde{\omega}_{12} = \lg \frac{q_2}{q_1}.$$

Diese Gleichung ergiebt den Satz:

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei äquivalente ganze Divisoren und ist $x' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, so ist die für Elementarintegrale dritter Gattung mit den logarithmischen Stellen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ und den Residuen -1 und $+1$ gebildete Summe (4c) gleich dem Logarithmus des Quotienten der beiden Werte, welche x' in $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ annimmt, vorausgesetzt, dafs die Integrationswege in $\mathfrak{R}_{x'}$ übereinanderlaufen.

§ 2.

Die im vorigen Abschnitte aufgestellten Integralsätze waren an die Bedingung geknüpft, dafs die Integrationswege in der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_x$ übereinanderlaufen, also in einer beliebigen Fläche $\mathfrak{R}_z$, deren Punkte denen der ersten eindeutig entsprechen, in bestimmter Weise von den unteren Grenzen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_r$ nach den oberen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots \mathfrak{B}_r$ geführt werden. Da sich aber die Beziehung zwischen den beiden Divisoren

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_r \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_r$$

in eine Form setzen liefs, welche von der Auswahl einer besonderen Fläche unabhängig ist, so ist es wünschenswert, die vorige Beschränkung aufzuheben und die Modifikation zu untersuchen, welche das Abelsche Theorem erleidet, wenn man die Primdivisoren von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einander irgendwie zuordnet und die Integrale auf beliebigem Wege von $\mathfrak{A}_h$ nach $\mathfrak{B}_h$ leitet.

Betrachten wir eine beliebige, aber in kanonischer Weise zerschnittene Fläche $\mathfrak{R}_z$, in welcher die Integrale erster und zweiter Gattung eindeutige Funktionen des Ortes sind, so ist nach S. 644, wenn der im vorigen Paragraphen benutzte Weg $\mathfrak{A}_h\mathfrak{B}_h$ mit l_h bezeichnet wird:

$$\int_{l_h} d\bar{w} = \bar{w}(\mathfrak{B}_h) - \bar{w}(\mathfrak{A}_h) + m_1 A_1 + \cdots + m_p A_p + n_1 B_1 + \cdots + n_p B_p$$

$$\int_{l_h} dt_\mu = \bar{t}_\mu(\mathfrak{B}_h) - \bar{t}_\mu(\mathfrak{A}_h) + m_1 C_1 + \cdots + m_p C_p + n_1 D_1 + \cdots + n_p D_p,$$

wobei die überstrichenen Gröfsen die auf der zerschnittenen Fläche eindeutigen Funktionen bedeuten, ferner

$$A_i = -\int_{b_i} dw, \quad B_i = \int_{a_i} dw$$

$$C_i = -\int_{b_i} dt_\mu, \quad D_i = \int_{a_i} dt_\mu$$

die Perioden der beiden Integrale und die ganzen Zahlen m_i und n_i Charakteristiken sind, es ist nämlich

$$m_i = (l_h, a_i), \quad n_i = (l_h, b_i);$$

diese Zahlen sind also nur vom Wege l_h, nicht aber vom Integranden abhängig.

Addiert man diese Gleichungen für $h = 1, 2, \ldots r$, so ergiebt sich jetzt aus den Gleichungen (4a) und (4b) des vorigen Abschnittes das Abelsche Theorem in folgender Gestalt:

$$\text{1a)} \quad \begin{aligned} &\bar{w}(\mathfrak{B}_1) + \bar{w}(\mathfrak{B}_2) + \cdots + \bar{w}(\mathfrak{B}_r) - \bar{w}(\mathfrak{A}_1) - \bar{w}(\mathfrak{A}_2) - \cdots - \bar{w}(\mathfrak{A}_r) \\ &= M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_p A_p + N_1 B_1 + N_2 B_2 + \cdots + N_p B_p \end{aligned}$$

$$\text{1b)} \quad \begin{aligned} &\bar{t}_\mu(\mathfrak{B}_1) + \bar{t}_\mu(\mathfrak{B}_2) + \cdots + \bar{t}_\mu(\mathfrak{B}_r) - \bar{t}_\mu(\mathfrak{A}_1) - \bar{t}_\mu(\mathfrak{A}_2) - \cdots - \bar{t}_\mu(\mathfrak{A}_r) \\ &= -\alpha^2 \sum_s \frac{C_s}{s(-q)^{\frac{s}{\alpha}}} \\ &+ M_1 C_1 + M_2 C_2 + \cdots + M_p C_p + N_1 D_1 + N_2 D_2 + \cdots + N_p D_p, \end{aligned}$$

wobei die ganzen Zahlen

$$\text{1c)} \quad M_i = \sum_{h=1}^{r} (a_i, l_h), \quad N_i = \sum_{h=1}^{r} (b_i, l_h)$$

wieder ausschliefslich von den unteren und oberen Grenzen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}$ abhängen. Eine ganz ähnliche Gleichung, von deren Aufstellung wir absehen, gilt auch für Integrale dritter Gattung; ein Unterschied besteht nur darin, dafs zu den cyklischen Perioden noch eine logarithmische $2\pi i \nu$ hinzutritt, wobei die ganze Zahl ν ebenfalls eine Summe von Charakteristiken ist.

Erstreckt man die Integrale nicht in der zerschnittenen, sondern auf der unzerschnittenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_z$ auf beliebigen Wegen λ_h von den unteren Grenzen $\mathfrak{A}_h$ nach den oberen $\mathfrak{B}_h$, so bleibt, wie man unmittelbar sieht, die Form der Gleichungen 1a) und 1b) völlig ungeändert; nur die Bedeutung der ganzen Zahlen M_i und N_i wird eine andere, indem in den Formeln 1c) der Weg l_h überall durch den geschlossenen Weg $l_h - \lambda_h$ ersetzt werden mufs. In jedem Falle tritt bei Aufhebung der früheren Einschränkung zu den Gleichungen des Abelschen Theorems nur eine Periode hinzu, und es ist wesentlich, sich zu vergegenwärtigen, dafs die ganzen Zahlen, welche die spezielle Periode charakterisieren, bei Integralen erster und zweiter Gattung nur von den Integrationswegen, nicht aber vom Integranden abhängen, dafs also bei Anwendung des Abelschen Theorems auf ein System von Integralen die auftretenden Perioden sich sämtlich auf den gleichen Weg beziehen und daher dasselbe Koeffizientensystem (M_i, N_i) erhalten.

Insbesondere kann man jetzt das Theorem für Integrale erster Gattung in folgender Fassung aussprechen, in welcher es in Zukunft von besonderer Bedeutung ist und in der wir die Bezeichnungen vom Ende der vorigen Vorlesung wieder aufnehmen:

(I) Ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu_2} \ldots \mathfrak{Q}_h^{\mu_h}$$

ein Divisor der Hauptklasse, so bilden die p Summen von Integralen erster Gattung

$$\begin{aligned} \mu_1 w_k(\mathfrak{Q}_1) + \mu_2 w_k(\mathfrak{Q}_2) + \cdots + \mu_h w_k(\mathfrak{Q}_h) \\ = n_1 \omega_{k1} + n_2 \omega_{k2} + \cdots + n_{2p} \omega_{k,2p} \quad (k = 1, 2, \ldots p) \end{aligned} \tag{2}$$

ein System zusammengehöriger Periodizitätsmoduln der Integrale $w_1, w_2, \ldots w_p$.

In dieser Gestalt ist der Satz offenbar die genaue Umkehrung desjenigen, der auf S. 663 bewiesen wurde. Fassen wir beide zusammen, so ergiebt sich also:

(II) Die p Gleichungen (2) bilden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs ein Divisor der Ordnung Null der Hauptklasse angehört.

Durch diese Formulierung wird das Abelsche Theorem eines der fruchtbarsten Hilfsmittel zu tieferer Durchdringung und Fortbildung der Lehre von den Divisoren und ihrer Einteilung in Klassen. Wir gewinnen nämlich hierdurch ein analytisches Äquivalent für die Zugehörigkeit zweier Divisoren zur selben Klasse. Um dies im einzelnen dar-

legen und sodann die sich hier anschliefsenden Fragen weiter verfolgen zu können, wollen wir aber vorerst das Theorem (II) in zwei verschiedenen Richtungen modifizieren resp. erweitern.

Die erste Modifikation hat wesentlich formale Bedeutung. Um nämlich das Periodensystem nicht immer ausdrücklich hinschreiben zu müssen, nennen wir zwei Systeme von je p Gröfsen

$$(a_1, a_2, \dots a_p) \quad \text{und} \quad (b_1, b_2, \dots b_p)$$

schlechtweg kongruent, sobald sich die entsprechenden Elemente nur um zusammengehörige Perioden der Integrale erster Gattung unterscheiden, sobald also p Gleichungen der Form

$$a_k = b_k + n_1\omega_{k1} + n_2\omega_{k2} + \cdots + n_{2p}\omega_{k,2p} \quad (k = 1, 2, \dots p)$$

erfüllt sind. Wir bezeichnen dies durch

$$(a_1, a_2, \dots a_p) \equiv (b_1, b_2, \dots b_p)$$

oder kurz durch

$$a_k \equiv b_k \qquad (k = 1, 2, \dots p);$$

solche Kongruenzen lassen sich offenbar ohne weiteres addieren und subtrahieren. Die Gleichungen (2) nehmen hierdurch die Form an:

2a) $$\mu_1 w_k(\mathfrak{Q}_1) + \mu_2 w_k(\mathfrak{Q}_2) + \cdots + \mu_h w_k(\mathfrak{Q}_h) \equiv 0.$$

Die zweite Modifikation hat den Zweck, die Beschränkung auf Divisoren der Ordnung Null zu beseitigen. Wählen wir als untere Grenze der Integrale $w_1, w_2, \dots w_p$, ebenso wie auf S. 569, den Punkt $\mathfrak{P}_\infty$ und bilden wir die p Integralsummen (2) für einen Divisor der Form $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{P}_\infty^\varrho \mathfrak{D}$, wo $\mathfrak{D}$ der Hauptklasse angehört und also ϱ die Ordnung von $\mathfrak{D}_1$ ist, so werden dieselben offenbar ebenfalls kongruent Null. Wenn umgekehrt die Gleichungen (2a) für einen Divisor $\mathfrak{D}_1$ der Ordnung ϱ erfüllt sind, so gelten sie auch für $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{P}_\infty^{-\varrho}$, und da der Divisor $\mathfrak{D}$ die Ordnung Null hat, so gehört er nach Satz (II) der Hauptklasse an. Bezeichnen wir also die Klasse von $\mathfrak{P}_\infty$ durch P_∞ und vereinigen die sämtlichen Potenzen von P_∞ in der auf S. 438 angegebenen Weise zu einer „erweiterten Hauptklasse", so können wir jetzt den Satz (II) durch folgenden etwas allgemeineren ersetzen:

Ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu_2} \dots \mathfrak{Q}_h^{\mu_h}$$

ein beliebiger Divisor der Ordnung ϱ und wählt man als untere Grenze der Integrale $w_1, w_2, \dots w_p$ den Punkt $\mathfrak{P}_\infty$, so bilden die p Gleichungen

(IIa) 2a) $$\mu_1 w_k(\mathfrak{Q}_1) + \mu_2 w_k(\mathfrak{Q}_2) + \cdots + \mu_h w_k(\mathfrak{Q}_h) = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs $\mathfrak{D}$ der Klasse P_x^ϱ, also der erweiterten Hauptklasse angehört; ist also $\varrho = 0$, so ist $\mathfrak{D}$ in der Hauptklasse im engeren Sinne des Wortes enthalten.

Betrachten wir jetzt einen beliebigen Divisor der Ordnung ϱ:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu_2} \ldots \mathfrak{Q}_h^{\mu_h},$$

der irgend einer Klasse angehören kann, so mag sich für diesen ergeben:

$$\mu_1 w_k(\mathfrak{Q}_1) + \mu_2 w_k(\mathfrak{Q}_2) + \cdots + \mu_h w_k(\mathfrak{Q}_h) = v_k \quad (k = 1, 2, \ldots p).$$

Dann nennen wir das Gröſsensystem $v_1, v_2, \ldots v_p$ „das dem Divisor $\mathfrak{D}$ entsprechende Wertsystem". Nach dem Abelschen Theoreme entspricht also den Divisoren der erweiterten Hauptklasse das Wertsystem $(0, 0, \ldots 0)$. Ist nun

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{Q}_1^{\mu'_1} \mathfrak{Q}_2^{\mu'_2} \ldots \mathfrak{Q}_h^{\mu'_h}$$

irgend ein zweiter Divisor von der Ordnung ϱ', den wir, ohne die Allgemeinheit zu schädigen, als aus gleichen Primfaktoren wie $\mathfrak{D}$ bestehend annehmen können, da wir ja stets einige Exponenten gleich Null setzen können, so sei für diesen

$$\mu'_1 w_k(\mathfrak{Q}_1) + \mu'_2 w_k(\mathfrak{Q}_2) + \cdots + \mu'_h w_k(\mathfrak{Q}_h) = v'_k \quad (k = 1, 2, \ldots p).$$

Dann ist es evident, daſs dem Produkte $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ resp. dem Quotienten $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'}$ die Wertsysteme

$$v_k + v'_k \quad \text{resp.} \quad v_k - v'_k \qquad (k = 1, 2, \ldots p)$$

entsprechen.

Sind also $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ im absoluten Sinne oder auch nur in Bezug auf die Klasse P_x äquivalent, d. h. ist $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'} \mathfrak{P}_x^{\varrho' - \varrho}$ ein Divisor der Hauptklasse, so ist

$$v_k \equiv v'_k \qquad (k = 1, 2, \ldots p).$$

Hieraus schlieſsen wir:

(IIb) Allen Divisoren, welche absolut oder in Bezug auf die Klasse P_x äquivalent sind, entsprechen kongruente Wertsysteme und umgekehrt. Sieht man also kongruente Wertsysteme als nicht wesentlich verschieden an, so entspricht jeder Klasse relativ äquivalenter Divisoren ein und nur ein Wertsystem. Jede solche Klasse wird durch ein System von p Zahlen $(v_1, v_2, \ldots v_p)$ charakterisiert.

Bei der Herleitung dieses Fundamentalsatzes haben wir, um die Beschränkung auf Divisoren der Ordnung Null aufzuheben, die gewöhn-

liche durch die „erweiterte Klasseneinteilung der Divisoren“ ersetzt; um von dieser zu der gewöhnlichen zurückkehren zu können, welche ja allein invarianten Charakter besitzt, hat man nur innerhalb jeder erweiterten Klasse die Divisoren einer bestimmten Ordnung herauszugreifen, nach Hinzufügung der Ordnungszahl wird also durch das Wertsystem $(v_1, v_2, \ldots v_p)$ eine gewöhnliche Divisorenklasse charakterisiert. Es ist aber zu beachten, dafs auch hier die Einführung der relativen Äquivalenz der Klassen nur ein Hilfsbegriff ist, der sich zwar in der Folge als zweckmäfsig erweist, aber immer nur ein Durchgangsstadium zur Feststellung von invarianten, von der Beziehung auf P_∞ losgelösten Eigenschaften bildet. In dem Satze (IIb) kommt dies dadurch zum Ausdruck, dafs das Wertsystem $(v_1, v_2, \ldots v_p)$, welches einem Divisor von positiver oder negativer Ordnung entspricht, von der Auswahl des Punktes $\mathfrak{P}_\infty$ abhängig ist und bei Veränderung dieses Punktes sich ebenfalls ändert; für die Divisoren der Ordnung Null ist hingegen das entsprechende Wertsystem $(v_1, v_2, \ldots v_p)$ wegen der Gleichung

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_h = 0$$

von der Auswahl von $\mathfrak{P}_\infty$ unabhängig. Bei diesen Divisoren und auch nur bei diesen geht also die zur Erzielung uneingeschränkter Allgemeinheit eingeführte Beziehung auf die Klasse P_∞ von selbst wieder verloren.

§ 3.

Beschränken wir uns von jetzt ab der Einfachheit halber gänzlich auf Integrale erster Gattung, so zeigt das Abelsche Theorem, dafs unter bestimmten Bedingungen eine gewisse Anzahl von Integralen mit gleichem Integranden die Summe Null ergiebt. Der Regel nach bietet sich aber die Aufgabe dar, eine gegebene Anzahl von Integralen mit nicht verschwindender Summe durch eine andere und, wenn möglich, kleinere Anzahl zu ersetzen, so dafs in der Gleichung (4a) des ersten Abschnittes von den Integralgrenzen ein Teil als gegeben, ein Teil als gesucht angesehen werden mufs. In der Theorie der elliptischen Funktionen wird z. B. die Aufgabe gelöst, auf die wir von unserem Standpunkte aus nachher eingehen werden, eine gegebene Anzahl von Integralen erster Gattung mit gleichen unteren und beliebigen oberen Grenzen zu einem einzigen Integral zu vereinigen; setzen wir also, wie auf S. 650

$$1)\qquad u^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3) = z^3 - \frac{g_2}{4} z - \frac{g_3}{4},$$

so ist

$$2)\qquad \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_1}\frac{dz}{2u}+\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_2}\frac{dz}{2u}+\cdots+\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_r}\frac{dz}{2u}=\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}}\frac{dz}{2u},$$

wo der Punkt $\mathfrak{P}$ rational durch $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_r$ bestimmt ist, also das Wertsystem (z, u) und alle rationalen Funktionen von (z, u) dem Körper

$$K(z_1, u_1;\ z_2, u_2;\ \ldots z_r, u_r)$$

angehören. Wenn eine solche Bestimmung möglich ist, so ist nach dem Fundamentalsatze (II) des vorigen Abschnittes der gegebene Divisor

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_r$$

äquivalent dem Divisor $\mathfrak{P}_\infty^{r-1}\mathfrak{P}$, also

$$\mathfrak{D}\mathfrak{P}_\infty^{-(r-1)}\sim\mathfrak{P},$$

und die Dimension der Klasse des Divisors

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{D}\mathfrak{P}_\infty^{-(r-1)}$$

ist gleich Eins, weil $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt ist.

Gehen wir ebenso von dem allgemeinen Abelschen Theorem aus, wie es für Integrale erster Gattung in der Gleichung (4a) auf S. 668 ausgesprochen wurde, so bietet sich, wenn wir die unteren Grenzen der Integrale sämtlich gleich $\mathfrak{P}_\infty$ annehmen, unmittelbar die Aufgabe dar, zu einem gegebenen ganzen Divisor

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{Q}_1\,\mathfrak{Q}_2\ldots\mathfrak{Q}_r$$

einen anderen

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_q$$

hinzuzubestimmen, so dafs die Ordnungszahl q möglichst klein ist und die Gleichungen

$$3)\qquad \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_1}dw_i+\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_2}dw_i+\cdots+\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_r}dw_i+\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_1}dw_i+\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_2}dw_i+\cdots+\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_q}dw_i=0$$
$$(i=1,2,\ldots p)$$

gelten. Diese Aufgabe hat, wie hier beiläufig bemerkt sei, Abel bereits in Angriff genommen und ist hierdurch, ohne bereits die Einteilung der Integrale in die drei Gattungen zu besitzen, ganz in die Nähe des Geschlechtsbegriffes gelangt; diese beiden fundamentalen Bausteine sind aber erst dreifsig Jahre später von Riemann in die Theorie der algebraischen Funktionen eingefügt worden.

Behandeln wir das von Abel formulierte Problem mit unseren Methoden, so ist nach dem Fundamentalsatze (II) auf S. 674

$$\mathfrak{G}\mathfrak{H}\sim\mathfrak{P}_\infty^{r+q}.$$

Ferner ist die Dimension der Klasse des ganzen Divisors $\mathfrak{H}$ gleich Eins, denn gäbe es in ihr noch einen zweiten ganzen Divisor $\mathfrak{H}'$, so könnte man in der Schar

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}') = c\mathfrak{H} + c'\mathfrak{H}'$$

ein durch $\mathfrak{P}_\infty$ teilbares Element $\mathfrak{H}''$ ausfindig machen, und wenn man dieses statt $\mathfrak{H}$ in die Gleichungen (3) einführt, so würde sich die Zahl q mindestens um eine Einheit verkleinern, während sie doch schon die kleinstmögliche sein soll. Setzt man daher

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\mathfrak{G}},$$

so ist die Klasse des Divisors

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{D}\mathfrak{P}_\infty^{r+q}$$

gleich Eins. Diese Aufgabe ist also mit der vorigen im wesentlichen identisch, und beide unterscheiden sich nur dadurch, daſs der gegebene Divisor $\mathfrak{D}$ im ersten Falle ganz, im zweiten zu einem ganzen reciprok ist.

Wir gewinnen daher das allgemeinste hierher gehörige Problem durch folgende Formulierung:

Es sei ein beliebiger Divisor der Ordnung d

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1}\mathfrak{Q}_2^{\mu_2}\dots\mathfrak{Q}_h^{\mu_h} \tag{4}$$

und ein Primteiler $\mathfrak{P}_\infty$ gegeben. Sind D und P_∞ die zugehörigen Klassen, so soll die erste so mit einer möglichst niedrigen Potenz der zweiten multipliziert werden, daſs die Dimensionszahl

$$\{DP_\infty^e\} = 1 \tag{5}$$

ist, und es soll der Exponent e bestimmt werden.

Hierbei darf die Ordnung von DP_∞^e jedenfalls nicht negativ sein, weil solche Klassen keine ganzen Divisoren enthalten, und es ist also $d + e \geqq 0$, wir setzen daher

$$d + e = q, \quad e = q - d, \tag{6}$$

wo q nicht negativ ist.

Ist die Bedingung (5) nämlich erfüllt, so giebt es in der Klasse DP_∞^e einen und nur einen ganzen Divisor

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\dots\mathfrak{P}_q \tag{7}$$

der Ordnung q, und es ist also

$$\mathfrak{D}\mathfrak{P}_\infty^e \sim \mathfrak{G}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}_\infty^d} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^q};$$

folglich gelten die Gleichungen

$$8)\quad \mu_1 \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_1} dw_i + \mu_2 \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_2} dw_i + \cdots + \mu_h \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_h} dw_i = \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_1} dw_i + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_2} dw_i + \cdots + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_q} dw_i,$$

in denen die nicht negative Zahl q möglichst klein ausfällt. Hierin ist der Divisor $\mathfrak{D}$ gegeben, der Divisor $\mathfrak{G}$ aber eindeutig durch die Forderung (5) bestimmt; wir haben vor allem seine Ordnung q festzustellen und dann auf seine Darstellung einzugehen.

Die Lösung des ersten Problems ergiebt der Riemann-Rochsche Satz. Die Ergänzungsklasse von

$$DP_x^e = Q$$

sei die Klasse

$$Q' = \frac{W}{Q} = \frac{W}{DP_\infty^e};$$

ihre Ordnungen sind resp.

$$q = d + e, \quad q' = 2(p-1) - q.$$

Ferner ist

$$\{Q\} - \frac{q}{2} = \{Q'\} - \left(p - 1 - \frac{q}{2}\right),$$

und da $\{Q\} = 1$ sein soll, so ergiebt sich die Gleichung

$$6)\quad q = p - \{Q'\} = p - \left\{\frac{W}{DP_\infty^e}\right\};$$

es ist also stets

$$6a)\quad q \leqq p.$$

Ist nun $q < p$, so lassen sich auf der rechten Seite der Gleichung noch $p - q$ Integrale mit der oberen Grenze $\mathfrak{P}_\infty$ hinzufügen; dieser Fall tritt aber offenbar nur ausnahmsweise auf, weil die obere Grenze p z. B. immer dann erreicht wird, wenn $\mathfrak{D}$ aus p willkürlich ausgewählten Primdivisoren (S. 318) besteht. Daher gilt der folgende Satz:

> Eine beliebige Anzahl von Abelschen Integralen erster Gattung läfst sich stets in eine Summe von nur p, im allgemeinen aber nicht in eine Summe von weniger als p Integralen mit fester unterer Grenze zusammenfassen.

Für die Anwendungen des Abelschen Theorems kommen nun vorzugsweise die beiden am Anfange dieses Abschnittes besprochenen Fälle in Betracht, in denen $\mathfrak{D}$ entweder ein ganzer Divisor mit unbestimmten Elementen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_r$$

oder das reciproke eines solchen ist. Dann haben wir im zweiten Falle zu der Integralsumme

$$s_i = \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_1} dw_i + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_2} dw_i + \cdots + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_r} dw_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

eine andere von p Elementen

$$\sigma_i = \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_1} dw_i + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_2} dw_i + \cdots + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_p} dw_i$$

hinzuzufügen, so dafs

$$(s_i + \sigma_i) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

wird; im ersten mufs eine ebensolche Integralsumme σ_i' gebildet werden, für welche

$$(s_i - \sigma_i') \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

ist. Diese beiden Reduktionsprobleme, auf welche sich auch das allgemeinere zurückführen läfst, wollen wir in der eben angegebenen Reihenfolge in den beiden nächsten Abschnitten unter wirklicher Durchführung der notwendigen Rechnungen behandeln.

§ 4.

Sind r beliebige Punkte $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_r$ durch die Wertsysteme $(z_1, u_1), (z_2, u_2), \ldots (z_r, u_r)$ gegeben und sind die p Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ so zu bestimmen, dafs die Kongruenz

$$\text{1)} \qquad \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_1} dw + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_2} dw + \cdots + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{Q}_r} dw + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_1} dw + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_2} dw + \cdots + \int_{\mathfrak{P}_x}^{\mathfrak{P}_p} dw \equiv 0$$

für jedes Integral erster Gattung gilt, so läuft diese Aufgabe nach dem vorhergehenden darauf hinaus, eine Funktion ψ zu finden, welche ein Vielfaches des Divisors

$$\text{2)} \qquad \frac{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_r}{\mathfrak{P}_x^{r+p}} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_\infty^{r+p}}$$

ist.

Setzen wir zunächst $r \geq p - 1$ voraus, so ist nach S. 316 die Dimensionszahl

$$\text{3)} \qquad \{P_x^{r+p}\} = r + 1,$$

und es giebt also $r + 1$ linear unabhängige Funktionen

$$\text{4)} \qquad \psi^{(0)}, \quad \psi^{(1)}, \quad \psi^{(2)}, \ldots \psi^{(r)}$$

mit dem Nenner $\mathfrak{P}_x^{r+p}$, welche sich unmittelbar aus dem auf S. 565 aufgestellten Fundamentalsysteme $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n-1)}$ ableiten lassen. Wir

behandeln nun im folgenden nur den regulären Fall, in dem bei der Dimensionsbestimmung von P_∞^{r+p} die einfache Formel (3) gilt; man überzeugt sich aber leicht mit Hilfe der Ausführungen auf S. 490, dafs diese Gleichung aber auch ganz allgemein für beliebiges r gilt, wenn $\mathfrak{P}_x$ kein Weierstrafs-Punkt ist, und dafs also unter dieser Voraussetzung die Einschränkung $r \geqq p-1$ fortfallen kann.

Soll nun die Funktion

$$\psi = C_0\psi^{(0)} + C_1\psi^{(1)} + \cdots + C_r\psi^{(r)}$$

in den gegebenen Punkten $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_r$ verschwinden, so müssen die Konstanten C so bestimmt werden, dafs

$$C_0\psi^{(0)}(\mathfrak{Q}_\varrho) + C_1\psi^{(1)}(\mathfrak{Q}_\varrho) + \cdots + C_r\psi^{(r)}(\mathfrak{Q}_\varrho) = 0$$

für $\varrho = 1, 2, \ldots r$ ist. Setzen wir also zur Abkürzung

$$\psi^{(h)}(\mathfrak{Q}_\varrho) = \psi_\varrho^{(h)},$$

so ergiebt sich ψ in der Form

$$\text{5)} \qquad \psi = \begin{vmatrix} \psi^{(0)} & \psi^{(1)} & \psi^{(2)} \ldots & \psi^{(r)} \\ \psi_1^{(0)} & \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} \ldots & \psi_1^{(r)} \\ \psi_2^{(0)} & \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} \ldots & \psi_2^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \psi_r^{(0)} & \psi_r^{(1)} & \psi_r^{(2)} \ldots & \psi_r^{(r)} \end{vmatrix} = \left|\psi_\sigma^{(\varrho)}\right| \quad (\varrho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots r),$$

wobei $\psi_0^{(\varrho)}$ mit $\psi^{(\varrho)}$ identisch ist. Es ist also ψ eine Funktion des Körpers

$$K(z, u;\, z_1, u_1;\, z_2, u_2;\, \ldots z_r, u_r).$$

Um dann die Nullpunkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ von ψ und die zugehörigen Werte von z zu bestimmen, müssen wir die Norm von ψ bilden; diese ist eine ganze Funktion $(r+p)^{\text{ten}}$ Grades von z und enthält, da $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_r$ Nullpunkte sind, den Faktor r^{ten} Grades

$$(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_r);$$

der Quotient

$$\text{6)} \qquad G(z) = \frac{N(\psi)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_r)}$$

ist also eine ganze Funktion p^{ter} Ordnung von z:

$$\text{6a)} \qquad G(z) = \chi_p z^p + \chi_{p-1} z^{p-1} + \cdots + \chi_1 z + \chi_0,$$

deren Koeffizienten nur von $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_r$ abhängen und deren Nullstellen die zu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ gehörigen Werte von z ergeben. Die Bestimmung dieser Gröfsen führt somit auf die Lösung einer Gleichung

p^{ten} Grades $G(z) = 0$, und nur die symmetrischen Funktionen der Wurzelwerte hängen rational von $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_r$ ab. In ganz ähnlicher Weise kann man auch die Werte irgend einer anderen Funktion des Körpers in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ ermitteln.

Wir wollen jetzt die Rechnung noch für die hyperelliptischen Integrale spezialisieren. Legen wir das Gebilde wie auf S. 594 in der Form

$$7) \qquad u^2 = c(z - e_1)(z - e_2) \ldots (z - e_{2p+1}) = g(z)$$

zu Grunde, so ist $\xi^{(0)} = 1$, $\xi^{(1)} = u$, und die allgemeinste ganze Funktion mit dem Nenner $\mathfrak{P}_\infty^{r+p}$ ist, wenn $r + p$ eine ungerade Zahl $2\mu + 1$ ist:

$$5\text{a}) \qquad \begin{aligned} \psi &= (a_0 + a_1 z + \cdots + a_\mu z^\mu) + u(b_0 + b_1 z + \cdots + b_{\mu-p} z^{\mu-p}) \\ &= A(z) + uB(z), \end{aligned}$$

wo $A(z)$ und $B(z)$ ganze Funktionen der Ordnung μ und $\mu - p$ sind; ist hingegen $r + p$ eine gerade Zahl 2μ, so kommt das Glied $b_{\mu-p} z^{\mu-p}$ in $B(z)$ in Fortfall. Daher erhalten wir im ersten Falle

$$5\text{b}) \qquad \psi = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots z^\mu & u & uz & \ldots uz^{\mu-p} \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots z_1^\mu & u_1 & u_1 z_1 & \ldots u_1 z_1^{\mu-p} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots z_2^\mu & u_2 & u_2 z_2 & \ldots u_2 z_2^{\mu-p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_r & z_r^2 & \ldots z_r^\mu & u_r & u_r z_r & \ldots u_r z_r^{\mu-p} \end{vmatrix},$$

im zweiten Falle hat man die letzte Kolonne des Systemes fortzulassen; hierdurch werden die $r + 1$ Koeffizienten

$$a_0, \quad a_1, \ldots a_\mu, \quad b_0, \quad b_1, \ldots b_{r-\mu-1}$$

als gewisse Determinanten des Grades r bestimmt. Gehen wir nun zur Norm von ψ über, so erhalten wir die Gleichung

$$N(\psi) = A(z)^2 - g(z) B(z)^2,$$

also

$$6\text{b}) \qquad G(z) = \frac{A(z)^2 - g(z) B(z)^2}{(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_r)},$$

und aus der Gleichung $G(z) = 0$ sind die Werte $z_{r+1}, \ldots z_{r+p}$ von z für $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ zu bestimmen.

Nehmen wir z. B. $p = 1$, $r = 2$, also $\mu = 1$, so erhalten wir

$$5\text{c}) \qquad \psi = a_0 + a_1 z + b_0 u = \begin{vmatrix} 1 & z & u \\ 1 & z_1 & u_1 \\ 1 & z_2 & u_2 \end{vmatrix},$$

so dafs

$$\text{8)} \qquad \begin{aligned} a_0 &= z_1 u_2 - z_2 u_1 \\ a_1 &= \quad u_1 - u_2 \\ b_0 &= \quad z_2 - z_1 \end{aligned}$$

ist; also ist

$$A(z)^2 - g(z)B(z)^2 = (a_0 + a_1 z)^2 - cb_0^2(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$$
$$= -cb_0^2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

und durch Vergleichung der Koeffizienten von z^2 ergiebt sich für z_3 die lineare Gleichung:

$$\text{8a)} \qquad z_1 + z_2 + z_3 = e_1 + e_2 + e_3 + \frac{a_1^2}{cb_0^2},$$

während u_3 alsdann aus der Gleichung

$$a_0 + a_1 z_3 + b_0 u_3 = 0$$

berechnet werden kann. Wird z_3, u_3 in dieser Weise als rationale Funktion von z_1, u_1, z_2, u_2 bestimmt, so gilt die Gleichung

$$\text{9)} \qquad \int_\infty^{z_1, u_1} \frac{dz}{u} + \int_\infty^{z_2 u_2} \frac{dz}{u} + \int_\infty^{z_3 u_3} \frac{dz}{u} = 0 \ (\text{modd. } \omega_1, \omega_2),$$

wo ω_1 und ω_2 die Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung

$$\text{10)} \qquad w = \int_\infty^{z, u} \frac{dz}{u} = \int_\infty^{z, u} \frac{dz}{\sqrt{c(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}}$$

sind.

In der Theorie der elliptischen Funktionen wählt man die Funktion unter dem Wurzelzeichen so, dafs $c = 4$, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, also

$$\text{10a)} \qquad w = \int_\infty^{z, u} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

$$g_2 = -4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3), \quad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3$$

ist und betrachtet alsdann die eindeutigen Funktionen

$$\text{11)} \qquad z = \wp(w), \quad u = \frac{dz}{dw} = \wp'(w),$$

welche sich durch Umkehrung der Gleichung (10) ergeben. Zufolge der Formeln (5c), (8a) und (9) bestehen nun die folgenden drei Gleichungen gleichzeitig:

$$\text{11a)} \qquad w_1 + w_2 + w_3 = 0 \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

$$\text{11b)} \qquad \wp(w_1) + \wp(w_2) + \wp(w_3) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(w_1) - \wp'(w_2)}{\wp(w_1) - \wp(w_2)}\right)^2$$

$$\text{11c)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(w_1) & \wp(w_2) & \wp(w_3) \\ \wp'(w_1) & \wp'(w_2) & \wp'(w_3) \end{vmatrix} = 0,$$

und es ist also $\wp(w + w_0)$ und $\wp'(w + w_0)$ rational durch

$$\wp(w), \quad \wp'(w), \quad \wp(w_0), \quad \wp'(w_0)$$

ausdrückbar.

Durch das hier dargelegte Additionstheorem der elliptischen Integrale und Funktionen wird übrigens auch das auf S. 537 erwähnte Problem gelöst, die unendlich vielen Transformationen eines elliptischen Gebildes in sich zu bestimmen. Deutet man nämlich die Gleichung

$$u^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

als Kurve dritter Ordnung, so liegen zufolge der Gleichung (11c) die Punkte (z_1, u_1), (z_2, u_2), (z_3, u_3) in gerader Linie, und wenn man die Gröfsen (z_h, u_h) als elliptische Funktionen von w_1, w_2, w_3 darstellt, so ist diese Bedingung mit der Kongruenz

$$w_1 + w_2 + w_3 \equiv 0 \quad (\text{modd. } \omega_1, \omega_2)$$

völlig äquivalent. Betrachtet man nun den ersten Punkt $\mathfrak{Q}_0 = (z_0, u_0)$ als fest, den zweiten $\mathfrak{Q} = (z, u)$ als veränderlich und den Schnittpunkt $\mathfrak{Q}' = (z', u')$ der Geraden $\mathfrak{Q}_0\mathfrak{Q}$ mit der Kurve als von $\mathfrak{Q}$ abhängig, so ist

$$z' = R(z, u; z_0, u_0), \quad u' = R_1(z, u; z_0, u_0),$$

wo die Form der rationalen Funktionen R und R_1 aus den Gleichungen (11b) und (11c) zu entnehmen ist, und jede dieser Transformationen führt für beliebige Werte des Parameters (z_0, u_0) die Kurve in sich über, da zwischen z' und u' dieselbe Gleichung wie zwischen z und u besteht. Jedem Parameterpaar (z_0, u_0) entspricht eine und nur eine Transformation des Gebildes in sich.

§ 5.

Wir gehen jetzt dazu über, das zweite vorher aufgestellte Reduktionsproblem zu behandeln, und formulieren dasselbe folgendermafsen: Es soll zu einem gegebenen ganzen Divisor

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_0 \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_r \tag{1}$$

der Ordnung $r + 1$ ein zweiter der Ordnung p

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_p$$

so bestimmt werden, dafs die Kongruenz

$$\int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_0} dw + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_1} dw + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_2} dw + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_r} dw \quad \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_1} dw + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_2} dw + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_p} dw \tag{2}$$

für jedes Integral erster Gattung erfüllt ist. Hierbei setzen wir $r + 1 > p$ voraus, weil im Falle $r + 1 = p$ die Punkte $\mathfrak{P}_i$ mit den $\mathfrak{Q}_i$

identisch werden. Nach den Ausführungen des § 3 läuft dieses Problem darauf hinaus, eine Funktion θ_r zu finden, welche ein Vielfaches von

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}_\infty^{r+1-p}}{\mathfrak{Q}_0\,\mathfrak{Q}_1\,\mathfrak{Q}_2\ldots\mathfrak{Q}_r} \tag{3}$$

ist; diese Funktion ist, solange die Punkte $\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_r$ allgemein sind, bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, denn man kann ja $r+1-p$ Primfaktoren des Nenners gleich $\mathfrak{P}_\infty$ und die übrigen p nach S. 318 so annehmen, dafs die Dimension der Klasse von $\mathfrak{Q}$ gleich Eins ist. Die Lösung könnte dadurch erfolgen, dafs man die vorige Rechnung zweimal hintereinander durchführt, nämlich zunächst p Hilfspunkte $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_p$ aufsucht, für welche

$$\int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_0} dw + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_1} dw + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_r} dw + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{R}_1} dw + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{R}_2} dw + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{R}_p} dw \equiv 0$$

ist, und sodann zu diesen wieder die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ so bestimmt, dafs

$$\int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{R}_1} dw + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{R}_p} dw + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_1} dw + \cdots + \int\limits_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_p} dw \equiv 0$$

ist; durch Subtraktion beider Kongruenzen fallen dann die Integrale mit den Grenzen $\mathfrak{R}_i$ heraus, und es ergiebt sich alsdann die gesuchte Relation (2).

Einfacher und natürlicher ist es aber, eine direkte Lösung mit Hilfe der auf S. 582 aufgestellten und vielfach benutzten Funktion

$$\theta(\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}) = \frac{\overline{\xi}^{(0)}\eta^{(0)} + \overline{\xi}^{(1)}\eta^{(1)} + \cdots + \overline{\xi}^{(n-1)}\eta^{(n-1)}}{z - \overline{z}}$$

zu suchen. Fixieren wir hier den Punkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}_i$ und betrachten $\overline{\mathfrak{P}}$ als veränderlich, so ist der zugeordnete Divisor nach (5) auf S. 584 von der Form

$$c\,\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\mathfrak{Q}_i\,\mathfrak{P}_\infty^{\varrho}},$$

wo $\overline{\mathfrak{G}}$ einen ganzen Divisor bedeutet, die Funktion wird also aufser in $\mathfrak{Q}_i$ nur noch in $\mathfrak{P}_\infty$ unendlich. Wir wollen jetzt, da wir hier die konjugierten Gröfsen nicht mehr zu unterscheiden brauchen, die Werte der Funktionen $\eta^{(h)}$ und z für einen Punkt $\mathfrak{Q}_i$ kurz durch

$$\eta_i^{(h)} = \eta^{(h)}(\mathfrak{Q}_i) \quad \text{und} \quad z_i = z(\mathfrak{Q}_i)$$

bezeichnen, und bilden so die $r+1$ Funktionen

$$-\theta(\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{P}) = \frac{\xi^{(0)}\eta_i^{(0)} + \xi^{(1)}\eta_i^{(1)} + \cdots + \xi^{(n-1)}\eta_i^{(n-1)}}{z - z_i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots r). \tag{4}$$

Man kann nämlich von jeder Funktion, welche ein Vielfaches des Divisors $\mathfrak{Q}$ in (3) ist, eine Summe

5) $S = C_0\theta(\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{P}) + C_1\theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{P}) + C_2\theta(\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{P}) + \cdots + C_r\theta(\mathfrak{Q}_r, \mathfrak{P})$

so abziehen, dafs die Pole $\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots \mathfrak{Q}_r$ in Fortfall kommen, die Differenz also eine Funktion des Ideals $I(1)$ und somit bei Wiederaufnahme der Bezeichnungen der zweiunddreifsigsten Vorlesung (S. 565) von der Form

$$\xi = u_0\xi^{(0)} + u_1\xi^{(1)} + \cdots + u_{n-1}\xi^{(n-1)}$$

ist, wo $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ ganze Funktionen von z sind. Daher ist die gesuchte Funktion

5a) $$\theta_r = S + \xi,$$

und es sind hier die $r+1$ Konstanten C_i und die n ganzen Funktionen u_h so zu bestimmen, dafs θ_r in $\mathfrak{P}_\infty$ nicht unendlich wird, sondern mindestens die Ordnungszahl $r - p + 1$ hat. Fafst man aber in S die Koeffizienten desselben Gliedes $\xi^{(h)}$ zusammen, so kann man θ_r in die Form setzen:

6) $$\theta_r = R_0\xi^{(0)} + R_1\xi^{(1)} + \cdots + R_{n-1}\xi^{(n-1)},$$

worin der Koeffizient

7) $$R_h = u_h - \frac{C_0\eta_0^{(h)}}{z - z_0} - \frac{C_1\eta_1^{(h)}}{z - z_1} - \cdots - \frac{C_r\eta_r^{(h)}}{z - z_r} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

und somit eine rationale Funktion von z ist. Da nun das Fundamentalsystem $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots \xi^{(n-1)}$ für die Stelle $(z = \infty)$ normal ist, so ist nach dem Satze auf S. 168 hierzu erforderlich und hinreichend, dafs die Ordnungszahl jedes einzelnen der n Glieder der Summe

$$R_0\xi^{(0)}, \quad R_1\xi^{(1)}, \ldots R_{n-1}\xi^{(n-1)}$$

in $\mathfrak{P}_\infty$ positiv und $\geqq r - p + 1$ ist. Da ferner die Ordnungszahlen der Elemente $\xi^{(h)}$ Null oder negativ sind, so müssen auch diejenigen der rationalen Funktionen R_h oberhalb gewisser noch zu bestimmender positiver Grenzen liegen, und wenn man also R_h nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelt, so müssen alle Potenzen mit negativem oder verschwindendem Exponenten und überdies noch eine gewisse Anzahl von Potenzen mit positivem Exponenten fortfallen. Da nun in der Gleichung (7) der erste Teil u_h bei der Entwickelung nur Glieder der ersten, die darauf folgende Summe nur solche der zweiten Art liefert, so mufs zunächst

7a) $$u_h = 0, \quad \text{also} \quad \xi = 0$$

sein, und es brauchen also nur noch die $r+1$ Konstanten C_i der obigen Forderung gemäfs bestimmt zu werden.

Bezeichnen wir nun die Ordnungszahl der rationalen Funktion R_h für die Stelle $(z=\infty)$ im Körper $K(z)$ mit δ_h, so hat dieselbe Funktion in dem algebraischen Körper $K(z,u)$ für $\mathfrak{P}_\infty$ die Ordnungszahl $\delta_h n$, und da $\xi^{(h)}$ nach S. 565 ebendaselbst die Ordnungszahl $-\mu_h n - h$ besitzt, so ergiebt sich die des Produktes $R_h \xi^{(h)}$ gleich

$$(\delta_h - \mu_h)\, n - h,$$

und es mufs also für δ_h die kleinste ganze Zahl genommen werden, welche der Ungleichung

$$8)\qquad (\delta_h - \mu_h)\, n - h \geqq r - p + 1 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

genügt. Um hieraus δ_h zu ermitteln, setzen wir

$$8\text{a})\qquad r - p + 1 = gn - \varrho,$$

wo g ganz und positiv und ϱ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$ ist; dann mufs also

$$8\text{b})\qquad (g+1)\, n - \varrho > (\delta_h - \mu_h)\, n - h \geqq gn - \varrho \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

sein. Durch diese Ungleichung wird die Zahl δ_h eindeutig bestimmt; ist nämlich $h \leqq \varrho$, also $h - \varrho$ nicht positiv, so finden wir

$$9\text{a})\qquad \delta_h - \mu_h = g \qquad (h \leqq \varrho),$$

ist aber $h > \varrho$, also $h - \varrho$ positiv, so ergiebt sich

$$9\text{b})\qquad \delta_h - \mu_h = g + 1 \qquad (h > \varrho),$$

und wir erhalten somit die Gleichungen

$$10)\qquad \begin{cases} \delta_0 - \mu_0 = g \\ \delta_1 - \mu_1 = g \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta_\varrho - \mu_\varrho = g \\ \delta_{\varrho+1} - \mu_{\varrho+1} = g + 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \delta_{n-1} - \mu_{n-1} = g + 1. \end{cases}$$

Addiert man dieselben, so ergiebt sich, da nach (3) auf S. 567 $\sum_{h=0}^{n-1} \mu_h = p$ ist:

$$\sum_{h=0}^{n-1} \delta_h - p = ng + n - \varrho - 1 = (r - p + 1) + (n - 1),$$

und es ist also

$$11)\qquad \sum_{h=0}^{n-1} (\delta_h - 1) = r.$$

Entwickeln wir jetzt R_h nach Potenzen von $\frac{1}{z}$, so finden wir nach (7) und (7a):

$$-R_h = \frac{1}{z}\sum_{i=0}^{r} C_i \eta_i^{(h)} + \frac{1}{z^2}\sum_{i=0}^{r} C_i z_i \eta_i^{(h)} + \frac{1}{z^3}\sum_{i=0}^{r} C_i z_i^2 \eta_i^{(h)} + \cdots \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

und hier müssen die Koeffizienten von

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \frac{1}{z^3}, \ldots \left(\frac{1}{z}\right)^{\delta_h - 1}$$

verschwinden; wir erhalten also aus jeder der obigen Reihenentwickelungen $\delta_h - 1$, aus allen zusammen also zufolge der Formel (11) gerade r lineare Gleichungen

$$\text{12)} \qquad \sum_{i=0}^{r} C_i z_i^{\lambda_h} \eta_i^{(h)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, 2, \ldots n-1 \\ \lambda_h = 0, 1, 2, \ldots \delta_h - 2 \end{pmatrix};$$

durch diese werden die $r+1$ Koeffizienten $C_0, C_1, \ldots C_r$, wenigstens solange die Punkte $\mathfrak{Q}_i$ unbestimmt bleiben, abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor, eindeutig bestimmt.

Um die Form der linearen Gleichungen noch genauer festzustellen, berücksichtigen wir, dafs nach den Ergebnissen der zweiunddreifsigsten Vorlesung jedes Integral der Form

$$\tau = \int z^{\lambda_h} \eta^{(h)} dz$$

entweder von der ersten oder ein Elementarintegral zweiter Gattung mit dem Pole $\mathfrak{P}_\infty$, also $\tau' = z^{\lambda_h} \eta^{(h)}$ ein Integrand erster oder zweiter Gattung ist. In jeder der Gleichungen (12) tritt nun ein bestimmter derartiger Integrand τ' auf, und dieser ist für alle Punkte $\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_r$ zu bilden, so dafs die Gleichung die Form erhält:

$$C_0 \tau'(\mathfrak{Q}_0) + C_1 \tau'(\mathfrak{Q}_1) + C_2 \tau'(\mathfrak{Q}_2) + \cdots + C_r \tau'(\mathfrak{Q}_r) = 0;$$

man kann aber auch, da es hier überall nur auf die Verhältnisse der Konstanten C ankommt, den Integranden $\tau'(\mathfrak{Q})$ geradezu durch das Differential $d\tau(\mathfrak{Q})$ ersetzen.

Nun erscheinen in den r Gleichungen (12) zufolge der Tabelle (7) auf S. 569 stets die sämtlichen p Integranden erster Gattung, weil g positiv, also δ_h mindestens gleich $\mu_h + 1$ ist, und damit sind die sämtlichen Gleichungen (12) auch erschöpft, wenn $r = p$ ist. Ist aber $r > p$, so treten überdies noch einige Integranden zweiter Gattung hinzu, nämlich diejenigen, für welche

$$\lambda_h \geq \mu_h$$

ist. Setzen wir aber für diese

$$\lambda_h = \mu_h + \beta_h \qquad (0 \leq \beta_h \leq \delta_h - 2 - \mu_h),$$

so kann man leicht zeigen, dafs die Ordnungszahl des zugehörigen Integrals

$$\int z^{\mu_h + \beta_h} \eta^{(h)} dz$$

stets unterhalb der Grenze $r - p + 1$ bleibt. Denn nach Gleichung (8) auf S. 570 wird ein solches Integral in der Ordnung

$$n\beta_h + (n - h) \leq n(\delta_n - 1 - \mu_h) - h,$$

unendlich, und diese Zahl ist nach der Ungleichung (8b) kleiner als

$$gn - \varrho = r - p + 1.$$

Andererseits ist die Anzahl aller Integrale, für welche $\mathfrak{P}_\infty$ ein Pol höchstens von der Ordnung $r - p$ ist, gerade gleich r, und folglich sind die Funktionen, welche in den r Gleichungen (12) auftreten, gerade die Differentialquotienten der sämtlichen linear unabhängigen Integrale erster und zweiter Gattung, für welche $\mathfrak{P}_\infty$ höchstens ein Pol von $(r - p)^{\text{ter}}$ Ordnung wird.

Bezeichnen wir also jetzt ein beliebiges Fundamentalsystem für die Integrale zweiter Gattung, welche nur in $\mathfrak{P}_\infty$ und höchstens in der $(r - p)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich werden, mit

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \tau_3, \ldots \tau_r,$$

so lassen sich die Gleichungen (12) auch einfacher so schreiben:

$$\text{12a)} \qquad C_0 \tau_\varrho'(\mathfrak{Q}_0) + C_1 \tau_\varrho'(\mathfrak{Q}_1) + C_2 \tau_\varrho'(\mathfrak{Q}_2) + \cdots + C_r \tau_\varrho'(\mathfrak{Q}_r) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r);$$

die Funktion θ_r in (5) und (5a) erhält somit die folgende endgiltige Gestalt:

$$\text{13)} \qquad \theta_r(\mathfrak{P}) = \begin{vmatrix} \theta(\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{P}) & \theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{P}) & \theta(\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{P}) & \ldots \theta(\mathfrak{Q}_r, \mathfrak{P}) \\ \tau_1'(\mathfrak{Q}_0) & \tau_1'(\mathfrak{Q}_1) & \tau_1'(\mathfrak{Q}_2) & \ldots \tau_1'(\mathfrak{Q}_r) \\ \tau_2'(\mathfrak{Q}_0) & \tau_2'(\mathfrak{Q}_1) & \tau_2'(\mathfrak{Q}_2) & \ldots \tau_2'(\mathfrak{Q}_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_r'(\mathfrak{Q}_0) & \tau_r'(\mathfrak{Q}_1) & \tau_r''(\mathfrak{Q}_2) & \ldots \tau_r'(\mathfrak{Q}_r) \end{vmatrix}.$$

Ist insbesondere $r = p$, so erhalten wir, wenn $w_1, w_2, \ldots w_p$ wieder die Integrale erster Gattung bedeuten:

$$\text{13a)} \qquad \theta_p(\mathfrak{P}) = \begin{vmatrix} \theta(\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{P}) & \theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{P}) & \theta(\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{P}) & \ldots \theta(\mathfrak{Q}_p, \mathfrak{P}) \\ w_1'(\mathfrak{Q}_0) & w_1'(\mathfrak{Q}_1) & w_1'(\mathfrak{Q}_2) & \ldots w_1'(\mathfrak{Q}_p) \\ w_2'(\mathfrak{Q}_0) & w_2'(\mathfrak{Q}_1) & w_2'(\mathfrak{Q}_2) & \ldots w_2'(\mathfrak{Q}_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_p'(\mathfrak{Q}_0) & w_p'(\mathfrak{Q}_1) & w_p'(\mathfrak{Q}_2) & \ldots w_p'(\mathfrak{Q}_p) \end{vmatrix};$$

diese Funktion, welche also in $p+1$ willkürlichen Punkten $\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_p$ unendlich wird und in $\mathfrak{P}_\infty$ verschwindet, nimmt in der Weierstraſsschen Theorie der algebraischen Funktionen eine grundlegende Stellung ein und ist mit der auf S. 645 erwähnten Funktion $H(x, y; x', y')$ identisch.

Mit der Aufstellung der Funktion θ_r ist die am Anfang gestellte Aufgabe im wesentlichen gelöst; um nämlich jetzt die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ und die zugehörigen Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$ von z zu finden, bilden wir die Norm von θ_r. Diese ist eine rationale Funktion von z mit dem Nenner

$$(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_r),$$

welche in $\mathfrak{P}_x$ die Ordnungszahl $r - p + 1$ besitzt; die Ordnung des Zählers $G(z)$ ist also um ebensoviel Einheiten kleiner als die des Nenners, und somit gleich p. Daher erhalten wir

$$N\theta_r(\mathfrak{P}) = \frac{G(z)}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_r)}, \tag{14}$$

worin

$$G(z) = \chi_p z^p + \chi_{p-1} z^{p-1} + \cdots + \chi_1 z + \chi_0$$

eine ganze Funktion p^{ten} Grades von z ist, deren Koeffizienten bestimmte Gröſsen des Körpers

$$K(z_0, u_0; z_1, u_1; \ldots z_r, u_r)$$

sind; die Wurzeln von $G(z) = 0$ sind die gesuchten Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$. Die Lösung der Aufgabe führt also schlieſslich ebenso, wie die vorige, auf eine Gleichung p^{ten} Grades, deren Koeffizienten einem gegebenen Rationalitätsbereiche angehören.

In den Formeln dieses und des vorigen Paragraphen sind die Gröſsen (z_h, u_h) und die zugehörigen Punkte $\mathfrak{Q}_h$ zunächst als Unbestimmte angesehen; ihre Anwendung auf spezielle Wertsysteme setzt voraus, daſs alle Divisoren von ungewöhnlichem Verhalten ausgeschlossen werden. Die Determinanten (13) dieses und (5) des vorigen Paragraphen, auf deren Bildung sich die Rechnung konzentriert, werden z. B. illusorisch, falls $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2$ ist, der gegebene Divisor also gleiche Primfaktoren erhält. In solchen Fällen, vor allem immer dann, wenn die Addition der Abelschen Integrale zur Multiplikation wird, müssen die erhaltenen Formeln durch andere ersetzt werden; das Prinzip aber, das zu ihrer Aufstellung geführt hatte, bleibt durchaus bestehen.

§ 6.

Durch die Auseinandersetzungen des § 2 ist festgestellt worden, dafs jedem beliebigen Divisor

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}_1^{\mu_1}\,\mathfrak{Q}_2^{\mu_2}\ldots\mathfrak{Q}_h^{\mu_h}$$

vermöge der p Gleichungen

$$1)\qquad \mu_1\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_1} dw_i + \mu_2\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_2} dw_i + \cdots + \mu_h\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{Q}_h} dw_i \equiv v_i \qquad (i=1,2,\ldots p)$$

ein Wertsystem $(v_1, v_2, \ldots v_p)$ zugeordnet wird, welches nur nach seinem Kongruenzwert modulis der Perioden in Betracht kommt und dafs solchen Divisoren, welche im eigentlichen Sinne oder auch nur in Bezug auf die Klasse P_∞ des Primteilers $\mathfrak{P}_\infty$ äquivalent sind, kongruente Wertsysteme entsprechen.

Durch die letzten Entwickelungen aber hat sich ergeben, dafs jeder beliebige Divisor durch einen und im allgemeinen nur einen ganzen Divisor der Ordnung p

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_p,$$

das System (1) also durch folgendes

$$1\text{a})\qquad \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_1} dw_i + \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_2} dw_i + \cdots + \int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}_p} dw_i \equiv v_i \qquad (i=1,2,\ldots p)$$

ersetzt werden kann. Wir können also die Untersuchung auf die ganzen Divisoren der Ordnung p beschränken; jeder derselben konstituiert aber eine Klasse, deren Dimension nach S. 318 im allgemeinen gleich Eins und nur dann gröfser als Eins ist, wenn $\mathfrak{G}$ in einem ganzen Differentialteiler enthalten ist; es entsprechen also verschiedenen Divisoren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ im allgemeinen auch verschiedene Wertsysteme (v_i) und (v_i').

Es entsteht jetzt noch die Frage, ob umgekehrt zu jedem Wertsystem (v_i) ein ganzer Divisor $\mathfrak{G}$ der Ordnung p gefunden werden kann, so dafs die Gleichungen (1a) erfüllt sind; ist dies aber der Fall, so ist nach unseren Ergebnissen das Punktsystem $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_p$ im allgemeinen auch eindeutig bestimmt. Das so sich ergebende Problem heifst das Jacobische Umkehrproblem und bildet die naturgemäfse Verallgemeinerung des Umkehrproblems der elliptischen Integrale; denn dieses besteht ja darin, aus der Gleichung

$$\int_{\mathfrak{P}_\infty}^{\mathfrak{P}} dw = v \quad (\text{modd. } \omega_1, \omega_2)$$

die Gröſsen des Körpers $K(z, u)$, welche sämtlich eindeutige Funktionen von $\mathfrak{P}$ sind, als Funktionen von v darzustellen; wie dieses auf die elliptischen, so führt das allgemeinere Problem auf die sogenannten Abelschen Funktionen.

Die Antwort auf die eben gestellte Frage fällt bejahend aus; der Beweis erfolgt entweder durch direkte Integration des Systems von Differentialgleichungen

$$\text{1b)} \qquad dw_i(\mathfrak{P}_1) + dw_i(\mathfrak{P}_2) + \cdots + dw_i(\mathfrak{P}_p) = dv_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p),$$

welches ja mit dem System (1a) im wesentlichen gleichwertig ist, oder durch Aufstellung und Benutzung der sogenannten Jacobischen oder Thetafunktion von p Variabeln $v_1, v_2, \ldots v_p$. Die Ausführung dieser Untersuchung liegt aber auſserhalb der Grenzen des vorliegenden Werkes; dieses soll vielmehr mit der Einordnung des transcendenten Umkehrproblems in den Bereich der algebraischen Fragestellungen seinen Abschluſs finden.

Achtunddreifsigste Vorlesung.

(Anhang.)

Die historische Entwickelung der Theorie. — Abels und Jacobis Untersuchungen und das Umkehrproblem. — Cauchys und Puiseux' Untersuchung über den Wertverlauf der Funktion. — Riemanns Theorie der Abelschen Funktionen. — Moderne Theorieen. — Die funktionentheoretische Methode von Weierstrafs. — Die geometrischen Methoden von Clebsch und Gordan. Brill und Noether. — Die arithmetische Methode von Dedekind und Weber.

§ 1.

Wir halten nunmehr, am Ziele angelangt, Umschau in dem Gebiete, das sich jetzt frei vor unseren Augen ausbreitet, und vergleichen hierbei auch den Weg, der uns hinangeführt hat, mit den anderen Wegen, welche, im Ausgangspunkte und im Verlaufe von dem unsrigen verschieden, doch in ihrem Abschlusse mit ihm zusammentreffen. Nicht um eine ins einzelne gehende Durchmusterung der verschiedenen Teilgebiete und der sie beherrschenden Haupttheoreme soll es sich bei diesem Rundblicke handeln, da hierüber die vorhandenen umfangreichen Referate Aufschlufs geben*); vielmehr geht unsere Absicht nur dahin, in der nachfolgenden historischen Skizze die sehr verschiedenartigen Methoden, welche zur Erforschung der allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Funktionen in Anwendung gebracht worden sind, hinsichtlich ihres Ursprunges, ihrer Strenge und ihrer Tragweite zu charakterisieren.

Die Theorie der algebraischen Funktionen ist, wenn man darunter die Untersuchung spezieller Funktionsklassen versteht, ebenso alt wie die der algebraischen Kurven, und einzelne später zu umfassender Bedeutung gelangende Begriffsbildungen lassen sich in ihren Quellen bis zu den Zeiten Descartes' und der Erfindung der analytisch-geometrischen Methode verfolgen. Insofern es sich aber um die Ergründung völlig

---

*) 1. A. Brill und M. Noether, Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresber. d. Deutsch. Mathem.-Vereinigung, Bd. 3, Berlin 1894 S. 107—566.

2 Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1901 und 1902.
II B 2. Algebraische Funktionen und ihre Integrale, von W. Wirtinger. S. 115—175.
II B 2a. Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen, von K. Hensel.

allgemeiner, das ganze Gebiet beherrschender Gesetze handelt, ist als Grundstein der Theorie ohne Zweifel das grofse Theorem von Abel zu bezeichnen, welches in unserer Darstellung den Abschlufs der Untersuchung gebildet hat.

Vor der Aufstellung dieses Fundamentalsatzes (1826—29), welche zeitlich mit der Begründung der Lehre von den elliptischen Funktionen zusammenfiel, hatte man den Begriff der algebraischen Funktion in der heute geltenden allgemeinsten Bedeutung des Wortes nur gelegentlich angewendet, den des Integrals einer algebraischen Funktion aber überhaupt nur in seiner Beschränkung auf den rationalen, elliptischen oder hyperelliptischen Fall gekannt. Durch Abels Entdeckung aber ward bewiesen, dafs auch beliebige Integrale algebraischer Funktionen ganz ebenso wie die schon vorher untersuchten trigonometrischen und elliptischen ein Additionstheorem besitzen; hierdurch erst ward es offenbar, dafs die Erhebung der Betrachtungsweise zu der von Abel angenommenen Allgemeinheit den Begriff der algebraischen Funktion und des Integrals einer solchen nicht soweit verflüchtigte, dafs er nicht noch charakteristische Eigenschaften von umfassendster Geltung behielt. Da sich aber andererseits durch den Gedanken der Umkehrung der elliptischen Integrale das neue und ergebnisreiche Gebiet der elliptischen Funktionen erschlossen hatte, so erwuchs aus Abels Theoreme die Aufforderung, ähnliche Methoden auch für den allgemeinen Fall anwendungsfähig zu machen. Die reifliche Prüfung der hier sich einstellenden Schwierigkeiten führte Jacobi durch eine Art Intuition bereits zur Formulierung des Umkehrproblems (1832), und durch die Lösung dieses Problems für hyperelliptische Integrale vom Geschlechte zwei, welche Göpel und Rosenhain (1847) bewältigten, wurde die Fruchtbarkeit der neuen Methoden in Evidenz gesetzt. So fügte es sich, dafs die transcendente Fragestellung zu einer Zeit bereits in den Vordergrund der Untersuchung trat, in welcher ein Einblick in das elementare Gebiet der algebraischen Funktionen, aus dem die transcendenten hervorgehen, noch nicht gewonnen war.

Die unerläfslichste Voraussetzung jedes weiteren Fortschrittes in diesen Fragen war die Erforschung der Wertveränderung, welche eine algebraische Funktion erfährt, wenn die unabhängige Veränderliche einen beliebigen geschlossenen Weg in der komplexen Zahlenebene zurücklegt. Dieses Problem ward von Cauchy mit den Hilfsmitteln der damals neu entstehenden Theorie der Funktionen einer komplexen Variabelen in Angriff genommen und von Puiseux, der auf den von Cauchy geschaffenen Grundlagen weiterbaute, zu einem vorläufigen Abschlusse gebracht (1850). Puiseux vor allem gelangte zuerst durch

Verfolgung der Wertveränderung algebraischer Funktionen bei einem Umlaufe der unabhängigen Variabeln zu einem tieferen Verständnis ihrer Mehrdeutigkeit; er betrachtet ihre Reihenentwickelungen in der Umgebung regulärer und kritischer Stellen und wendet zu deren Aufstellung das schon von Newton eingeführte Diagramm an; er geht endlich auf Grund der gewonnenen Erkenntnisse an die allgemeine Untersuchung der Periodizität der Abelschen Integrale heran, freilich ohne hier zu einer vollständigen Gruppierung der Perioden gelangen zu können.*)

Unter den von Puiseux geschaffenen Hilfsmitteln ist es vor allem die Methode des Diagramms, welche zu bleibender Bedeutung gelangt und wie in zahlreichen späteren Untersuchungen, so auch in der hier gegebenen Darstellung wirksam wird. Es mag aber an dieser Stelle hervorgehoben werden, dafs zwischen der Anwendung des Diagramms dort und hier doch auch einige wesentliche Unterschiede bestehen, welche der Hauptsache nach in zwei charakteristischen Abweichungen ihren Ausdruck finden. Erstens setzt Puiseux die Existenz der Reihenentwickelungen auf Grund der allgemeinen Ergebnisse der Cauchyschen Funktionentheorie bereits als gegeben voraus und benutzt das Diagramm nur zur Feststellung ihrer Exponenten und Koeffizienten, während dasselbe hier als durchgängiges und methodisches Hilfsmittel ausgebildet und als ausreichend zur Beantwortung aller auftretenden Fragen erwiesen wird. Zweitens aber unterscheiden sich auch die angewendeten Diagramme selbst voneinander, insofern bei uns das vollständige Polygon konstruiert wird, welches zur Aufstellung aller für eine gegebene Stelle ($z = a$) geltenden Reihenentwickelungen erforderlich ist; in der Untersuchung Puiseux' hingegen kommt nur der aufsteigende Teil dieses Polygons zum Vorschein, und es kann also der Regel nach mit seiner Hilfe nur ein Teil jener Reihenentwickelungen erhalten werden.

§ 2.

Die beiden freiliegenden Fäden, welche aus den Arbeiten von Abel und Jacobi einerseits, von Cauchy und Puiseux andererseits hervorgegangen waren, finden sich in der Schöpfung Bernhard Riemanns zu einem einzigen Gewebe vereinigt und durch Ideenbildungen völlig originalen Gepräges ausgestaltet. Durch seine durchaus auf

*) Évariste Galois, der Entdecker des Gruppenprinzipes in der Gleichungstheorie, hat in dem berühmten, am Vorabende seines Todes geschriebenen Briefe auch einige Sätze über Abelsche Integrale angegeben, welche diese Periodizitätsuntersuchungen Puiseux' überholen und einige Resultate Riemanns anticipieren (Revue encyclopédique, September 1832; Liouv. Journ. Bd. 11, [1846], S. 412—414); dieselben haben aber auf die Entwickelung unserer Disziplin keinen Einflufs ausgeübt.

transcendenter Grundlage ruhende Theorie der Abelschen Funktionen (1857) werden auch die Gesetze, von denen das elementarere Gebiet der algebraischen Funktionen beherrscht wird, so vollständig enthüllt, dafs die hier zu erlangenden Hauptresultate sich entweder geradezu in Riemanns klassischer Abhandlung vorfinden oder wenigstens mit Hilfe der daselbst eingeführten Methoden abgeleitet werden können.

Aus der Fülle der gewonnenen Ergebnisse mögen nur die allerwesentlichsten hervorgehoben werden, welche sich hier zuerst finden und für alle Zukunft von bleibender Bedeutung sind. Während Puiseux in der Untersuchung der Änderung der algebraischen Funktionen bei den Umläufen der unabhängigen Variabeln stehen bleibt, tritt hier an die Stelle dieser Betrachtung die Lehre von der Riemannschen Fläche, auf welcher der ganze Wertvorrat der Funktion vollständig und übersichtlich ausgebreitet erscheint und durch deren Zusammenhangseigenschaften die Frage nach der Periodizität der Abelschen Integrale entschieden wird. Hieraus ergiebt sich auch die Einführung des Geschlechtsbegriffes, die Klassifikation der Integrale in die drei Gattungen nach ihren Unstetigkeitseigenschaften, ihre Bestimmung durch Angabe eines Teils ihrer Perioden und die Zurückführung der Funktionen des Körpers auf die mit einfacheren Eigenschaften versehenen Integrale (vgl. S. 359). Schliefslich ist Riemann auch das Prinzip der birationalen Transformation eigentümlich, durch welches die ineinander überführbaren Gebilde in eine Klasse vereinigt werden und die nicht nur für die Algebra, sondern namentlich auch für das Umkehrproblem wichtige Frage nach der Zahl und der Beschaffenheit der für die Klasse charakteristischen Moduln gestellt wird.

Trotz aller dieser Vorzüge, deren Bedeutung und Wirksamkeit nicht hoch genug angeschlagen werden kann, darf Riemanns Untersuchung, soweit es sich um die Lehre von den algebraischen Funktionen handelt, nur als ein künstlicher Ersatz einer natürlichen Theorie angesehen werden. Um die Berechtigung dieser Behauptung zu erweisen, müssen wir bis auf die Quelle der Riemannschen Methode zurückgehen.

Für die umfassende Denkweise Riemanns ist weder die Theorie der algebraischen, noch auch die der aus ihnen hervorgehenden transcendenten Funktionen Selbstzweck der Untersuchung. Sein Ziel ist vielmehr die Aufstellung eines völlig allgemeinen Prinzipes zur Bestimmung analytischer Funktionen durch ein vollständiges, aber möglichst kleines System von Unstetigkeits- und Grenzbedingungen, ähnlich wie es Dirichlet für die Potentialfunktion aufgestellt hatte; die von ihm ausgeführten Untersuchungen dienen nur als spezielle Beispiele für den Nachweis der Fruchtbarkeit der allgemeinen Methode. Zur Erreichung

dieses Zieles geht Riemann von der konformen Abbildung der Flächen aus, welche durch die Funktionen einer komplexen Variabeln vermittelt wird, und erweitert ein von Gauss und Dirichlet in der Potentialtheorie angewendetes Prinzip so, dafs es zur Charakterisierung analytischer Funktionen, also beispielsweise auch zur eindeutigen Bestimmung Abelscher Integrale brauchbar wird. Dieses sogenannte Dirichletsche Prinzip ist aber in der einfachen, von Riemann herrührenden Form als unstreng erkannt, in derjenigen Gestalt hinwiederum, in welcher es den heutigen Anforderungen der Wissenschaft genügt, weit davon entfernt, einfach zu sein, weil es umständliche Grenzprozesse zu seinem Nachweise erfordert. Es kann daher keinem Zweifel unterliegen, dafs das Prinzip, so wertvoll es für die Beherrschung höherer Funktionsklassen ist, doch in einem elementaren und direkter Untersuchung zugänglichen Wissenszweige keinen Platz verdient. Hieraus ergiebt sich vor allem das neue und bei Riemann ungelöste Problem, die Integrale der drei Gattungen, deren Existenz durch das Dirichletsche Prinzip erwiesen wird, mit Hilfe rein algebraischer Methoden auch wirklich aufzustellen.

Mit dem eben erörterten Übelstande hängt ein zweiter, nicht minder wesentlicher eng zusammen. In der Theorie Riemanns erscheinen, ihrem transcendenten Ursprung entsprechend, die Abelschen Integrale überall als das prius; die Funktionen des Körpers, welche doch schliefslich das primitive Objekt der Untersuchung sind, werden aus jenen abgeleitet, ihre Existenz also ebenfalls nur erschlossen. Daher kommt es, dafs die ausschliefsliche Anwendung der Riemannschen Prinzipien überall da, wo es sich um Ergründung rein algebraischer Gesetze oder um die Bildung der in ihrer Existenz erwiesenen Funktionen handelt, schwerfällig und künstlich wird, wenn sie nicht geradezu versagt. Diese Behauptung haben wir an dem Beispiele des Riemann-Rochschen Satzes in ausführlichem Zusammenhange begründet (§ 3 der zweiundzwanzigsten Vorlesung), und sie liefse sich auch an anderen Stellen in gleicher Weise bestätigen.

Fassen wir also die historischen Darlegungen dieses und des vorigen Abschnittes zusammen, so hat sich ergeben, dafs die Fundamentalsätze unserer Theorie erst im Zusammenhange mit höheren Problemen und demgemäfs auch zunächst mit transcendenten Methoden erworben worden sind und dafs die Methodik der Algebra weit hinter der der Analysis zurückblieb. Es bleibt daher jetzt noch zu erörtern, welche Schwierigkeiten einer elementaren und rein algebraischen Untersuchung entgegenstanden und auf welchen Wegen ihre Überwindung gesucht werden konnte.

§ 3.

Zur Begründung einer elementaren Theorie der algebraischen Funktionen bieten sich im wesentlichen drei verschiedene Wege dar, welche kurz, wenn auch nicht ganz vollständig als die funktionentheoretische, die geometrische und die arithmetische Methode bezeichnet werden können.

Die erste von diesen Methoden ist von Weierstraſs in engem Anschluſs an seine allgemeine Theorie der analytischen Funktionen ausgebildet und in Vorlesungen (1869—80) ausführlich entwickelt worden. Sie legt daher, ebenso wie die hier vorgetragene Darstellung, als Fundament die Lehre von der Reihenentwickelung und der analytischen Fortsetzbarkeit der algebraischen Funktionen zu Grunde und gelangt auf diesem Fundamente durch rein algebraische Konstruktionen zu einer vollständigen Durchdringung der das ganze Gebiet beherrschenden Gesetze. Sie unterscheidet sich andererseits von der unsrigen auſser durch die Durchführung im einzelnen auch in prinzipieller Hinsicht durch Verzicht auf die Anwendung der Riemannschen Fläche und die Lehre von den Divisoren, sowie auf alle die Hilfsmittel, welche durch diese Grundbegriffe an die Hand gegeben werden. Ein genauer Einblick in den Weierstraſsschen Ideengang, der bisher nur mittelbar oder auszugsweise bekannt geworden ist, ist erst möglich, sobald die in Aussicht gestellte Veröffentlichung jener Vorlesungen erfolgt ist; aus diesem Grunde muſs eine eingehendere Vergleichung der Ähnlichkeiten und Verschiedenheiten beider Theorien, welche in vieler Beziehung interessant sein würde, vorläufig noch hinausgeschoben werden.

Die geometrische Methode, welche von der Theorie der algebraischen Kurven ausgeht, ist zuerst von Clebsch und Gordan noch in engem Anschluſs an Riemanns Untersuchungen ausgebildet worden (1863—66), und ihr Verdienst ist es vor allem, die überaus groſse Fruchtbarkeit der neuen Anschauungen für die Lehre von den höheren algebraischen Kurven aufgedeckt zu haben; späterhin haben aber Brill und Noether auch den Zusammenhang mit den transcendenten Begriffsbildungen völlig gelöst und so eine selbständige und elementare Theorie der algebraischen Funktionen entwickelt (seit 1871). Dieselbe geht von den in der analytischen Geometrie hergeleiteten Schnittpunktsätzen der Kurven aus, nach welchen, wenn eine Kurve $f(x, y) = 0$ durch den Schnitt der Kurven $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ hindurchgeht, eine Identität der Form

$$f(x, y) = g(x, y)\,\varphi(x, y) + h(x, y)\,\psi(x, y)$$

besteht, wo auch g und h ganze Funktionen von x und y sind. Es werden nun, da diese Identität zunächst nur für den Fall einfacher Schnittpunkte der beiden Kurven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ erweisbar ist, in

dem sogenannten Noetherschen Fundamentaltheoreme die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre allgemeine Giltigkeit aufgestellt, hierauf wird die Lehre von der Korresidualität der Punktgruppen auf der Kurve (vgl. S. 434) gegründet und aus ihr der Riemann-Rochsche Satz abgeleitet. Der Vorzug dieser Theorie liegt vor allem in der Anschaulichkeit der geometrischen Vorstellungen, welche vielfach eine überaus durchsichtige Interpretation der zahlreich auftretenden analytischen Bildungen gestatten.

Dennoch unterliegt diese Theorie nach unserer Meinung, soll sie anderenfalls nicht in wichtigen Spezialfällen versagen, erheblichen Schwierigkeiten, welche mit den natürlichen ihr zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht völlig zu überwinden sind. Es liegt dies daran, dafs die Möglichkeiten, welche beim Schnitte zweier Kurven auftreten, höchst verwickelter Natur sein können, wenn ein Schnittpunkt für eine oder beide Kurven ein singulärer ist. Die genaue Bestimmung der Art der Singularität und der Multiplizität des Schnittes kann alsdann, wie wir gesehen haben, nicht ausschliefslich durch Bildung von Diskriminanten und Resultanten gewonnen werden, weil diese nur Normen sind und darum zur Charakterisierung der hier in Betracht kommenden Divisoren nicht ausreichen (vgl. S. 396), sondern sie erfordert unter allen Umständen die Aufstellung der zugehörigen Reihenentwickelungen oder eines Äquivalentes derselben, durch welches die dem Kurvenpunkte entsprechenden Punkte der Riemannschen Fläche voneinander geschieden und ihre Ordnungszahlen festgestellt werden. Zur Vermeidung dieser Schwierigkeiten gehen die Anhänger der rein geometrischen Betrachtungsweise von gewissen speziellen Fällen aus und bedienen sich für die allgemeine Untersuchung des Prinzips der Auflösung der Singularitäten mit Hilfe geeigneter birationaler Transformationen (vgl. §§ 1 und 2 der vierundzwanzigsten Vorlesung). Dann aber bietet wieder der Nachweis der Auflösbarkeit der Singularitäten und der hierbei unzerstörbaren invarianten Begriffsbildungen für eine strenge und ausnahmslos giltige Theorie dieselben Schwierigkeiten wie jene Bestimmung der Art und Ordnung des Kurvenschnittes; hingegen kommen diese gänzlich in Fortfall, wenn man so, wie das hier geschehen ist, von vornherein den geometrischen Begriffsbildungen die entsprechenden algebraischen zur Seite stellt und durch die konsequente Benutzung der Divisoren die sichere Basis dieser Untersuchung schafft.

Wir wenden uns jetzt zur Erörterung der dritten Methode, welche auf arithmetischer Grundlage ruht und darum im Gange der historischen Entwickelung am spätesten in die Erscheinung getreten ist. Vergleicht man die Eigenschaften der Elemente eines algebraischen Körpers $K(z, u)$

mit den entsprechenden der Elemente eines rationalen Körpers $K(z)$, so haben beide Arten von Funktionen das Gemeinsame, dafs sie gleich viele Null- und Unendlichkeitsstellen besitzen; sie unterscheiden sich aber dadurch, dafs die Nullpunkte und Pole bei den rationalen Funktionen willkürlich angenommen werden dürfen, bei den algebraischen in gewisser Weise voneinander abhängen. Dieser Unterschied ist das charakteristischeste Merkmal der Theorie der algebraischen Funktionen und die Quelle fast aller der dieses Gebiet beherrschenden Gesetzmäfsigkeiten; er macht vor allem auch für die Rechnung mit den Funktionen eines algebraischen Körpers die Einführung der Divisoren notwendig, während dieses Hilfsmittel im Bereiche der rationalen Funktionen entbehrt werden könnte, weil hier, zwar nicht jedem Primteiler selbst, wohl aber dem Quotienten zweier beliebiger Primdivisoren eine und nur eine lineare Funktion von z entspricht.

Ein ganz ähnlicher Unterschied besteht nun in der Zahlentheorie zwischen den rationalen und den algebraischen Zahlen. Ist nämlich ξ eine algebraische Zahl, d. h. die Wurzel einer Gleichung

$$a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \cdots + a_1 \xi + a_0 = 0$$

mit rationalen Zahlkoeffizienten, und $K(\xi)$ der Körper der Zahlen, welche aus ξ durch Anwendung der vier rationalen Rechenoperationen hervorgehen, so kann jedes Element von $K(\xi)$ ebenso wie eine rationale Zahl in Primfaktoren zerlegt werden; aber diese Primfaktoren sind hier im allgemeinen nicht Zahlen, sondern Divisoren, d. h. sie können nur als „ideale“ gemeinsame Teiler mehrerer Zahlen oder durch Adjunktion formaler Bildungen, die aufserhalb des Bereiches $K(\xi)$ liegen, dargestellt werden. Die grofsen durch diese Eigentümlichkeit entstehenden Schwierigkeiten wurden für Zahlkörper durch die Untersuchungen von Kummer, Kronecker und Dedekind überwunden. Diese Analogie wurde aber auch für Dedekind und Weber der Ausgangspunkt für eine völlig strenge, mit rein arithmetischen Begriffsbildungen operierende Theorie der algebraischen Funktionen (1880), durch welche im Zusammenhange mit allgemeineren, aber im einzelnen weniger tief eindringenden Untersuchungen Kroneckers ein weitgehender Parallelismus in den grundlegenden Gesetzen der beiden dem Gegenstande nach so verschiedenen Theorien offenbart wurde.

Aus einer Neubegründung und Fortbildung dieser arithmetischen Theorieen sind die hier vorliegenden Vorlesungen erwachsen. Sie unterscheiden sich aber von der Theorie von Dedekind und Weber aufser in der Durchführung im einzelnen auch in verschiedenen Punkten von allgemeiner methodischer Bedeutung, welche hauptsächlich unter

drei Gesichtspunkte subsumiert werden können. Erstens führen sie von vornherein wieder das prinzipielle Hilfsmittel der Reihenentwickelungen ein, welches zunächst in arithmetischer Gestalt auftritt, bald aber auch dazu dient, den Zusammenhang mit der Lehre von den analytischen Funktionen und von der Riemannschen Fläche von Anfang an aufrecht zu erhalten; hierdurch wird es auch ermöglicht, alle auftretenden Gröfsen, z. B. auch das Fundamentalsystem eines Moduls oder Ideals und die sämtlichen Integrale erster Gattung, für ein ganz beliebiges algebraisches Gebilde wirklich herzustellen und die charakteristischen Eigenschaften des Fundamentalsystems eines Ideals vollständig anzugeben (vierzehnte Vorlesung). Zweitens befreien sie die im Mittelpunkte der ganzen Untersuchung stehende Lehre von den Divisoren von der Gebundenheit, die ihr noch eigen war, indem überall aufser den ganzen auch die gebrochenen Divisoren eingeführt werden, indem ferner die Klasseneinteilung ebenfalls auf diese gebrochenen Divisoren bezogen und hierdurch erheblich vereinfacht wird, endlich indem durch geeignete Definitionen äquivalente Divisoren aufser der Multiplikation und Division auch der Rechenoperation der Addition und Subtraktion zugänglich gemacht werden; hierdurch kann vor allem auch der Beweis des Riemann-Rochschen Satzes ganz aufserordentlich vereinfacht werden. Drittens wird auf der so gewonnenen Grundlage die algebraische Untersuchung nunmehr weitergeführt bis zu dem Punkte, wo sie mit der Theorie der algebraischen Kurven und der der Abelschen Integrale in lebhafte Wechselbeziehung tritt; dies hat u. a. zu der neuen Einführung der Verzweigungsdivisoren einer Schar, einer auf arithmetischer Grundlage ruhenden Behandlung der Kurvensingularitäten, einer im wesentlichen neuen Grundlegung der Theorie der Raumkurven, und zu tiefer eindringenden Untersuchungen über die Klassen algebraischer Gebilde und die Periodizität der Abelschen Integrale Anlafs gegeben. Es war unser Wunsch dabei, der arithmetischen Theorie neben der ihr von Natur eigentümlichen Strenge und Allgemeinheit auch diejenige Geschmeidigkeit zu geben, welche sie vor Einseitigkeit bewahrt und für die Erfüllung der zahlreichen ihr obliegenden Aufgaben fähig macht. Um dies an einem Beispiele darzulegen, werde hier erwähnt, dafs die Lehre von den Divisoren mit der von Klein ausgebildeten Theorie der homogenen Formen am algebraischen Gebilde in innigsten Zusammenhang tritt und für diese einen einfachen und von transcendenten Hilfsmitteln freien Boden gewinnt. Eine in diesem Sinne ausgestaltete arithmetische Theorie vermag aber nach unserer Meinung ohne Mühe überhaupt jede Bereicherung in sich aufzunehmen, die ihr von irgend einer Seite her zugeführt wird.

Sachregister.

Berichtigungen.

S. 5 Z. 1 v. o. lies „welcher“ statt „welche“.

„ 16 „ 15 v. u. lies $(z - \alpha_1)$ statt $(z = \alpha_1)$.

„ 29 „ 15 v. u. ist zu der Gleichung die Nr. (2) hinzuzufügen.

„ 35 „ 14 v. o. lies $\leqq$ statt $\geqq$.

„ 35 „ 2 v. u. ist hinter „Reihe“ der Buchstabe u ausgefallen.

„ 51 „ 9 v. u. lies $\mathfrak{A}_0'$ statt $\mathfrak{A}_0$.

„ 54 „ 3 v. u. lies $(c - e_0)^{\lambda_0} \overline{\varphi}_0(c)$ statt $(c - c_0)^{\lambda_0} \overline{\varphi}_0(c)$.

„ 54 „ 2 v. u. ist $\overline{\varphi}_0$ hinzuzufügen.

„ 59 „ 7 v. u. lies $(z - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ statt $z - \alpha$.

„ 63 „ 4 v. o. lies $f(u_{n+1}, z)$ statt $f(u_0, z)$.

„ 64 „ 7 v. u. lies $(z - \alpha)^M$ statt $(z - \alpha_0)^M$.

„ 107 „ 13 v. u. ist $\mathfrak{R}$ durch R zu ersetzen.

„ 127 „ 4 v. o. und S. 132 Z. 9 v. u. ist unter dem Summenzeichen der Buchstabe e durch c zu ersetzen.

„ 138 „ 14 v. o. ist das Wort „endliche“ fortzulassen.

„ 153 „ 15 v. u. hinter „Divisor“ ist einzuschalten „nie mehr, als“.

„ 162 „ 14 v. o. hinter „von z“ ist einzuschalten „sind“.

„ 209 „ 15 v. u. lies $\eta^{(a+b+i+1)}$ statt $\eta^{(a+b+i-1)}$.

„ 216 „ 4 v. o. ist vor „jeder“ einzuschalten „an“.

„ 231 „ 7 v. u. lies S. 218 statt S. 248.

„ 232 „ 15 v. u. lies n^2 statt n.

„ 237 „ 1 v. u. lies $\overline{y}$ statt y.

„ 241 „ 4 v. o. lies μ^h statt μ_h und Z. 3 v. u. lies $D(x, a, b)$ statt $D(w, a, b)$.

„ 269 „ 10 v. o. lies „eines rationalen Differentiales“ statt „einer rationalen Funktion von z“.

„ 283 „ 3 v. u. lies $\mathfrak{p}^{(1)}$ statt $\mathfrak{p}^{(1)}\varrho$.

„ 285 „ 6 v. u. sind die Differentiale $\frac{dz}{z - \alpha}$ und $z^\sigma dz$ zu vertauschen.

„ 311 „ 16 v. o. lies $\mathfrak{P}^{\mu+1}$ statt $\mathfrak{P}^{\mu-1}$.

„ 337 „ 8 v. u. lies $\overline{\omega}(\mathfrak{P}_\lambda) - \overline{\omega}(\mathfrak{P}_\varrho)$ statt $\omega(\mathfrak{P}_\lambda) - \omega(\mathfrak{P}_\varrho)$.

„ 338 „ 6 v. o. lies $\overline{\omega}(\mathfrak{P})$ statt $\omega(\mathfrak{P})$.

„ 339 „ 4 v. u. lies „linken“ statt „rechten“.

„ 357 „ 19 v. o. lies $\tilde{\omega}'_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q})$ statt $\tilde{\omega}_{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2}(\mathfrak{Q})$.

„ 384 „ 11 v. o. lies (4) statt (3).

„ 394 „ 9 u. 10 v. u. lies Σl_{12} statt Σk_{12}.

„ 395 „ 6 v. o. lies § 3 statt § 2.

„ 520 „ 2 v. u. lies (6) statt 5.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.



